Хотите легко и без проблем сдать выпускные экзамены в школе и вступительные в вуз? Научитесь свободно решать задачи. И в этом вам поможет наш сборник, включающий задачи разного уровня сложности — от сравнительно простых до задач повышенной трудности, конкурсных и олимпиадных. Каждый работающий с книгой в зависимости от степени подготовки сможет выбрать для себя задачи в нужном ему разделе или параграфе. Отметим, что все задачи снабжены подробными решениями, комментариями и ответами.

ISBN 966-03-2099-X

А.И.Рыбалка, И.Н.Кибец, И.О.Шкляревск

2002 задачи по физике

для выпускников и абитуриентов

ББК 74.265.1 я729
Р 93

Художник-оформитель
И. В. Осипов

Рыбалка А. И., Кибец И. Н., Шкляревский И. О.
Р 93 2002 задачи по физике / Худож.-оформитель И. В. Осипов. — Харьков: Фолио, 2003. — 783 с.
ISBN 966-03-2099-Х.

Книга содержит задачи по всему курсу элементарной физики — от сравнительно простых до самых сложных. Учитель, следующий типовой программе, найдет соответствующие ей задачи, пропуская более сложный материал, преподаватель физико-математического лицея или гимназии, работающий по авторской программе, выберет те задачи, которые ей соответствуют. Участники олимпиад и их наставники воспользуются задачами повышенной сложности. Ко всем задачам даны решения или указания, в «Приложении» приведен необходимый справочный материал.

Книга адресована учащимся старших классов и преподавателям школ, лицеев и гимназий, выпускникам и абитуриентам.

ББК 74.265.1 я729

ISBN 966-03-2099-Х

Не надлежит ослабевать духом,
но тем больше мысли простирать,
чем отчаяннее дело быть кажется.

М. В. Ломоносов

Железо ржавеет, не находя себе применения,
стоячая вода гниет или на холоде замерзает,
а ум человека, не находя себе применения, чахнет.

Леонардо да Винчи

ОТ АВТОРОВ

Эта книга написана в соответствии с программой по физике для средней школы и адресована учащимся старших классов, выпускникам и абитуриентам.

Предложенные в сборнике задачи делятся по сложности на три уровня. Задачи первого уровня — сравнительно простые, но охватывают большинство типичных задач. Задачи второго уровня являются примерами задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в разные вузы. К третьему уровню относятся задачи олимпиадного характера, решение которых требует нестандартного творческого мышления.

Однако следует отметить, что деление на уровни является условным, т. к. сформулировать, что такое легкая или трудная задача, довольно сложно. В зависимости от степени подготовки учащегося и задачи I уровня могут показаться сложными, а учащимся лицеев, гимназий и других учебных заведений физико-математического профиля, где программа по физике расширена, даже задачи III уровня покажутся легкими.

Большинство задач взяты из отечественных источников, список которых приведен в конце издания, но с авторскими решениями.

Умение решать задачи не рождается вместе с человеком, только постоянно практикуясь можно овладеть этим искусством. Естественно, перед тем как приступить к решению задач, нужно достаточно хорошо изучить теорию, используя любой учебник, уяснить физический смысл законов, границы их применимости.

После усвоения теоретического материала можно переходить к решению задач.

Несмотря на то, что все задачи снабжены решениями, попытайтесь вначале решить задачу самостоятельно и сравнить свое решение с приведенным в издании. Если при самостоятельном решении возникают затруднения, следует детально разобрать об-

разец решения. Достаточно подробные объяснения позволяют легко понять методику решения задачи. Решение задач сводится не только к подстановке определенных величин в формулы, для их решения необходимо логически рассуждать и критически мыслить.

Справочный материал из «Приложения» поможет в работе.

Проработав данное издание, учащийся будет готов к сдаче выпускных и вступительных экзаменов по физике, а также к дальнейшему обучению в вузе.

Желаем успеха!

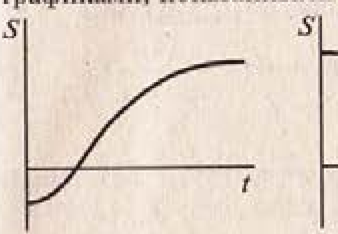
МЕХАНИКА

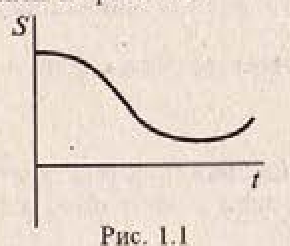
КИНЕМАТИКА

Уровень I

1. РАВНОМЕРНОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

1.1. Может ли зависимость пути S от времени t изображаться графиками, показанными на рис. 1.1?





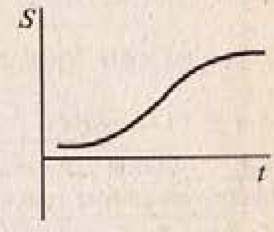


Рис. 1.1

Решение.

а) Не может, путь не может быть отрицательным;

б) не может, путь не может уменьшаться;

в) может.

1.2. Два шарика начали одновременно и с одинаковой скоростью двигаться по поверхности, имеющей форму, изображенную на рис 1.2. Как будут отличаться скорости и времена движения шариков к моменту их прибытия в точку B? Трением пренебречь.

Ответ: $\upsilon_1 = \upsilon_2$; $t_1 > t_2$.

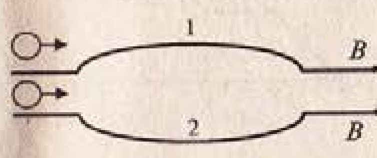


Рис. 1.2

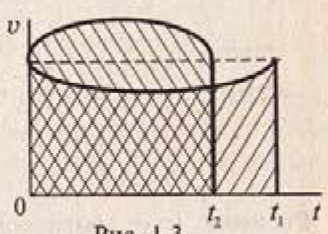


Рис. 1.3

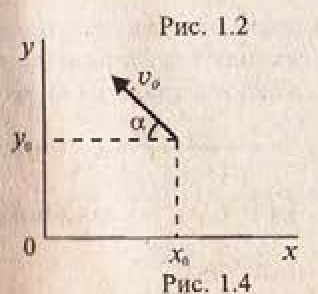


Рис. 1.4

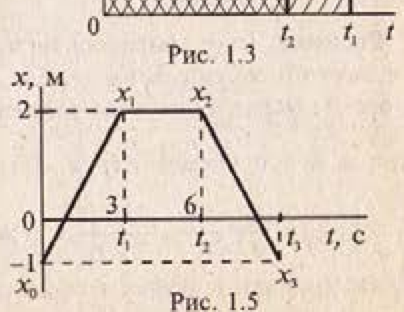


Рис. 1.5

Решение. В отсутствии трения скорости в точке B одинаковы. Зависимость скорости от времени приведена на рис. 1.3. Так как пути, пройденные шариками, одинаковы, т. е. площади под кривыми одинаковы, то $t_1 > t_2$.

1.3. Точка движется с постоянной скоростью υ_0 под углом α к оси x (рис. 1.4). В начальный момент времени $t = 0$ точка имела координаты x_0, y_0. Напишите уравнение движения точки и уравнение траектории.

Ответ: $x = x_0 - \upsilon_0 t\cos\alpha$; $y = y_0 + \upsilon_0 t\sin\alpha$; $y = y_0 + (x_0 - x)\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. Уравнения движения для координат в общем виде $x = x_0 + \upsilon_{0x}t$, $y = y_0 + \upsilon_{0y}t$. Исходя из графика (рис 1.4) $\upsilon_{0x} = -\upsilon_0\cos\alpha$; $\upsilon_{0y} = \upsilon_0\sin\alpha$, тогда уравнения движения $x = x_0 - \upsilon_0 t\cos\alpha$, $y = y_0 + \upsilon_0 t\sin\alpha$. Уравнение траектории (при учете $t = \dfrac{x_0 - x}{\upsilon_0\cos\alpha}$)

$y = y_0 + (x_0 - x)\operatorname{tg}\alpha$.

1.4. Даны уравнения движения тела $x = \upsilon_x t$, $y = y_0 + \upsilon_y t$. Запишите уравнение траектории и постройте график, если $\upsilon_x = 25$ см/с, $y_0 = 0{,}2$ м, $\upsilon_y = 1{,}0$ м/с.

Ответ: $y = 0{,}2 + 4x$.

Решение самостоятельное.

1.5. На рис. 1.5 представлен график зависимости координаты тела от времени. Сколько времени тело находилось в движении? Постройте график зависимости скорости и пути от времени.

Ответ: $t = 6$ с.

Рис. 1.6

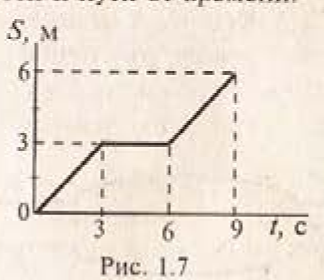


Рис. 1.7

Решение. Тело двигалось первые три и последние три секунды, т. е. всего 6 секунд. В интервале с 3 по 6 секунду тело покоилось. Скорость характеризуется тангенсом угла наклона графика координаты к оси времени (рис. 1.5), тогда $\upsilon_1 = \dfrac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{2+1}{3} = 1$ м/с; $\upsilon_2 = 0$; $\upsilon_3 = \dfrac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \dfrac{-1-2}{9-6} = -1$ м/с (рис. 1.6). Путь — величина положительная и может только увеличиваться (рис. 1.7).

1.6. График зависимости скорости тела от времени изображен на рис. 1.8. Начертите график зависимости координаты, а также пройденного пути от времени. Найдите среднюю скорость движения тела и среднюю путевую скорость за первые 8,0 секунд.

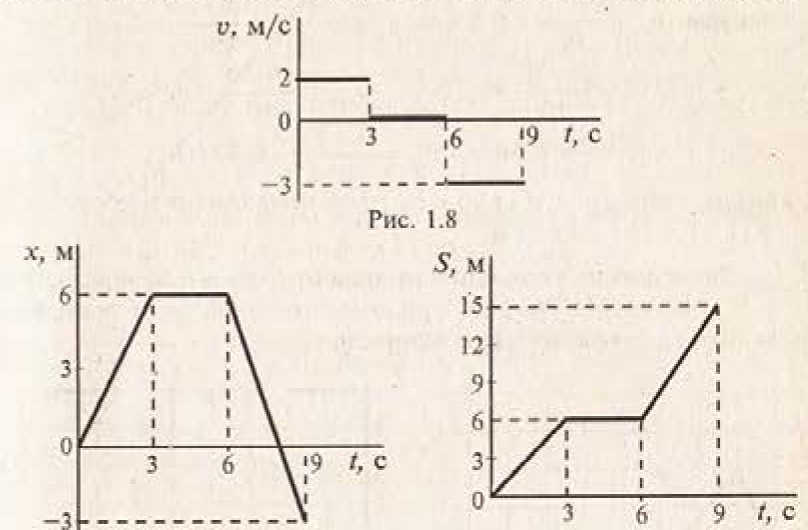


Рис. 1.8

Рис. 1.9

Решение. Графики зависимости координаты и пути от времени показаны на рис. 1.9 (а, б).

Средняя скорость движения

$$\upsilon_{ср} = \frac{\upsilon_1 t_1 + \upsilon_2 t_2 + \upsilon_3 t_3}{t_1 + t_2 + t_3},\quad \upsilon_{ср} = \frac{2\cdot3 + 0\cdot3 - 3\cdot2}{8} = 0.$$

Средняя путевая скорость $\upsilon_{S\,ср} = \dfrac{S}{t}$, $\upsilon_{S\,ср} = \dfrac{2\cdot3 + 0\cdot3 + |3|\cdot2}{8} = 1{,}5$ м/с.

1.7. Груз перемещается вертикально. Пользуясь графиком этого перемещения, показанным на рис. 1.10, определите скорости подъема и спуска, а также путь, который прошел груз за 70 с. Чему равна

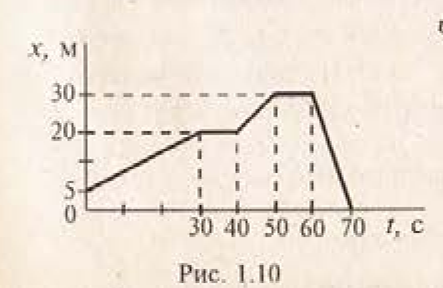


Рис. 1.10

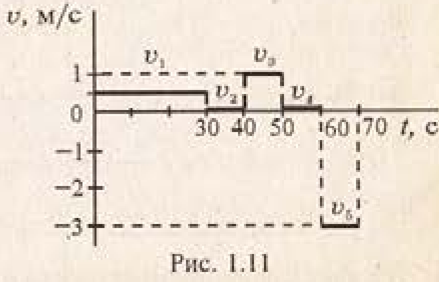


Рис. 1.11

средняя скорость движения груза? Начертите график зависимости скорости груза от времени.

Ответ: $v_{под} = 0,5\,м/с$, $v_{сп} = 3\,м/с$, $S = 55\,м$, $v_{ср} = -0,07\,м/с$.

Решение. $v_1 = \frac{20-5}{30} = 0,5\,м/с$; $v_2 = 0$; $v_3 = \frac{30-20}{10} = 1\,м/с$;

$v_4 = 0$; $v_5 = \frac{0-30}{10} = -3\,м/с$; $v_{под} = \frac{30-5}{50} = 0,5\,м/с$;

$v_{сп} = \frac{30}{10} = 3\,м/с$; $v_{ср} = \frac{0-5}{70} = -0,07\,м/с$.

График зависимости скорости груза от времени изображен на рис. 1.11, $S = 25 + 30 = 55\,м$.

1.8. Зависимость перемещения тела от времени изображена на рис. 1.12. Нарисуйте график зависимости скорости от времени и определите среднюю путевую скорость.

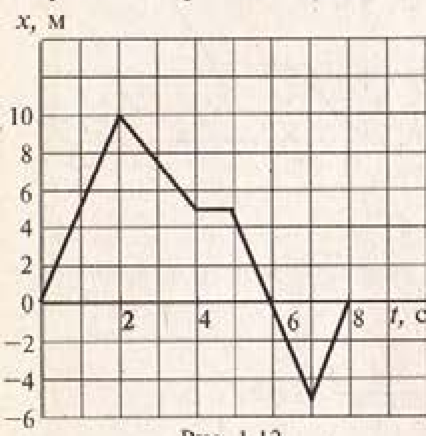


Рис. 1.12

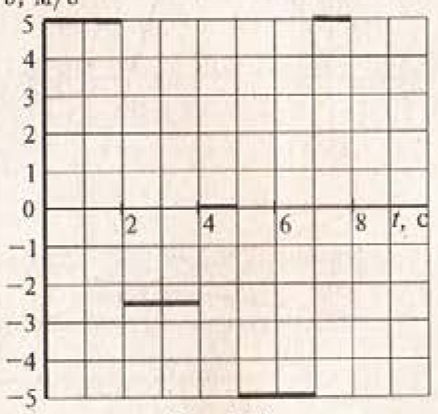


Рис. 1.13

Решение.

Скорость в интервале времени

1) $0 < t < 2\,с$; $v_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{10}{2} = 5\,м/с$;

2) $2\,с < t < 4\,с$; $v_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{5-10}{4-2} = -2,5\,м/с$;

3) $4\,с < t < 5\,с$; $v_3 = 0$;

4) $5\,с < t < 7\,с$; $v_4 = \frac{x_4 - x_3}{t_4 - t_3} = \frac{-5-5}{7-5} = -5\,м/с$;

5) $7\,с < t < 8\,с$; $v_5 = \frac{x_5 - x_4}{t_5 - t_4} = \frac{0-(-5)}{8-7} = 5\,м/с$.

$v_{Sср} = \frac{10+5+0+10+5}{8} = \frac{30}{8} = 3,75\,м/с$.

График зависимости скорости от времени изображен на рис. 1.13.

1.9. Две материальные точки движутся вдоль оси абсцисс равномерно со скоростями $v_1 = 8\,м/с$ и $v_2 = 4\,м/с$. В начальный момент времени первая точка находилась слева от начала координат на расстоянии 21 м, а вторая — справа на расстоянии 7 м. Через сколько времени первая точка догонит вторую? Где это произойдет? Начертите график движения $x(t)$.

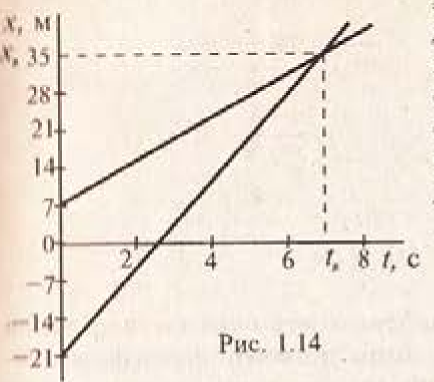


Рис. 1.14

Ответ: $t = 7\,с$, $x = 35\,м$.

Решение.

$x_1 = x_{01} + v_1 t$, $x_1 = -21 + 8t$;

$x_2 = x_{02} + v_2 t$, $x_2 = 7 + 4t$. В момент встречи $x_1 = x_2$; $-21 + 8t = 7 + 4t$. Время встречи $t_в = 7\,с$, координата $x_в = 35\,м$ (рис. 1.14).

1.10. Расстояние между двумя точками в начальный момент равно 300 м. Точки движутся навстречу друг другу со скоростями 1,5 м/с и 3,5 м/с. Когда и где они встретятся? Начертите график.

Рис. 1.15

Ответ: $t = 60\,с$, $x = 90\,м$.

Решение. См. задачу 1.9.;

$x_1 = 15t$; $x_2 = 300 - 3,5t$;

$x_1 = x_2$; $1,5t = 300 - 3,5t$;

$t_в = 60\,с$, $x_в = 90\,м$. Зависимость $x(t)$ показана на рис. 1.15.

1.11. Пункты A, B, C находятся на одной прямой. Расстояние S между пунктами A и B равно 80 км. Из пункта A в направлении C выезжает со скоростью $v_1 = 50\,км/ч$ мотоциклист. Одновременно из пункта B выезжает в том же направлении автомобиль со скоростью $v_2 = 30\,км/ч$. Через какое время τ и на каком расстоянии S_1 от точки A мотоцикл догонит автомобиль? Решите задачу алгебраическим и графическим способами.

Ответ: $\tau = 4\,ч$, $S_1 = 200\,км$.

Указание. См. задачу 1.9.

1.12. 1) Первую половину пути автомобиль проехал со средней скоростью $v_1 = 60\,км/ч$, а вторую — со средней скоростью $v_2 = 40\,км/ч$.

2) Первую половину времени автомобиль двигался со средней скоростью $v_1 = 40\,км/ч$, а вторую — со средней скоростью $v_2 = 60\,км/ч$.

Определите среднюю скорость автомобиля на всем пути для случаев 1) и 2).

Ответ: 1) $v_{Sср} = 48\,км/ч$, 2) $v_{Sср} = 50\,км/ч$.

Решение. 1) $v_{S\,ср} = \frac{S}{t} = \frac{S}{t_1 + t_2}$; $t_1 = \frac{S}{2v_1}$; $t_2 = \frac{S}{2v_2}$;

$$v_{S\,ср} = \frac{S}{\frac{S}{2v_1} + \frac{S}{2v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 48\,км/ч.$$

2) $v_{S\,ср} = \frac{S_1 + S_2}{t}$; $S_1 = v_1 \cdot \frac{t}{2}$; $S_2 = v_2 \cdot \frac{t}{2}$;

$$v_{S\,ср} = \frac{v_1 \cdot \frac{t}{2} + v_2 \cdot \frac{t}{2}}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 50\ км/ч.$$

1.13. Велосипедист проехал первую треть пути по шоссейной дороге со скоростью $v_1 = 10\,м/с$, затем половину пути по проселочной дороге со скоростью $v_2 = 6\,м/с$ и оставшуюся часть пути по лесной тропинке со скоростью $v_3 = 2\,м/с$. Чему равна средняя путевая скорость велосипедиста?

Ответ: $v_{S\,ср} = 5\,м/с$.

Решение. Средняя путевая скорость $v_{S\,ср} = \frac{S}{t}$, где $t = t_1 + t_2 + t_3$;

$$t_1 = \frac{S}{3v_1};\quad t_2 = \frac{S}{2v_2};\quad t_3 = \frac{S}{6v_3};\quad v_{S\,ср} = \frac{S}{\frac{S}{3v_1} + \frac{S}{2v_2} + \frac{S}{6v_3}} = 5\,м/с.$$

1.14. Катер прошел первую половину пути со средней скоростью в $n = 2$ раза большей, чем вторую. Средняя скорость на всем пути составила $v_{ср} = 4{,}0\,км/ч$. Каковы были скорости катера на первой и второй половинах пути?

Ответ: $v_1 = 6\,км/ч$, $v_2 = 3\,км/ч$.

Решение. См. задачу 1.12. $v_1 = nv_2$; $v_{ср} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2nv_2}{n+1}$;

$v_1 = v_{ср}(n+1)/2$; $v_1 = 6\,км/ч$; $v_2 = v_{ср}(n+1)/2n$; $v_2 = 3\,км/ч$.

1.15. Катер, двигаясь вниз по течению, затратил время в $n = 3$ раза меньше, чем на обратный путь. Определите, с какими скоростями относительно берега двигался катер, если средняя скорость на всем пути составила $v_{ср} = 3\,км/ч$.

Ответ: $v_1 = 6\,км/ч$, $v_2 = 2\,км/ч$.

Указание. См. решение задачи 1.14.

1.16. Первую половину времени тело двигается со скоростью $v_1 = 30\,м/с$ под углом $\alpha_1 = 30°$ к заданному направлению, а вторую — под углом $\alpha_2 = 120°$ к тому же направлению со скоростью $v_2 = 40$ м/с. Найти среднюю скорость перемещения. Какой путь тело пройдет за время $t = 4{,}0$ с?

Ответ: $v_{ср} = 25$ м/с, $\beta = 83°$ к заданному направлению, $S = 140$ м.

Решение. См. рис. 1.16 $\angle ACB = 90°$, тогда перемещение равно

$$l = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \sqrt{(v_1t/2)^2 + (v_2t/2)^2};$$

$$v_{ср} = \frac{l}{t} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2} = 25\,м/с.$$

$$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{v_2}{v_1} = 1{,}33;\quad \angle BAC = 53°.$$

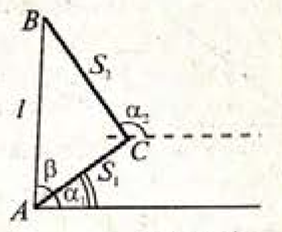


Рис. 1.16

Перемещение под углом $\beta = \alpha_1 + \angle BAC = 30° + 53° = 83°$ к заданному направлению. Путь, который пройдет тело: $S = S_1 + S_2 = v_1\frac{t}{2} + v_2\frac{t}{2} = 140$ м.

1.17. При равномерном движении двух тел навстречу друг другу расстояние между ними уменьшается на $S_1 = 16$ м за каждые $t_1 = 10$ с. При движении этих же тел с прежними по величине скоростями в одном направлении, расстояние между ними увеличивается на $S_2 = 3$ м за каждые $t_2 = 5$ с. Какова скорость каждого тела?

Ответ: $v_1 = 1{,}1\,м/с$; $v_2 = 0{,}5\,м/с$.

Решение. Скорость движения одного тела относительно другого $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, откуда при движении навстречу друг другу $u_1 = v_1 + v_2$; в одном направлении $u_2 = v_1 - v_2$. Тогда $v_1 = \frac{u_1 + u_2}{2}$; $v_2 = \frac{u_1 - u_2}{2}$, где $u_1 = S_1/t_1$; $u_2 = S_2/t_2$; $u_1 = 1{,}6\,м/с$; $u_2 = 0{,}6\,м/с$; $v_1 = 1{,}1\,м/с$; $v_2 = 0{,}5\,м/с$.

1.18. Из двух городов навстречу друг другу выехали: автобус — в 9 часов со скоростью $v_1 = 40\,км/ч$, и автомобиль в 9 ч 30 мин со скоростью $v_2 = 60\,км/ч$. Расстояние между городами $S = 120\,км$. В котором часу и на каком расстоянии от городов встретились автобус и автомобиль?

Ответ: 10 ч 30 мин, 60 км.

Решение.

Автомобиль был в пути на Δt = 9 ч 30 мин – 9 ч = 30 мин = 0,5 ч меньше, чем автобус. Пусть время в пути автобуса t, тогда $v_1t + v_2(t - \Delta t) = S$, откуда $t = \frac{S + v_2\Delta t}{v_1 + v_2} = 1{,}5$ ч, т. е. они встретились

в 9 ч + 1,5 ч = 10,5 ч = 10 ч 30 мин. Расстояние, которое прошел автобус, $S = v_1 t = 60$ км, таким образом, встреча произошла посредине между городами.

1.19. Шар-зонд поднялся за $t = 4$ мин на высоту $h = 800$ м, при этом был отнесен боковым ветром в сторону на расстояние $l = 600$ м. Найдите: 1) перемещение S шара относительно точки запуска, 2) скорость ветра u, считая её постоянной.

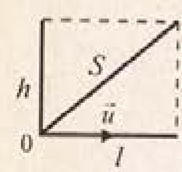


Рис. 1.17

Ответ: 1000 м; 2,5 м/с.

Решение.

См. рис. 1.17. Перемещение $S = \sqrt{l^2 + h^2} = 1000$ м, скорость ветра $u = l/t = 2{,}5$ м/с.

1.20. Ведро стоит под дождем. Изменится ли скорость наполнения ведра водой, если подует ветер?

Решение. Скорость наполнения ведра зависит только от вертикальной составляющей, величину которой ветер не изменяет.

1.21. Пассажир едет в поезде, скорость которого $v_1 = 80$ км/ч. Навстречу этому поезду движется товарный поезд длиной $l = 1{,}0$ км со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Сколько времени товарный поезд будет двигаться мимо пассажира?

Ответ: $t = 0{,}5$ мин.

Решение. Скорость пассажира относительно товарного поезда $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, в скалярном виде $v_{отн} = v_1 + v_2$. Время, в течение которого товарный поезд двигался мимо пассажира, $t = l/v_{отн} = l/(v_1 + v_2) = 0{,}5$ мин.

1.22. Два поезда едут навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 12$ м/с и $v_2 = 18$ м/с. Пассажир первого поезда замечает, что второй поезд проходит мимо него в течение $t = 8$ с. Какова длина l второго поезда?

Ответ: $l = 240$ м.

Указание. См. задачу 1.21.

1.23. От одной пристани до другой вниз по течению катер проходит за $t_1 = 8$ ч, а обратно — за $t_2 = 12$ ч. За какое время катер прошел бы это расстояние в стоячей воде?

Ответ: $t = 9{,}6$ ч.

Решение. Пусть L — расстояние между пристанями, v — скорость катера в стоячей воде, u — скорость течения реки. Выберем систему координат с началом в первом пункте и направим ось x по

течению реки. Тогда уравнение движения катера вниз по течению $L = (v + u)t_1$, вверх по течению $L = (v - u)t_2$, в стоячей воде $L = vt$. Решая эту систему, получаем $L/t_1 = v + u$, $L/t_2 = v - u$. Складываем эти два уравнения $L/t_1 + L/t_2 = 2v$, тогда $t = L/v = 2t_1 t_2/(t_1 + t_2) = 9{,}6$ ч.

1.24. Спортсмены бегут колонной длиной l_0 с одинаковыми скоростями v. Навстречу бежит тренер со скоростью u ($u < v$). Спортсмен, поравнявшийся с тренером, разворачивается и бежит в обратную сторону с той же скоростью v. Найти длину колонны, когда все спортсмены будут бежать в направлении, противоположном начальному.

Решение. Начало координат совмещаем с местом встречи первого спортсмена с тренером. Тогда x-координата тренера $x_T = -ut$, первого и последнего спортсмена до встречи с тренером $x_1(t) = vt$, $x_2(t) = -l_0 + vt$ и первого спортсмена после встречи с тренером $x_1'(t) = -vt$. В момент встречи последнего спортсмена с тренером $t = \tau$. Получим систему:

$$\begin{cases} -l_0 + v\tau = -u\tau \\ l = -u\tau + v\tau \end{cases};$$

$$l = \frac{v - u}{v + u} l_0.$$

1.25. Эскалатор метрополитена поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира в течение времени $t_1 = 1{,}0$ мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за время $t_2 = 3{,}0$ мин. Сколько времени будет подниматься пассажир по движущемуся эскалатору?

Ответ: $t = 45$ с.

Решение. По закону сложения скоростей $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$; $v = v_1 + v_2$; $v_1 = l/t_1$; $v_2 = l/t_2$, $l = v \cdot t = (v_1 + v_2)t$, где l — длина эскалатора

$$t = \frac{l}{v_1 + v_2} = \frac{l}{l/t_1 + l/t_2} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}; \quad t = 45 \text{ с}.$$

1.26. Теплоход курсирует по реке между двумя пристанями, находящимися на расстоянии $l = 60$ км. По течению реки этот путь теплоход проходит за время $t_1 = 3{,}0$ ч; против — за время $t_2 = 6{,}0$ ч. Сколько времени потребовалось бы теплоходу для того, чтобы проплыть расстояние между пристанями по течению при выключенном двигателе? Каковы скорость течения реки и скорость теплохода относительно воды?

Ответ: $t = 12$ ч; $v_р = 5$ км/ч; $v_Т = 15$ км/ч.

Решение. Скорость теплохода в стоячей воде $v_т$, скорость течения реки $v_р$. Скорость теплохода по течению $v_1 = v_т + v_р$, против течения $v_2 = v_т - v_р$. Тогда $l = (v_т + v_р)t_1$; $l = (v_т - v_р)t_2$. Решая совместно последние два уравнения, получаем

$$v_р = \frac{l(t_2 - t_1)}{2t_1t_2} = 5\,км/ч; \quad v_т = \frac{l(t_2 + t_1)}{2t_1t_2} = 15\,км/ч;$$

$$t = \frac{l}{v_р} = \frac{2t_1t_2}{t_2 - t_1} = 12\,ч.$$

1.27. Вагон шириной b = 3,6 м, движущийся со скоростью $v_1 = 15$ м/с, был пробит пулей, летевшей перпендикулярно направлению движения вагона. Смещение отверстий в стенах вагона относительно друг друга равно $S = 9{,}0$ см. Определить скорость движения пули, считая ее постоянной.

Ответ: $v_2 = 600$ м/с.

Решение. Время, за которое пуля долетит от одной стенки вагона до другой, равно времени, за которое вагон сместится на расстояние S, т. е. $\frac{b}{v_2} = \frac{S}{v_1}$, откуда скорость пули $v_2 = \frac{b \cdot v_1}{S} = 600$ м/с.

1.28. Наблюдатель, стоящий на земле, видит как беззвучно к нему приближается самолет, который летит горизонтально и прямолинейно. Самолет пролетает мимо наблюдателя и удаляется от него. Наблюдатель слышит звук моторов самолета в момент, когда самолет виден под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Поясните это явление и определите скорость самолета v. Скорость звука равна $v_{зв} = 340$ м/с.

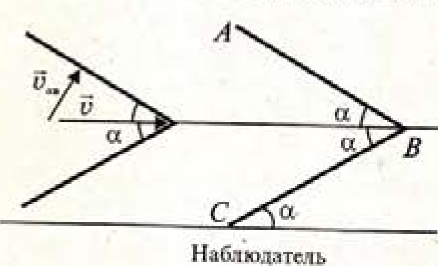


Рис. 1.18

Ответ: $v = 680$ м/с.

Решение. Самолет сверхзвуковой. По принципу Гюйгенса фронт звуковой волны имеет вид конуса (на рис. 1.18 ABC). Из рисунка видно, что $\sin\alpha = \frac{v_{зв}}{v}$, откуда $v = \frac{v_{зв}}{\sin\alpha}$; $v = 680$ м/с.

1.29. Охотник стреляет дробью в птицу, летящую по прямой со скоростью $v_1 = 15$ м/с. Какое упреждение S нужно сделать, если в момент выстрела птица находилась на минимальном от охотника расстоянии, равном $l = 30$ м? Скорость дроби $v_2 = 375$ м/с.

Ответ: $S = 1{,}2$ м.

Указание. См. задачу 1.27.

1.30. Корабль выходит из пункта A и идет со скоростью v, составляющей угол α с линией AB (рис. 1.19). Под каким углом β к линии AB следовало бы выпустить из пункта B торпеду, чтобы она поразила корабль? Торпеду нужно выпустить в тот момент, когда корабль находился в пункте A. Скорость торпеды u.

Ответ: $\beta = \arcsin\frac{v}{u}\sin\alpha$.

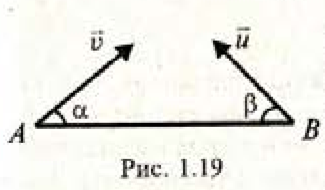


Рис. 1.19

Решение. Чтобы торпеда поразила корабль, у них должны быть одинаковые проекции перемещения на ось y (перпендикулярную AB). Время движения одинаково. При этом $v\sin\alpha \cdot t = u\sin\beta \cdot t$, тогда

$$\beta = \arcsin(\frac{v}{u}\sin\alpha).$$

1.31. Капли дождя на окнах неподвижного трамвая оставляют полосы, наклоненные под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. При движении трамвая со скоростью $u = 18$ км/ч полосы от дождя вертикальны. Найдите скорость капель дождя v в безветренную погоду и скорость ветра $v_в$.

Ответ: $v_y = 8{,}66$ м/с, $v_в = u = 5$ м/с.

Решение. Вертикальная составляющая скорости капель $v_y = v\cos\alpha$. (рис. 1.20). Горизонтальная составляющая скорости капель при неподвижном трамвае равна скорости ветра $v_x = v\sin\alpha = v_в$. Если трамвай движется, то $v\sin\alpha - u = 0$ или скорость ветра $v_в = u = 5$ м/с. Скорость капель в безветренную погоду $v_y = v_x \operatorname{ctg}\alpha = u\operatorname{ctg}\alpha = 8{,}66$ м/с.

1.32. В безветренную погоду самолет двигался со скоростью 126 км/ч точно на север. Найдите скорость и курс самолета, если подул северо-западный ветер под углом $\varphi = 45°$ к меридиану. Скорость ветра 15 м/с.

Ответ: $v = 26{,}6$ м/с, $\alpha = 23{,}5°$.

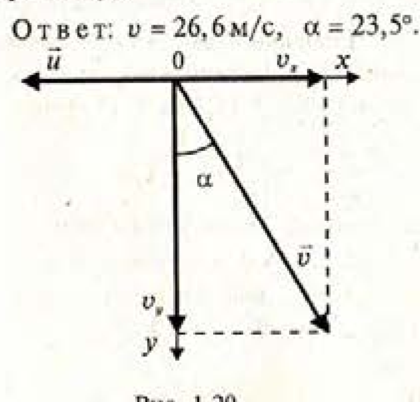


Рис. 1.20

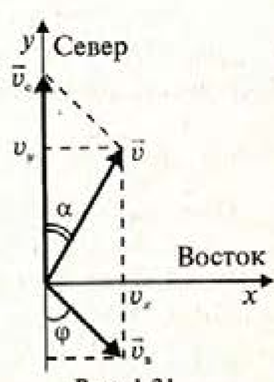


Рис. 1.21

Решение. Скорость самолета относительно земли $\vec{v} = \vec{v}_с + \vec{v}_в$. Из рис. 1.21 видно: $v_x = v_в \sin\varphi$; $v_y = v_с - v_в \cos\varphi$;

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_в^2 \sin^2\varphi + (v_с - v_в \cos\varphi)^2}, \quad v = 26,6 \text{ м/с}.$$

Курс самолета $\sin\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_в \sin\varphi}{v}$; $\alpha = \arcsin\frac{v_в \sin\varphi}{v} = 23,5°$.

1.33. Ширина реки $h = 100$ м. На что потребуется больше времени: проплыть вниз по течению $l = 100$ м и вернуться обратно или переплыть реку туда и обратно перпендикулярно берегам? Скорость пловца в стоячей воде $v_{пл} = 1$ м/с, а скорость течения реки $v_р = 0,5$ м/с.

Ответ: $t_1 > t_2$.

Решение. Скорость пловца относительно берега $\vec{v} = \vec{v}_{пл} + \vec{v}_р$. Время движения по течению $\frac{l}{v_{пл} + v_р}$; против течения $\frac{l}{v_{пл} - v_р}$. Полное время движения туда и обратно

$$t_1 = \frac{l}{v_{пл} + v_р} + \frac{l}{v_{пл} - v_р} = \frac{2lv_{пл}}{v_{пл}^2 - v_р^2} = 4,4 \text{ мин}.$$

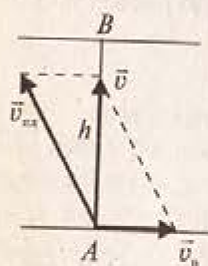


Рис. 1.22

Чтобы пловец попал из A в B, его скорость должна быть направлена под углом к течению реки (рис. 1.22), тогда результирующая скорость $v = \sqrt{v_{пл}^2 - v_р^2}$. Время движения в обоих направлениях $t_2 = \frac{2h}{\sqrt{v_{пл}^2 - v_р^2}} = 3,8$ мин, $t_1 > t_2$.

1.34. На тележке, движущейся горизонтально и равномерно со скоростью $v_1 = 10$ м/с, установлена труба (рис. 1.23). Под каким углом к горизонту нужно наклонить трубу, чтобы капли дождя, падающие отвесно со скоростью $v_2 = 30$ м/с (скорость постоянна), упали на дно трубы, не задев ее стенок?

Ответ: $\alpha = 71°35'$.

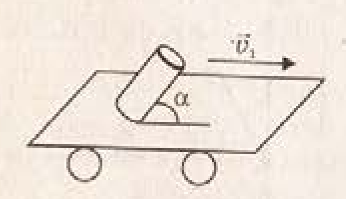


Рис. 1.23

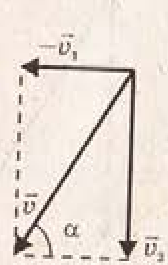


Рис. 1.24

Решение. Вместо движения тележки вправо рассмотрим движение капли влево относительно тележки с той же скоростью (рис. 1.24). Результирующая скорость v должна быть параллельна оси трубы, тогда трубу нужно наклонить под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_2}{v_1} = \operatorname{arctg} 3 = 71°35'$.

1.35. Лодка движется по реке перпендикулярно берегу со скоростью v. Скорость течения реки u. Определите, под каким углом α к берегу движется лодка.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right)$.

Указание. Решить самостоятельно.

1.36. Лодка, двигаясь перпендикулярно берегу, оказалась на другом берегу на расстоянии $S = 25$ м ниже по течению через $t = 1$ мин 40 с. Ширина реки $l = 100$ м. Определите скорость лодки и скорость течения реки.

Ответ: $v_л = 1$ м/с, $v_р = 0,25$ м/с.

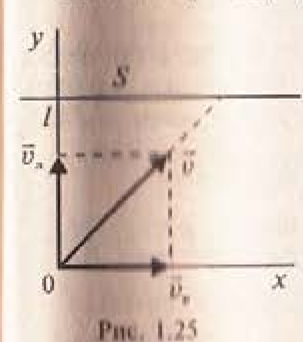


Рис. 1.25

Решение. Скорость лодки относительно берега $\vec{v} = \vec{v}_л + \vec{v}_р$ (рис. 1.25). Тогда $S = v_р \cdot t$, $v_р = 0,25$ м/с; $l = v_л \cdot t$; $v_л = 1$ м/с.

1.37. Лодочник, переправляясь через реку шириной h из пункта A в пункт B, все время направляет лодку под углом α к берегу (рис. 1.26). Найдите скорость лодки v относительно воды, если скорость течения реки равна u, а лодку снесло ниже пункта B на расстояние l.

Ответ: $v = \frac{hu}{l\sin\alpha + h\cos\alpha}$.

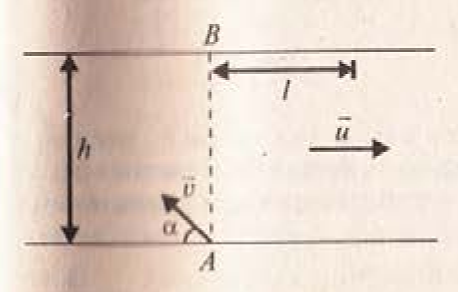


Рис. 1.26

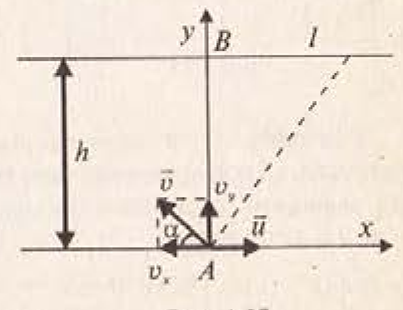


Рис. 1.27

Решение. Начало координат в точке A (рис. 1.27), тогда координаты лодки $x = (u - v\cos\alpha)\cdot t$; $y = v\sin\alpha\cdot t$. Когда лодка достигла берега $x = l$, $y = h$; $l = (u - v\cos\alpha)\cdot t$; $h = v\sin\alpha\cdot t$, откуда

$$v = \frac{hu}{l\sin\alpha + h\cos\alpha}.$$

1.38. Катер пересекает реку. Скорость течения v_1, скорость катера относительно воды v_2. Под каким углом α к берегу должен идти катер, чтобы пересечь реку: 1) за минимальное время; 2) по кратчайшему пути?

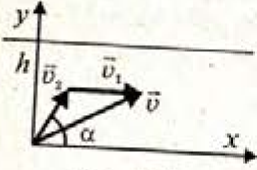


Рис. 1.28

Ответ: 1) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; 2) $\alpha > \frac{\pi}{2}$; $|\cos\alpha| = \frac{v_1}{v_2}$.

Решение. Уравнение движения катера $x = (v_1 + v_2\cos\alpha)t$; $y = v_2\sin\alpha\cdot t$ (рис. 1.28). Когда катер достигнет берега $y = h$. Время будет минимальным, если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{h}{v_2\sin\alpha}$; $t_{\min} = \frac{h}{v_2}$. Кратчайший путь будет, если $x = 0$, т. е. $v_1 + v_2\cos\alpha = 0$; $\cos\alpha = -\frac{v_1}{v_2}$ т. е. $\alpha > \pi/2$.

1.39. Катер движется из пункта A к пункту B (рис. 1.29), держа курс β. Скорость течения реки $u = 2{,}0$ м/с. Определите скорость катера относительно берега и относительно реки, если $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$.

Ответ: $v_б = 3{,}9$ м/с, $v_р = 2{,}8$ м/с.

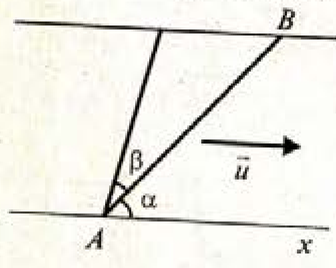


Рис. 1.29

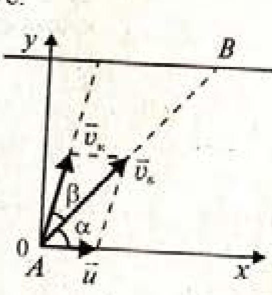


Рис. 1.30

Решение. Обозначим скорость катера относительно реки $v_к$, скорость катера относительно берега $v_б$ (рис. 1.30.), тогда по закону сложения скоростей $\vec{v}_б = \vec{v}_к + \vec{u}$; проецируя это уравнение на оси x и y, получаем

$$\begin{cases} v_б\cos\alpha = u + v_к\cos(\alpha+\beta); \\ v_б\sin\alpha = v_к\sin(\alpha+\beta); \end{cases}$$

$$v_к = v_б\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)};$$

$$v_б = \frac{u\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos(\alpha+\beta)} = \frac{u\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta};$$

$$v_б = \frac{u\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = 3{,}9\ \text{м/с}; \quad v_к = \frac{u\sin\alpha}{\sin\beta} = 2{,}8\ \text{м/с}.$$

1.40. В море движутся два корабля со скоростями v_1 и v_2 под углом α друг к другу. Найдите скорость второго корабля относительно первого.

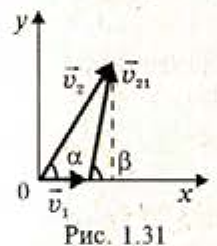


Рис. 1.31

Ответ: $v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}$;

$$\cos\beta = \frac{v_2\cos\alpha - v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}}.$$

Решение. Скорость второго корабля относительно первого равна $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Проекции этой скорости на оси x и y равны (рис. 1.31) $v_{21x} = v_2\cos\alpha - v_1$; $v_{21y} = v_2\sin\alpha$. Модуль вектора

$$|\vec{v}_{21}| = \sqrt{v_{21x}^2 + v_{21y}^2} = \sqrt{(v_2\cos\alpha - v_1)^2 + (v_2\sin\alpha)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}.$$

Направление вектора v_{21} определяется углом β.

$$\cos\beta = \frac{v_{21x}}{|\vec{v}_{21}|} = \frac{v_2\cos\alpha - v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}}.$$

1.41. Груз подвешен с помощью двух блоков (рис. 1.32). С какой скоростью движется груз, если веревку тянуть со скоростью v_0?

Ответ: $v = v_0/2$.

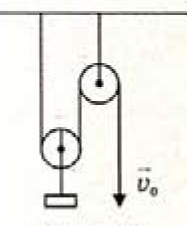


Рис. 1.32

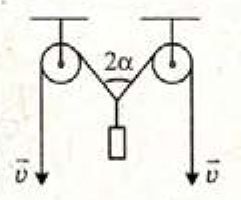


Рис. 1.33

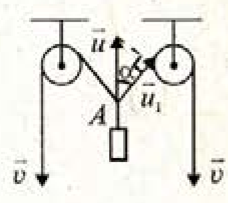


Рис. 1.34

Решение. Если веревку вытянуть на расстояние l, то груз, подвешенный к подвижному блоку, поднимется на $l/2$, т. е. при равномерном движении скорость его будет равна $v_0/2$.

1.42. Рабочие, поднимающие груз (рис. 1.33), тянут канаты с одинаковой скоростью v. Какую скорость u имеет груз в тот мо-

мент, когда угол между канатами, к которым он прикреплен, равен 2α?

Ответ: $u = \dfrac{v}{\cos\alpha}$.

Решение. Канат AB нерастяжим, поэтому проекция скорости $\vec{u}$ на направление каната должна быть равна скорости каната (рис. 1.34) $u_1 = u\cos\alpha = v$, откуда скорость подъема груза $u = \dfrac{v}{\cos\alpha}$.

1.43. Танк движется со скоростью 72 км/ч. С какой скоростью движется относительно земли: 1) нижняя часть гусеницы; 2) верхняя часть гусеницы; 3) точка гусеницы, которая в данный момент движется вертикально по отношению к танку?

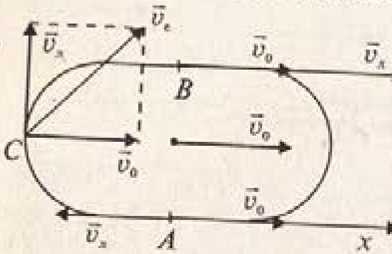


Рис. 1.35

Ответ: 1) 0; 2) 40 м/с; 3) $20\sqrt{2}$ м/с.

Решение. Скорость в точке A в системе отсчета, связанной с землей, равна нулю (рис. 1.35). $\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_л$; $v_A = v_0 - v_л = 0$. $v_л = v_0 = 20$ м/с, где $\vec{v}_0$ скорость движения танка, $\vec{v}_л$ — линейная скорость вращательного движения точки на гусенице. Скорость точки B $\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{v}_л$; $v_B = v_л + v_0 = 40$ м/с.

Скорость точки C $\vec{v}_C = \vec{v}_0 + \vec{v}_л$; $v_C = \sqrt{v_л^2 + v_0^2} = 20\sqrt{2}$ м/с.

1.44. Стержень шарнирно соединен с муфтами A и B, которые перемещаются по двум взаимно перпендикулярным рейкам (рис. 1.36). Муфта A движется с постоянной скоростью v_A. Найдите скорость муфты B как функцию угла α.

Ответ: $v_B = v_A \operatorname{tg}\alpha$.

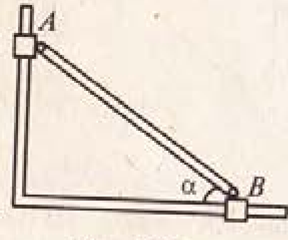


Рис. 1.36

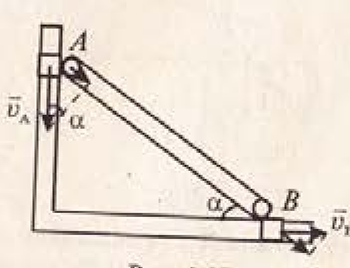


Рис. 1.37

Решение. Так как стержень нерастяжим, то проекции скоростей v_A и v_B концов стержня на ось стержня должны быть равны между собой (рис. 1.37) $v_A \sin\alpha = v_B \cos\alpha$, откуда $v_B = v_A \operatorname{tg}\alpha$.

1.45. К ползуну, который может перемещаться по направляющей рейке (рис. 1.38), прикреплен шнур, продетый через кольцо. Шнур выбирают со скоростью v. С какой скоростью u движется ползун в момент, когда шнур составляет с направляющей угол α?

Ответ: $v_1 = v/\cos\alpha$.

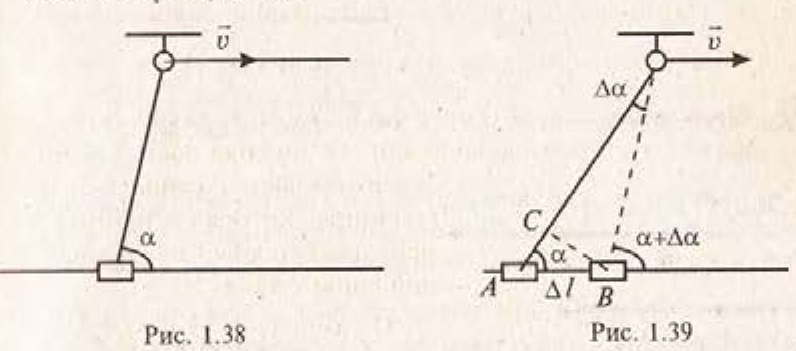


Рис. 1.38 Рис. 1.39

Решение. За один и тот же малый промежуток времени Δt ползун перемещается на $AB = \Delta l$, а шнур выбирают на длину $AC = \Delta l\cos\alpha$ (рис. 1.39) (угол $\Delta\alpha$ мал, поэтому $\angle BCA$ можно считать прямым). Тогда

$$\frac{\Delta l}{u} = \frac{\Delta l\cos\alpha}{v}, \text{ следовательно } u = \frac{v}{\cos\alpha}.$$

2. РАВНОПЕРЕМЕННОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

2.1. Охарактеризуйте движение тел, графики скоростей которых представлены на рис. 2.1.

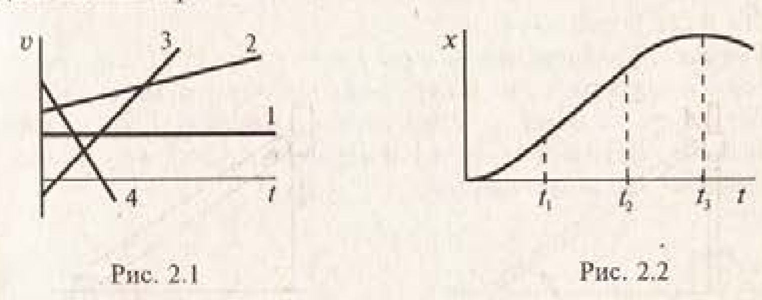


Рис. 2.1 Рис. 2.2

Решение. 1) Равномерное; 2), 3) равноускоренное; 4) равнозамедленное.

2.2. По графику зависимости координаты тела от времени (рис. 2.2) построить графики зависимости ускорения, скорости и пути, пройденного телом, от времени.

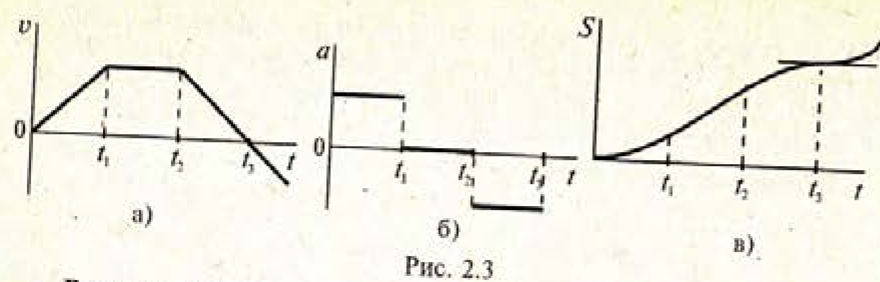


Рис. 2.3

Решение приведено на рис. 2.3в. В момент времени t_3 — точка перегиба.

2.3. График зависимости скорости тела от времени дан на рис. 2.4. Начальная координата $x_0 = 0$. Постройте графики зависимости ускорения, координаты и пути, пройденного телом, от времени.

Решение. На рис. 2.5б в интервале $0—t_3$ — три отрезка парабол. В точке t_3 для $S(t)$ — точка перегиба; зависимость $a(t)$ — рис. 2.5а.

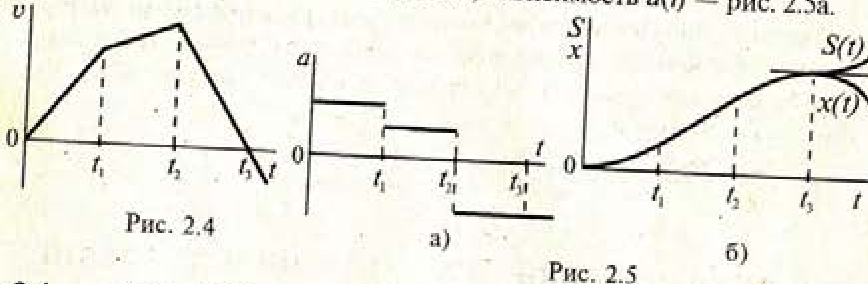


Рис. 2.4

Рис. 2.5

2.4. На рис. 2.6а дан график зависимости скорости материальной точки от времени. Постройте графики зависимости ускорения, перемещения и пройденного пути этой материальной точки от времени.

Решение. Графики приведены на рис. 2.6 (б, в). От $t = 0$ до t_4 зависимость координаты и перемещения от времени совпадают, в интервале от $t = 0$ до t_2 — два отрезка парабол, $t_2—t_3$ — отрезок прямой, от t_3 и дальше — отрезки парабол. Кривая $S(t)$ в моменты t_4 и t_6 имеет точки перегиба.

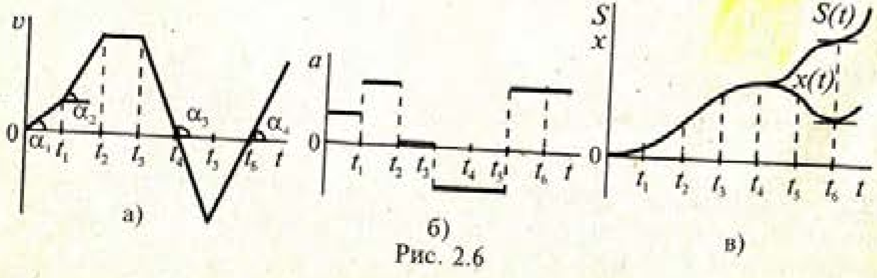


Рис. 2.6

2.5. Графики скоростей точки представлены на рис. 2.7. Постройте графики перемещения, путей и ускорений точки, если в начальный момент времени она находится в начале координат.

Решение самостоятельное.

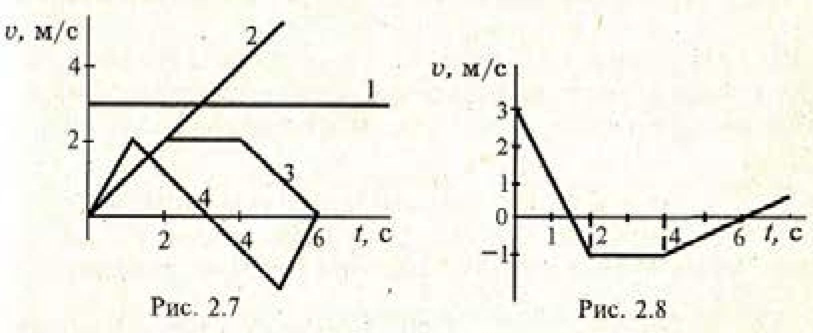


Рис. 2.7

Рис. 2.8

2.6. Дан график зависимости скорости тела от времени (рис. 2.8). Постройте графики зависимости пути и координаты от времени. Определите среднюю скорость за первые 2,0 и 5,0 с. Начальная координата $x_0 = 0$.

Ответ: $v_2 = 1$ м/с; $v_5 = -0{,}15$ м/с.

а) б)

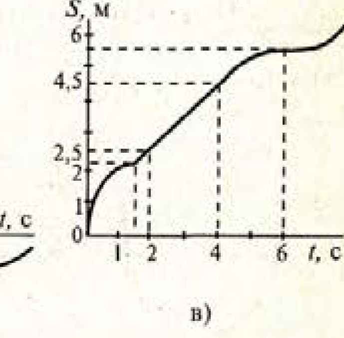


Рис. 2.9

Решение. Рис. 2.9а:

$$a_1 = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t_1} = \frac{-1-3}{2} = -2{,}0\,\text{м/с}^2;\;\; 0 < t < 2\,\text{с};$$

$$a_2 = 0;\;\; 2\,\text{с} < t < 4\,\text{с};$$

$$a_3 = \frac{0-(-1)}{2} = 0{,}5\,\text{м/с}^2;\;\; 4\,\text{с} < t < 6\,\text{с};$$

Рис. 2.9б: $x(t)$ — парабола; $0 < t < 1{,}5\,\text{с}$; $x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$;

$$x(1{,}5\,\text{с}) = 3\cdot 1{,}5 - \frac{2\cdot 1{,}5^2}{2} = 2{,}25\,\text{м};$$

при $t = 1{,}5\,с$ — вершина параболы, $v(1{,}5\,с) = 0$;
$1{,}5\,с < t < 2\,с$ — участок параболы; $x(2\,с) = 2\,м$;
$2\,с < t < 4\,с$ — отрезок прямой (равномерное движение);
$t = 4\,с$, $x(4\,с) = 0$;
$4\,с < t < 6\,с$ — часть параболы, $x(6\,с) = -1\,м$ — вершина параболы).

Рис. 2.9в: Точки $t = 1{,}5\,с$ и $t = 6\,с$ — точки перегиба кривой $S(t)$. Средняя скорость находится как алгебраическая сумма площадей под кривой скорости, деленная на интервал времени.

За 2 с: $v_2 = \left(\frac{3 \cdot 1{,}5}{2} - \frac{(2 - 1{,}5) \cdot 1}{2}\right) м \cdot \frac{1}{2\,с} = 1\,м/с$;

За 5 с: $v_5 = \left(\frac{3 \cdot 1{,}5}{2} - \frac{0{,}5 \cdot 1}{2} - 2 \cdot 1 - \frac{(1 + 0{,}5) \cdot 1}{2}\right) м \cdot \frac{1}{5\,с} = -0{,}15\,м/с$.

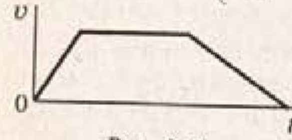


Рис. 2.10

2.7. По заданному графику скорости (рис. 2.10) постройте графики ускорения и пути.

Решение самостоятельное.

2.8. По графику перемещения, изображенному на рис. 2.11а, постройте графики скорости, ускорения и пути (два участка парабол).

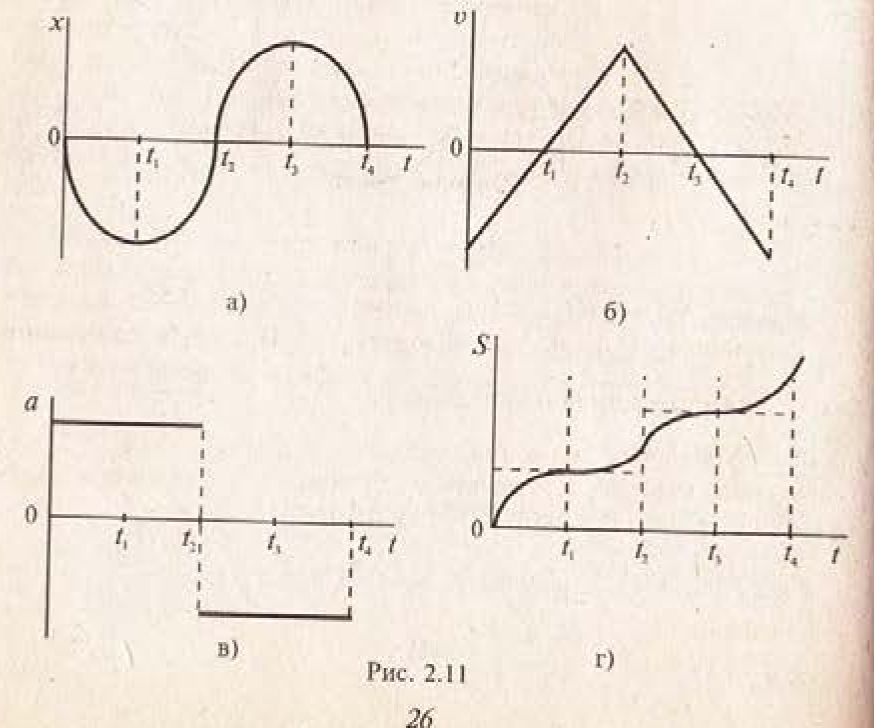


Рис. 2.11

Решение. Графики приведены на рис. 2.11б, 2.11в, 2.11г. Движение равнозамедленное, если знаки у скорости и ускорения разные; если они одинаковые, то движение равноускоренное.

2.9 По графику ускорения, приведенному на рис. 2.12а, постройте графики скорости, перемещения и пути при начальных условиях: $v_0 = 0$; $x_0 = 0$. Как изменятся эти графики, если начальные условия станут следующими:

1) $x(0) = x_0$; $v_0 = 0$; 2) $x_0 = 0$; $v(0) = v_0$; 3) $x_0 = 0$; $v(0) = -v_0$?

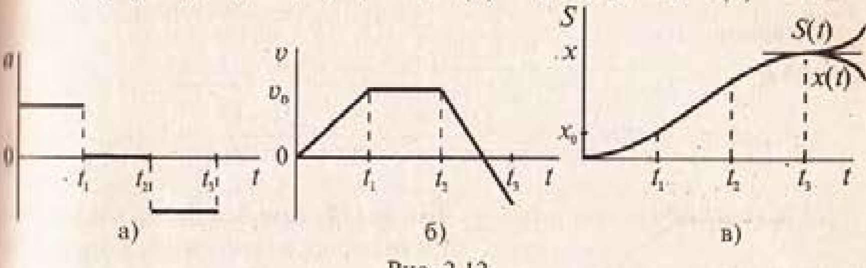


Рис. 2.12

Решение. Графики $v(t)$, $x(t)$ и $S(t)$ показаны на рис. 2.12б, 2.12в. Пункты 1), 2), 3) выполните самостоятельно.

2.10. Тело движется по прямой с ускорением $a = 0{,}5\,м/с^2$. Начальная скорость тела $v_0 = -5{,}0\,м/с$, начальная координата $x_0 = 2{,}0\,м$. Запишите уравнение движения тела, зависимость скорости от времени. Определите время движения тела до остановки и путь, пройденный телом до остановки.

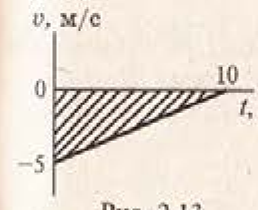


Рис. 2.13

Ответ: $t = 10\,с$; $S = 25\,м$.

Решение. Уравнение движения

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$x(t) = 2 - 5t + 0{,}25t^2$; $v(t) = v_0 + at$; $v(t) = -5 + 0{,}5t$;

Остановка $v(t_1) = 0$; $-5 + 0{,}5t_1 = 0$; $t_1 = 10\,с$. Путь до остановки — заштрихованная площадь на рис. 2.13: $S = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25\,м$.

2.11. Уравнение движения тела вдоль оси x: $x = 2 + 3t - t^2$, где x измеряется в метрах, t — в секундах. В момент $t = 3\,с$ найдите: а) положение тела, б) его скорость и в) ускорение.

Ответ: $x = 2\,м$; $v = -3\,м/с$; $a = -2\,м/с^2$.

Решение. $x = 2 + 3t - t^2$; $v = \frac{dx}{dt} = 3 - 2t$; $a = \frac{dv}{dt} = -2\,м/с^2$.

При $t = 3\,с$ а) $x = 2 + 9 - 9 = 2\,м$;

б) $\upsilon = 3 - 6 = -3$ м/с;

в) $a = -2$ м/с^2.

2.12. Частица движется вдоль оси x по закону $x = 3t^2 - 2t + 3$. Определите: а) среднюю скорость $2\text{с} < t < 3\text{с}$; б) мгновенную скорость при $t_1 = 2$ с и $t_2 = 3$ с; в) среднее ускорение в интервале $2\text{с} < t < 3\text{с}$; г) мгновенное ускорение при $t_1 = 2$с и $t_2 = 3$с.

Решение. При $t_1 = 2$с, $x_1 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 11$м, при $t_2 = 3$с, $x_2 = 24$ м.

а) Средняя скорость $\upsilon_{cp} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{24 - 11}{3 - 2} = 13$ м/с;

б) Мгновенная скорость $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = 6t - 2$; при $t_1 = 2$с, $\upsilon_1 = 10$ м/с; при $t_2 = 3$с, $\upsilon_2 = 16$ м/с.

в) Среднее ускорение $a_{cp} = \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \dfrac{16 - 10}{3 - 2} = 6$ м/с^2.

г) Мгновенное ускорение $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 6$ м/с^2 — постоянная величина и при $t_1 = 2$с, и при $t_2 = 3$с.

2.13. Прямолинейное движение точки описывается уравнением $x = 1 + 3t - 2t^2$ (x выражено в м, t — в с). Где находилась точка в начальный момент времени? Как меняется скорость со временем? Когда точка окажется в начале координат?

Ответ: $t_1 = 0{,}5$с, $t_2 = 1$с.

Решение. $x(t) = 1 + 3t - 2t^2$; $t = 0$, $x_0 = 1$м; $\upsilon(t) = \dfrac{dx}{dt} = 3 - 4t$;

$x = 0$, $1 + 3t - 2t^2 = 0$. $t_1 = 0{,}5$с, $t_2 = 1$с — в эти моменты точка находится в начале координат.

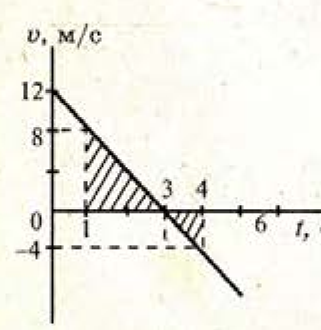


Рис. 2.14

2.14. Движение точки задано уравнением $x = 12t - 2t^2$ (x выражено в м, t — в с). Определите среднюю скорость и среднюю путевую скорость движения точки в интервале времени от $t_1 = 1{,}0$с до $t_2 = 4{,}0$с.

Ответ: $\upsilon_{cp} = 2$ м/с, $\upsilon_{Scp} = 3{,}3$ м/с.

Решение. $x = 12t - 2t^2$;

$\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = 12 - 4t$ (рис. 2.14).

$t_0 = 0$; $\upsilon(0) = 12$ м/с; $\upsilon(t') = 0$; $12 - 4t' = 0$; $t' = 3$с;

$\upsilon(t_1) = 12 - 4 \cdot 1 = 8$ м/с; $\upsilon(t_2) = 12 - 4 \cdot 4 = -4$ м/с;

Средняя скорость $\upsilon_{cp} = \left(\dfrac{8 \cdot (3-1)}{2} - \dfrac{4 \cdot (4-3)}{2}\right)\dfrac{1}{(4-1)} = 2$ м/с;

Средняя путевая скорость $\upsilon_{Scp} = \dfrac{S}{t}$;

$\upsilon_{Scp} = \left(\dfrac{8 \cdot (3-1)}{2} + \dfrac{4 \cdot (4-3)}{2}\right)\dfrac{1}{(4-1)} = 3{,}3$ м/с.

2.15. Тело движется вдоль оси x по закону $x = 6 - 3t + 2t^2$. Найдите среднюю путевую скорость тела, ускорение и путь за первые три секунды движения. Постройте графики скорости, ускорения, перемещения и пути в зависимости от времени.

Решение. По определению $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = -3 + 4t$, тогда при $t_1 = 0$ $\upsilon_1 = -3$м/с, при $t_2 = 3$ с $\upsilon_2 = 9$м/с. $\upsilon = 0$, когда $t = 0{,}75$ с.

Учитывая, что средняя путевая скорость $\upsilon_{Scp} = \dfrac{S}{t_1}$, по графику скорости, изображенному на рис. 2.15а, найдем путь тела за 3 с (заштрихованная площадь на рисунке) $S = \dfrac{|3 \cdot 0{,}75|}{2} + \dfrac{|9 \cdot 2{,}25|}{2} = 11{,}25$м.

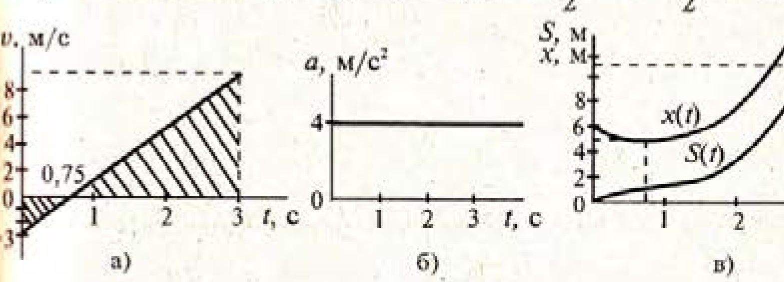


Рис. 2.15

Средняя путевая скорость за 3 с $\upsilon_{Scp} = \dfrac{11{,}25}{3} = 3{,}75$м/с.

Ускорение тела: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 4$ м/с^2 $=$ *const* (см. рис. 2.15б).

График перемещения — парабола (см. рис. 2.15в), где при $t = 0$ $x_0 = 6$ м — начальная координата тела, вершина параболы находится в точке $t = 0{,}75$ с ($\upsilon = 0$), $x(t = 0{,}75\text{с}) = 6 - 3 \cdot 0{,}75 + 2 \cdot 0{,}75^2 = 4{,}9$ м.

В момент времени $t_2 = 3$ с, $x(t_2 = 3\text{с}) = 6 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = 15$ м.

Следует учитывать, что путь — это всегда положительная величина, которая не может уменьшаться, поэтому, чтобы получить $S(t)$, на графике $x(t)$ следует часть параболы за время от 0 до 0,75 с перевернуть выпуклостью вверх, а оставшуюся часть параболы ($t > 0{,}75$ с) перенести параллельно самой себе и присоединить к графику $S(t)$.

2.16. Точка движется по закону $x = 2 - 12t + 2t^2$ (x выражено в м, t — в с). Постройте графики зависимостей координаты, пути, скорости и ускорения точки от времени.

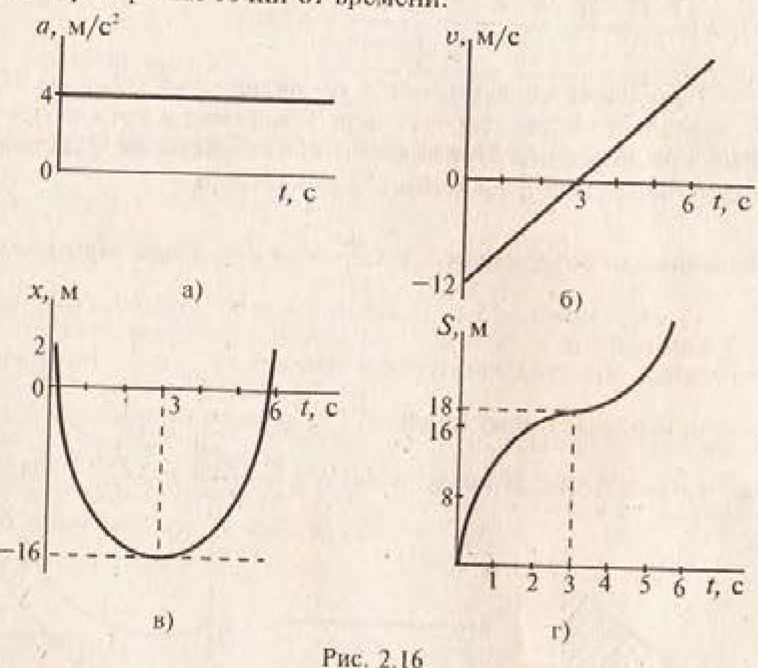


Рис. 2.16

Решение. Графики показаны на рис. 2.16. $x = 2 - 12t + 2t^2$;

$\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = -12 + 4t$; $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 4\,\text{м/с}^2$; $\upsilon = -12 + 4t$; $\upsilon(0) = -12$ м/с;

$\upsilon(t_1) = 0$; $-12 + 4t_1 = 0$; $t_1 = 3$ с;

В точке $t_1 = 3$с при $\upsilon = 0$ — вершина параболы (рис. 2.16в)

$x(t_1) = 2 - 12 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = -16$ м; $x = 0{,}2t^2 - 12t + 2 = 0$;

$t_2 = 0{,}2$ с; $t_3 = 5{,}8$ с.

2.17. Траектория движения тела показана на рис. 2.17. Уравнение движения тела вдоль оси y записывается в следующем виде:

$y = \dfrac{a_y t^2}{2}$, где $a_y = 2{,}0\,\text{м/с}^2$. Угол $\alpha = 30°$. Определите ускорение тела. Какую скорость имеет тело через $t = 5{,}0$ с после начала движения, каковы его координаты в этот момент времени?

Ответ: $a = 4\,\text{м/с}^2$, $\upsilon = 20$ м/с, $x = 43$ м, $y = 25$ м.

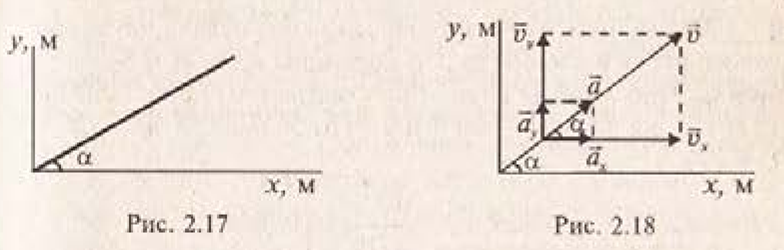


Рис. 2.17 Рис. 2.18

Решение. $a_y = 2{,}0\,\text{м/с}^2$; $a_x = a_y \cdot \text{ctg}\,\alpha = 2 \cdot \text{ctg}\,30° = 3{,}46\,\text{м/с}^2$;

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; $a = \sqrt{3{,}46^2 + 2^2} = 4\,\text{м/с}^2$ (рис. 2.18);

$\upsilon_x = a_x t$; $\upsilon_y = a_y t$; $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$; $\upsilon = t\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; $\upsilon = 20$ м/с;

или $\upsilon = at$; $\upsilon = 4 \cdot 5 = 20$ м/с.

$x = \dfrac{a_x t^2}{2}$; $x = \dfrac{3{,}46 \cdot 5^2}{2} \approx 43$ м; $y = \dfrac{a_y t^2}{2}$; $y = \dfrac{2 \cdot 5^2}{2} = 25$ м.

2.18. Жюль Верн предложил запустить капсулу с человеком на Луну, выстрелив ее из пушки, длина ствола которой $l = 220$ м. При этом капсула приобретает скорость $\upsilon = 10{,}97$ км/с. Каково ускорение капсулы во время движения? Сравните полученную величину с ускорением свободного падения.

Ответ: $a = 2{,}74 \cdot 10^5\,\text{м/с}^2$.

Решение. Из формулы $l = \dfrac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}$ получаем $a = \left(\upsilon^2 - \upsilon_0^2\right)/2l$;

$\upsilon_0 = 0$, тогда $a = 2{,}74 \cdot 10^5\,\text{м/с}^2$, что в $2{,}79 \cdot 10^4$ раз больше ускорения свободного падения ($g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$), что является нереальным.

2.19. Точка проходит путь 1 м, имея начальную скорость 1 мм/с и конечную — 2 мм/с. Может ли ее среднее ускорение равняться 10 км/с²?

Решение. Среднее ускорение равно $a_{\text{ср}} = \dfrac{\upsilon - \upsilon_0}{t}$, поэтому требование задачи можно удовлетворить при $t = \dfrac{2 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-3}}{10^4} = 10^{-7}$ с,

тогда средняя скорость точки будет равна $v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{1}{10^{-7}} = 10^7$ м/с = $= 10^4$ км/с.

Здесь учтено, что рассматриваемое движение не должно быть обязательно равноускоренным.

2.20. Автомобиль начинает движение без начальной скорости и проходит первый километр с ускорением a_1, а второй — с ускорением a_2. При этом на первом километре его скорость возрастает на 10 м/с, а на втором — на 5 м/с. Что больше: a_1 или a_2?

Ответ: $a_2 > a_1$.

Решение. $v^2 - v_0^2 = 2aS$; $a_1 = \frac{10^2 - 0}{2 \cdot 10^3} = 0{,}05\,\text{м/с}^2$;

$a_2 = \frac{(10+5)^2 - 10^2}{2 \cdot 10^3} = 0{,}0625\,\text{м/с}^2$; $a_2 > a_1$.

2.21. Автомобиль начал двигаться с ускорением $a = 1{,}5$ м/с² и через некоторое время оказался на расстоянии $S = 12$ м от начальной точки. Определите скорость автомобиля в этот момент времени. Чему равна средняя скорость?

Ответ: $v = 6{,}0$ м/с; $v_{ср} = 3$ м/с.

Решение. $S = \frac{at^2}{2}$; $t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12}{1{,}5}} = 4$ с; $v = at = 1{,}5 \cdot 4 = 6$ м/с;

$v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{12}{4} = 3$ м/с.

2.22. По одному направлению из одной точки одновременно начали двигаться два тела: одно — равномерно со скоростью $v = 980$ см/с, а другое — равноускоренно без начальной скорости с ускорением $a = 9{,}8$ см/с². Через какое время второе тело догонит первое?

Ответ: $\tau = 200$ с.

Решение. $S_1 = S_2$; $v \cdot \tau = \frac{a\tau^2}{2}$; $\tau = \frac{2v}{a} = \frac{2 \cdot 0{,}980}{0{,}098} = 200$ с.

2.23. Автомобиль прошел путь $S = 60$ км за время $t = 52$ мин. Сначала он шел с ускорением $+a$ в конце — с ускорением $-a$, а остальное время с максимальной скоростью $v_{max} = 72$ км/ч. Найдите модуль ускорения, если начальная и конечная скорости равны нулю.

Ответ: $a = 0{,}17$ м/с².

Решение. $t_1 = t_3$; $t_2 = t - 2t_1$; $S = \frac{v_{max}}{2} 2t_1 + v_{max}(t - 2t_1)$;

$t_1 = \frac{v_{max} t - S}{v_{max}}$, $v_{max} = at_1$; $a = \frac{v_{max}}{t_1} = \frac{v_{max}^2}{v_{max} t - S}$.

2.24. Тележка трогается с места и с ускорением 1 м/с² проходит расстояние 12,5 м; затем она движется равномерно в течение 15 с; потом до остановки равнозамедленно проходит 20 м. Найдите скорость и путь равномерного движения, время и ускорение замедленного движения. Постройте график скорости тела.

Решение. Разобьем путь тележки на участки равноускоренного, равномерного и равнозамедленного движения. Начальная скорость на первом участке и конечная на третьем равны нулю. Конечная скорость на первом участке равняется скорости движения на втором участке и начальной скорости на третьем. Используя эти данные, получаем:

$v_2^2 = 2a_1 l_1$; $v_2 = \sqrt{2a_1 l_1} = 5$ м/с. $l_2 = v_2 t_2 = \sqrt{2a_1 l_1} \cdot t_2 = 75$ м.

$0 - v_2^2 = 2a_3 l_3$; $a_3 = -v_2^2/2l_3 = -0{,}625$ м/с². $t_3 = (0 - v_2)/a_3 = 8$ с.

Время ускоренного движения: $t_1 = v_2/a_1 = \sqrt{2a_1 l_1}/a_1 = 5$ с.

График скорости тела представлен на рисунке 2.19.

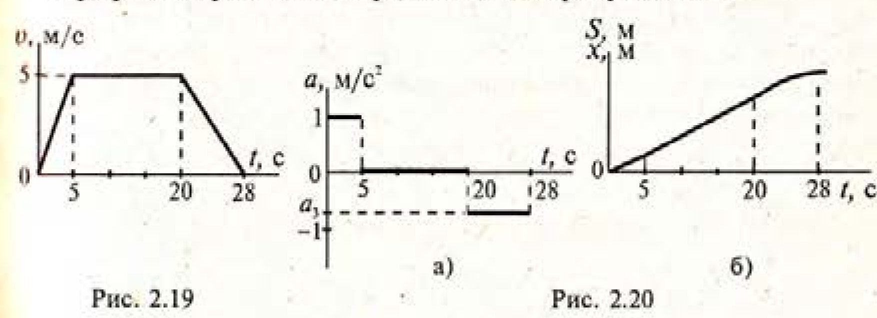


Рис. 2.19

Рис. 2.20

Ускорение тележки на первом участке $a_1 = 1$ м/с, на втором $a_2 = 0$, на третьем $a_3 = -5/8 = -0{,}625$ м/с.

Качественные графики перемещения и пути приведены на рисунке 2.20а, 2.20б.

На участке $t = 0$—5 с график перемещения — парабола, на участке $t = 5$—20 с зависимость $x(t)$ оказывается прямопропорциональной, в интервале $t = 20$—28 с парабола — движение равнозамедленное.

В этой задаче графики перемещения и пути совпадают.

2.25. Расстояние между двумя станциями $S = 3$ км поезд метро проходит со средней скоростью $v_{ср} = 54$ км/ч. При этом на разгон он затрачивает время $t_1 = 20$ с, затем идет равномерно некоторое время t_2 и на замедление до полной остановки тратит $t_3 = 10$ с.

Постройте график скорости движения поезда и определите наибольшую скорость поезда.

Ответ: $v_{max} = 16{,}2$ м/с (см. рис. 2.21).

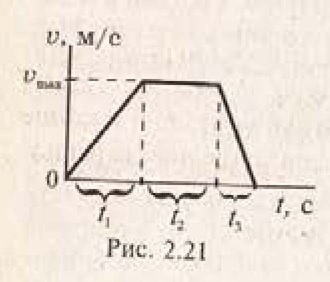


Рис. 2.21

Решение. $t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{S}{v_{ср}}$;

На участке t_1 $v_{ср} = \frac{v_{max}}{2}$;

На участке t_3 $v_{ср} = \frac{v_{max}}{2}$;

$$\frac{v_{max}}{2}t_1 + v_{max}\left(\frac{S}{v_{ср}} - (t_1 + t_3)\right) + \frac{v_{max}}{2}t_3 = S;$$

$$v_{max} = \frac{2Sv_{ср}}{2S - v_{ср}(t_1 + t_3)} = 16{,}2\text{ м/с}.$$

2.26. Расстояние между двумя станциями $S_1 = 1$ км. При таком малом расстоянии электропоезд не может развить свою максимальную скорость. Если минимизировать время прохождения поезда между этими станциями, то получается ускорение $a_1 = 0{,}1$ м/с^2 при разгоне за время t_1 и ускорение $a_2 = -0{,}5$ м/с при торможении за время t_2. Определите минимальное время в пути t и время разгона t_1.

Ответ: $t = 155$ с; $t_1 = 129$ с.

Решение. Весь путь $S = S_{разгона} + S_{торможения}$

$$S = \frac{a_1t_1^2}{2} + v_1t_2 + \frac{a_2t_2^2}{2};\ t = t_1 + t_2;\ v_1 = a_1t_1 = -a_2t_2;\ t_2 = -\frac{a_1t_1}{a_2};$$

$$S = \frac{a_1t_1^2}{2} + a_1t_1\left(-\frac{a_1t_1}{a_2}\right) + \frac{1}{2}a_2\left(\frac{a_1t_1}{a_2}\right)^2;$$

$$S = \frac{a_1t_1^2}{2}\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right);\ t_1 = \sqrt{\frac{2S}{a_1\left(1 + \frac{a_1}{|a_2|}\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^3}{0{,}1\cdot 1{,}2}} = 129\text{ с}.$$

$$t_2 = -\frac{a_1t_1}{a_2} = \frac{a_1t_1}{|a_2|} = \frac{0{,}1\cdot 129}{0{,}5} = 26\text{ с};$$

$$t = t_1 + t_2 = 155\text{ с}.$$

2.27. В момент, когда тронулся поезд, провожающий начал равномерно бежать по ходу поезда со скоростью 3,5 м/с. Принимая движение поезда равноускоренным, определите скорость поезда в тот момент, когда пассажир поезда и провожающий поравняются.

Ответ: $v = 7$ м/с.

Решение. $v_1 = 3{,}5$ м/с; v_2 — скорость поезда в момент, когда провожающий поровнялся с поездом, тогда

$$v_1t = \frac{v_2}{2}t;\ v_2 = 2v_1;\ v_2 = 7\text{ м/с}.$$

2.28. Мимо наблюдателя, стоящего на перроне, первый вагон движущегося поезда прошел за 1 с, а второй — за 1,5 с. Длина каждого вагона 12 м. Найдите скорость поезда в начале и в конце наблюдения, а также его ускорение, считая движение поезда равноускоренным.

Ответ: $v_0 = 13{,}6$ м/с; $v = 5{,}6$ м/с; $a = -3{,}2$ м/с^2.

Решение. $t_1 = 1$ с; $t_2 = 1{,}5$ с; $l = 12$ м.

$$\begin{cases} l = v_0t_1 + \frac{at_1^2}{2}; \quad \text{откуда} \quad v_0 = \frac{2l - at_1^2}{2t_1} \\ 2l = v_0(t_1 + t_2) + \frac{a(t_1 + t_2)^2}{2}; \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим

$$a = -3{,}2\text{ м/с}^2;\quad v_0 = 13{,}6\text{ м/с};\quad v = 5{,}6\text{ м/с}.$$

2.29. Автомобиль, двигаясь равноускоренно, через $t = 10$ с после начала движения достиг скорости $v = 36$ км/ч. Определите ускорение, с которым двигался автомобиль. Какой путь при этом он прошел? Какой путь автомобиль прошел за последнюю секунду?

Ответ: $a = 1$ м/с^2; $S_1 = 50$ м; $S_2 = 9{,}5$ м.

Решение. $v = 36$ км/ч $= 10$ м/с; $v = at$; $a = v/t = 1$ м/с^2;

$$S_1 = \frac{at^2}{2} = 50\text{ м};\ S_2 = \frac{at_{10}^2}{2} - \frac{at_9^2}{2} = \frac{1\cdot 10^2}{2} - \frac{1\cdot 9^2}{2} = 9{,}5\text{ м}.$$

2.30. Как относятся расстояния, проходимые телом при равноускоренном движении за последовательные, равные промежутки времени?

Ответ: $S_1 : S_2 : S_3 : \ldots = 1 : 3 : 5 : \ldots$.

Решение. Выберем промежутки времени равные $t = 1$ с, тогда путь, пройденный телом за 1 с, $S_1 = \Delta S_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{a\cdot 1^2}{2}$; путь, пройденный за две секунды — $S_2 = \frac{at_2}{2} = \frac{a\cdot 2^2}{2} = \frac{4a}{2}$; путь, пройденный телом за вторую секунду, $\Delta S_2 = S_2 - S_1$, $\Delta S_2 = \frac{4a}{2} - \frac{1a}{2} = \frac{3}{2}a$; путь,

пройденный телом за третью секунду, $\Delta S_3 = S_3 - S_2$;

$$\Delta S_3 = \frac{a \cdot 3^2}{2} - \frac{a \cdot 2^2}{2} = \frac{5}{2}a,$$ и т. д., то есть

$$\Delta S_1 : \Delta S_2 : \Delta S_3 : ... : \Delta S_{n-1} : \Delta S_n = 1 : 3 : 5 : ... : (2n-1) : (2n+1).$$

Расстояния, проходимые телом за равные последовательные промежутки времени, относятся как последовательный ряд нечетных чисел.

2.31. Тело, двигаясь без начальной скорости, прошло за первую секунду 1,0 м, за вторую — 2,0 м, за третью — 3,0 м, за четвертую — 4,0 м и т. д. Можно ли считать такое движение равноускоренным?

Решение. См. задачу 2.30. Движение не является равноускоренным.

2.32. С каким ускорением движется тело, если за восьмую секунду после начала движения оно прошло путь $S = 30$ м? Найдите путь за 15-ю секунду.

Ответ: $a = 4{,}0\,\text{м/с}^2$, $S_{15} = 58$ м.

Решение.

$$\Delta S_8 = 30\,\text{м};\ \Delta S_8 = S_8 - S_7 = \frac{at_8^2}{2} - \frac{at_7^2}{2} = \frac{a \cdot 8^2}{2} - \frac{a \cdot 7^2}{2} = 7{,}5a;$$

$$a = \frac{30}{7{,}5} = 4\,\text{м/с}^2;\ \Delta S_{15} = S_{15} - S_{14} = \frac{4 \cdot 15^2}{2} - \frac{4 \cdot 14^2}{2} = 58\,\text{м}.$$

2.33. Тело, имея начальную скорость 4 м/с, прошло за шестую секунду движения путь 2,9 м. Найдите ускорение тела.

Решение. Путь, пройденный телом за шестую секунду движения:

$$\Delta S_6 = S_6 - S_5 = \left(v_0 t_6 + at_6^2/2\right) - \left(v_0 t_5 + at_5^2/2\right),$$ откуда

$a = 2\left(v_0 \cdot 1\text{с} - \Delta S\right)/\left(t_5^2 - t_6^2\right) = -0{,}2\,\text{м/с}^2$. Тело двигалось с замедлением, т. к. ускорение отрицательно.

2.34. Два автомобиля отправляются из одного пункта в одном направлении. Второй автомобиль отправляется на $\tau = 20$с позже первого. Оба движутся равноускоренно с одинаковым ускорением $a = 0{,}40\,\text{м/с}^2$. Через сколько времени, считая от начала движения первого автомобиля, расстояние между ними окажется $S = 240$ м?

Ответ: $t = 40$ с.

Решение. $S_1 = \dfrac{at^2}{2}$; $S_2 = \dfrac{a(t-\tau)^2}{2}$; $S = S_1 - S_2$;

$$S = \frac{at^2}{2} - \frac{a(t-\tau)^2}{2};\quad t = \frac{S}{a\tau} + \frac{\tau}{2} = 40\,\text{с}.$$

2.35. Два велосипедиста одновременно начали движение по наклонной плоскости: один, имея начальную скорость $v_{01} = 4$ м/с, равнозамедленно поднимается вверх с ускорением, модуль которого $a_1 = 0{,}1\,\text{м/с}^2$, другой, имея начальную скорость $v_{02} = 1$ м/с, равноускоренно спускается вниз с ускорением, модуль которого $a_2 = 0{,}4\,\text{м/с}^2$. Через какое время t они встретятся и какие пути S_1 и S_2 пройдет каждый до встречи, если в начальный момент расстояние между ними $x_0 = 150$ м ?

Ответ: $t = 19$с, $S_1 = 57$м, $S_2 = 93$м.

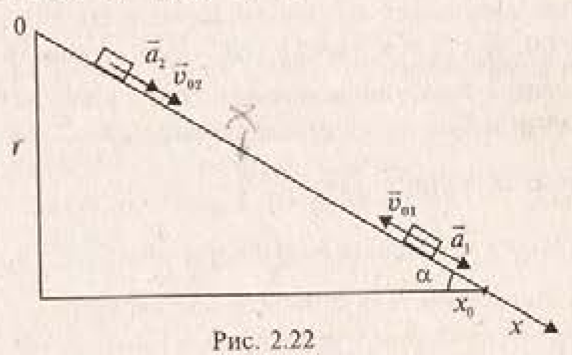


Рис. 2.22

Решение. Уравнения движения первого и второго велосипедистов (рис. 2.22):

$$v_1 = -v_{01} + a_1 t;\quad x_1 = x_0 - v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2};$$

$$v_2 = v_{02} + a_2 t;\quad x_2 = v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2}.$$

В момент встречи $x_1 = x_2$, $x_0 - v_{01}t + \dfrac{a_1 t^2}{2} = v_{02}t + \dfrac{a_2 t^2}{2}$;

$$\frac{(a_2 - a_1)}{2}t^2 + (v_{02} - v_{01})t - x_0 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим время встречи $t = 19$с; $x_1 = S_1 = 57$ м; $x_2 = x_0 - x = S_2 = 93$ м.

2.36. По наклонной плоскости одновременно начали двигаться два тела: одно — вверх с начальной скоростью $v_0 = 0{,}5$ м/с, другое — вниз без начальной скорости. Через какое время t тела встретятся и какой будет их относительная скорость в месте встречи, если первоначальное расстояние между телами $l = 2{,}5$м?

Ответ: $t = 5$с; $v_{\text{отн}} = -0{,}5$ м/с.

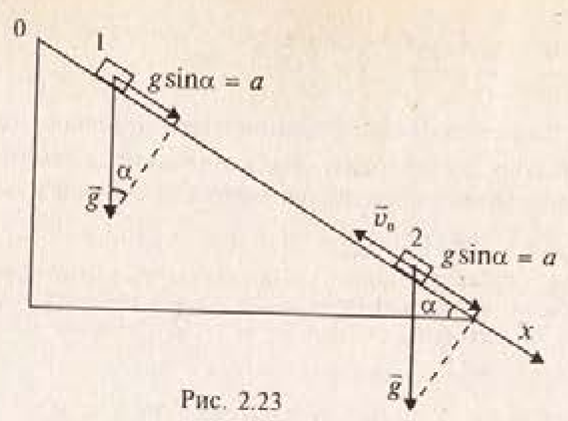


Рис. 2.23

Решение. Независимо от направления движения тела его ускорение равно $a_1 = a_2 = a = g\sin\alpha$ (рис. 2.23). Уравнения движения первого и второго тел

$$\upsilon_1 = at;\quad x_1 = \frac{at^2}{2};\quad \upsilon_2 = -\upsilon_0 + at;\quad x_2 = l - \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2};$$

В момент встречи $x_1 = x_2$:

$$\frac{at^2}{2} = l - \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2};\ \text{время встречи}\ t = \frac{l}{\upsilon_0} = 5\,\text{с}.$$

Скорость второго тела относительно первого

$$\upsilon_{\text{отн}} = \upsilon_2 - \upsilon_1 = -\upsilon_0 + at - at = -\upsilon_0 = -0,5\,\text{м/с}.$$

2.37. Из проволоки длиной l изготовили спираль высотой h с постоянным шагом и закрепили так, чтобы ее ось была вертикальной. За какое время маленькая бусинка, надетая на проволоку в верхней точке спирали, соскользнет вниз?

Ответ: $t = l\sqrt{\dfrac{2}{gh}}$.

Решение. Развернем спираль, при этом она превратится в наклонную проволоку длиной l и высотой h. Бусинка, сползая по спирали, имеет ускорение $a = g\sin\alpha$, где $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$. Тогда

$$l = \frac{at^2}{2} = \frac{gt^2\sin\alpha}{2} = \frac{gt^2h}{2l},\ \text{откуда}\ t = l\sqrt{\frac{2}{gh}}.$$

2.38. Тело соскальзывает без трения с наклонной плоскости. Найдите угол α наклона плоскости к горизонту, если средняя скорость тела за первые 0,5 с на 2,45 м/с меньше, чем средняя скорость тела за первые 1,5 с.

Ответ: $\alpha = 30°$.

Решение. См. задачу 2.36.

$$a = g\sin\alpha;\quad \upsilon_{\text{ср}_1} = S_1/t_1 = \upsilon_0 + (g\sin\alpha)t_1/2;$$

$$\upsilon_{\text{ср}_2} = S_2/t_2 = \upsilon_0 + (g\sin\alpha)t_2/2;\ \text{откуда}$$

$$\sin\alpha = 2(\upsilon_{\text{ср}_2} - \upsilon_{\text{ср}_1})/g(t_2 - t_1) = 0,5,\ \text{т. е.}\ \alpha = 30°.$$

2.39. Вверх по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, пустили шайбу с начальной скоростью υ_0. Когда шайба достигла половины максимальной высоты подъема, из той же начальной точки с той же скоростью и в том же направлении пустили вторую шайбу. На каком расстоянии x от начальной точки встретятся шайбы?

Ответ: $x = \dfrac{(3 + 2\sqrt{2})\upsilon_0^2}{16\sin\alpha}$.

Решение. Начало координат поместили в точку запуска шайб, ось x направлена вверх вдоль наклонной плоскости, время отсчитывается от момента запуска второй шайбы.

Уравнения движения первой и второй шайб:

$$x_1 = x_0 + \upsilon t + \frac{a_x t^2}{2};\quad x_2 = \upsilon_0 t + \frac{a_x t^2}{2};$$

$$a_x = -g\sin\alpha;\quad x_0 = \frac{x_{\max}}{2} = \frac{\upsilon_0^2}{2\cdot 2a_x} = \frac{\upsilon_0^2}{4g\sin\alpha};$$

x_0 — координата первой шайбы в момент запуска второй. Скорость первой шайбы в этот момент υ можно найти из соотношения

$$x_0 = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a_x};\quad \frac{\upsilon_0^2}{4g\sin\alpha} = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{-2g\sin^2\alpha},\ \text{откуда}\ \upsilon = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{2}}.$$

При встрече шайб $x_1 = x_2 = x$

$$\frac{\upsilon_0^2}{4g\sin\alpha} + \frac{\upsilon_0 t}{\sqrt{2}} - \frac{gt^2\sin\alpha}{2} = \upsilon_0 t - \frac{gt^2\sin\alpha}{2},$$

тогда время встречи и координата:

$$t = \frac{\sqrt{2}\upsilon_0\left(\sqrt{2}+1\right)}{4g\sin\alpha};$$

$$x = \frac{\sqrt{2}\upsilon_0^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{4g\sin\alpha} - \frac{2g\upsilon_0^2\left(\sqrt{2}+1\right)^2\sin\alpha}{2\cdot 16g^2\sin^2\alpha} = \frac{\left(5+2\sqrt{2}\right)\upsilon_0^2}{16g\sin\alpha}.$$

2.40. Покажите, что для тела, брошенного вертикально вверх: 1) начальная скорость υ_0 равна конечной скорости его при соприкосновении с землей; 2) время подъема равно времени падения.

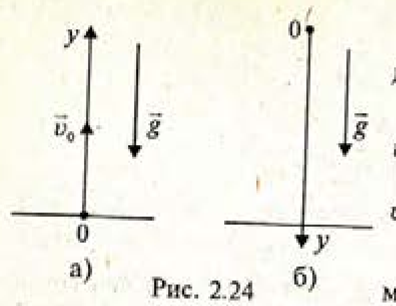


Рис. 2.24

Решение. Рассмотрим два этапа движения тела.

1) Движение тела вверх (рис. 2.24а). $v_y = v_0 - gt$; в высшей точке подъема $v_y = 0$, тогда $v_0 = gt$; $t = \frac{v_0}{g}$ — время подъема тела; $h = \frac{v^2 - v_0^2}{-2g} = \frac{v_0^2}{2g}$ — высота, на которую поднимается тело над землей.

2) Свободное падение тела (рис. 2.24б).

Начало отсчета поместим в точку высшего подъема тела, ось y направим вниз. Начальная скорость $v_0' = 0$, v — скорость у земли.

$v^2 - v_0'^2 = 2gh$, учтем, что $h = v_0^2/2g$, тогда

$v^2 = 2g\frac{v_0^2}{2g} = v_0^2$; $v = v_0$, т. е. скорость падения тела (у земли) равна скорости бросания тела вверх.

t' — время падения тела, тогда $v = gt'$; $t' = \frac{v}{g} = \frac{v_0}{g} = t$, т. е. время падения тела на землю равно времени подъема.

2.41. За какое время t свободно падающее без начальной скорости тело пройдет сотый сантиметр своего пути?

Ответ: $t \approx 0,02$ с.

Решение. $h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$; $h_1 = 100$ см; $h_2 = \frac{gt_2^2}{2}$; $h_2 = 99$ см.

$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$; $t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$; $t = t_1 - t_2 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} - \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$ — время, за которое тело пройдет сотый сантиметр пути $t = 0,02$ с.

2.42. Тело на веревке поднимают с ускорением $a = 2$ м/с^2 вертикально вверх. Через $t = 5$ с веревка оборвалась. Сколько времени двигалось тело до земли после того, как оборвалась веревка?

Ответ: $t_1 \approx 3,5$ с.

Решение. $h = \frac{at^2}{2}$ — высота, на которой оборвалась веревка; $v_0 = at$ — скорость тела в момент обрыва. t_1 — время движения тела после обрыва веревки. Уравнение движения тела после обрыва веревки (ось y направлена вверх):

$v_y = v_0 - gt_1$; $y = y_0 + v_0t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0$; $y_0 = h$; $v_0 = at$;

в момент падения на землю $y(t_1) = 0$, тогда

$\frac{at^2}{2} + att_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0$; $\frac{2 \cdot 5^2}{2} + 2 \cdot 5 \cdot t_1 - \frac{10t_1^2}{2} = 0$;

$5t_1^2 - 10t_1 - 25 = 0$; $t_1 \approx 3,5$ с.

2.43. С вертолета сбросили без начальной скорости два груза, причем второй на $\tau = 1,0$ с позже первого. Определите расстояние между грузами через время $t_1 = 2,0$ с и $t_2 = 4,0$ с после начала движения первого груза.

Ответ: $\Delta h_1 = 15$ м; $\Delta h_2 = 34$ м.

Решение. Уравнения движения первого и второго грузов (ось y начинается в точке бросания и направлена вниз)

$y_1 = \frac{gt^2}{2}$; $y_2 = \frac{g(t-\tau)^2}{2}$.

Расстояние между грузами через время t

$\Delta h = y_1 - y_2 = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\tau)^2}{2} = gt\tau - \frac{g\tau^2}{2}$;

$t_1 = 2$ с; $\Delta h_1 = 15$ м; $t_2 = 4$ с; $\Delta h_2 = 34$ м.

2.44. С воздушного шара, находящегося на высоте $h = 240$ м, сбросили без начальной скорости относительно шара небольшой, но тяжелый груз. Определите время падения груза, если шар был неподвижным. То же, если шар двигался вниз со скоростью $v_0 = 5,0$ м/с, вверх со скоростью $v_0 = 5,0$ м/с. С каким ускорением относительно шара двигался груз в каждом из случаев?

Ответ: $t_1 = 7,0$ с, $t_2 = 6,5$ с, $t_3 = 7,5$ с.

Решение. Начало координат на земле; ось y направлена вверх. Уравнение движения груза $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$. В момент падения груза $y = 0$; начальная координата $y_0 = h$; $a_y = -g$. При $v_0 = 0$ время падения груза $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Шар движется вниз:

$v_{0y} = -v_0$; $h - v_0t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0$; $t_2 = \left(-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}\right)/g = 6,5$ с.

Шар движется вверх:

$v_{0y} = v_0; \quad h + v_0 t_3 - \frac{gt_3^2}{2} = 0; \quad t_3 = \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}\right)/g = 7,5\,\text{с}.$

2.45. Тело падает с башни с нулевой начальной скоростью. Известно, что вторую половину пути оно прошло за $\tau = 0,8\,\text{с}$. Определите высоту башни H.

Ответ: $H = 36,1\,\text{м}$.

Решение. Весь путь H тело прошло за время t: $H = \frac{gt^2}{2}$. (1)

Первую половину пути оно прошло за время $(t-\tau)$, т. е. $\frac{H}{2} = \frac{g(t-\tau)^2}{2}$; тогда $\frac{H}{2} = \frac{gt^2}{2} - gt\tau + \frac{g\tau^2}{2}$; с учетом (1) $\frac{gt^2}{4} = \frac{gt^2}{2} - gt\tau + \frac{g\tau^2}{2}$; $t^2 - 4t\tau + 2\tau^2 = 0$. Время прохождения всего расстояния $t = \sqrt{2}\tau\left(\sqrt{2}+1\right)$, тогда высота башни $H = g\tau^2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 36,1\,\text{м}$.

2.46. Тело падало с некоторой высоты и последние $h = 196\,\text{м}$ прошло за время $\tau = 4,0\,\text{с}$. Сколько времени и с какой высоты падало тело?

Ответ: $t = 7\,\text{с}$, $H = 240\,\text{м}$.

Решение. $H = \frac{gt^2}{2}$, где t — полное время падения тела,

$H - h = \frac{g(t-\tau)^2}{2}; \quad h = \frac{gt^2}{2} - \frac{gt^2}{2} + gt\tau - \frac{g\tau^2}{2}; \quad t = \frac{h}{g\tau} + \frac{\tau}{2} = 7\,\text{с}.$

$H = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{h}{g\tau} + \frac{\tau}{2}\right)^2 = 240\,\text{м}.$

2.47. С отвесного обрыва упал камень. Человек, стоявший у того места, с которого упал камень, услышал звук его падения через время $t = 6\,\text{с}$. Найдите высоту обрыва. Скорость звука $v_{зв} = 340\,\text{м/с}$.

Ответ: $h = 150\,\text{м}$.

Решение. Время падения камня t_1, тогда $h = \frac{gt_1^2}{2}$. Время распространения звука $t_2 = t - t_1$, $h = v_{зв}(t - t_1)$; $\frac{gt_1^2}{2} = v_{зв}(t - t_1)$;

$t_1 = -v_{зв} + \sqrt{v_{зв}(v_{зв} + 2gt)} = 5,55\,\text{с}; \quad h = 150\,\text{м}.$

2.48. Тело свободно падает с высоты 270 м. Разделите эту высоту на три части h_1, h_2, h_3 так, чтобы на прохождение каждой из них потребовалось одно и то же время.

Ответ: $h_1 = 30\,\text{м}$, $h_2 = 90\,\text{м}$, $h_3 = 150\,\text{м}$.

Решение. Пусть t — время прохождения телом 1/3 высоты.

$h_1 = \frac{gt^2}{2}; \quad h_1 + h_2 = \frac{g(2t^2)}{2}; \quad h = h_1 + h_2 + h_3 = \frac{g(3t^2)}{2}; \quad t^2 = \frac{2h}{9g};$

$h_1 = \frac{g}{2}\left(\frac{2h}{9g}\right) = 30\,\text{м}; \quad h_2 = \frac{4g}{2}\left(\frac{2h}{9g}\right) - h_1 = 90\,\text{м}; \quad h_3 = 150\,\text{м}.$

2.49. Два тела начали падать с одной и той же высоты через промежуток времени τ одно после другого. Через сколько секунд после начала падения второго тела расстояние между ними будет равно l?

Ответ: $t = \frac{l}{g\tau} - \frac{\tau}{2}$.

Решение. Начало координат в точке начала движения, ось y направлена вниз. Уравнения движения первого и второго тел:

$y_1 = \frac{g(t+\tau)^2}{2}; \quad y_2 = \frac{gt^2}{2}$, где t — время падения второго тела.

Тогда $l = y_1 - y_2 = \frac{g(t+\tau)^2}{2} - \frac{gt^2}{2}; \quad t = \frac{l}{g\tau} - \frac{\tau}{2}$.

2.50. С крыши падают одна за другой две капли. Через время $t_2 = 2\,\text{с}$ после начала падения второй капли расстояние между каплями стало равным $S = 25$ м. На сколько раньше первая капля оторвалась от крыши?

Ответ: $\Delta t = 1\,\text{с}$.

Решение. Время падения первой капли $t_1 = t_2 + \Delta t$, где Δt — время падения первой капли до начала падения второй.

$\frac{g(t_2 + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt_2^2}{2} = S; \quad g\Delta t^2 + 2gt_2\Delta t - 2S = 0;$

$\Delta t = \frac{-gt + \sqrt{g^2t^2 + 2gS}}{g} = 1\,\text{с}.$

2.51. С крыши падают капли воды. Промежуток времени между отрывами капель $\tau = 0,10\,\text{с}$. На каком расстоянии друг от друга будут находиться через время $t = 1,0\,\text{с}$ после начала падения первой капли следующие три?

Ответ: $l_n - l_{n+1} = gt\tau - \frac{g\tau^2}{2}(2n-1)$; $l_2 - l_3 = 0,83\,\text{м}$; $l_3 - l_4 = 0,73\,\text{м}$.

Решение. Время падения первой капли t, второй — $(t-\tau)$; третьей —$(t-2\tau)$; n-й —$(t-(n-1)\tau)$; $(n+1)$-й — $(t-n\tau)$. Тогда расстояние между n и $(n+1)$ каплями равно

$$l_n - l_{n+1} = \frac{g[t-(n-1)\tau]^2}{2} - \frac{g(t-n\tau)^2}{2} = gt\tau - \frac{g\tau^2}{2}(2n-1).$$

Расстояние между второй и третьей каплями $(n=2)$

$l_2 - l_3 = 0,83$ м; между третьей и четвертой $(n=3)$ $l_3 - l_4 = 0,73$ м.

2.52. Жонглер бросает с одного и того же уровня два шарика вертикально вверх с начальными скоростями $v_0 = 5$ м/с один за другим через промежуток времени $t_0 = 0,31$ с. Определитt, через какое время t после бросания первого шарика оба шарика окажутся на одной высоте.

Ответ: $t = 0,66$ с.

Решение. Начало координат на уровне бросания шариков, ось y направлена вверх. Уравнения движения первого и второго шариков

$$y_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2};\quad y_2 = v_0(t-t_0) - \frac{g(t-t_0)^2}{2};$$

Когда шарики на одной высоте $y_1 = y_2$, т. е.

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} = v_0(t-t_0) - \frac{g(t-t_0)^2}{2}.$$

Время встречи шариков $t = \dfrac{v_0}{g} + \dfrac{t_0}{2} = 0,66$ с.

2.53. С башни, имеющей высоту h, бросают одновременно два шарика: один — вертикально вверх со скоростью v_1, второй — вертикально вниз со скоростью v_2. Найдите промежуток времени Δt, отделяющий моменты их падения на землю.

Ответ: $\Delta t = \left(v_1 + v_2 + \sqrt{v_1^2 + 2gh} - \sqrt{v_2^2 + 2gh}\right)/g$.

Решение. Начало координат на земле. Ось y направлена вверх. Уравнения движения первого и второго шариков

$$y_1 = h + v_1 t_1 - \frac{gt_1^2}{2};\quad y_2 = h - v_2 t_2 - \frac{gt_2^2}{2};$$

В момент падения $y_1 = y_2 = 0$, откуда

$$h + v_1 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0;\quad t_1 = \left(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}\right)/g;$$

$$h - v_2 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0;\quad t_2 = \left(-v_2 + \sqrt{v_2^2 + 2gh}\right)/g.$$

Промежуток времени между падением шариков на землю

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \left(v_1 + v_2 + \sqrt{v_1^2 + 2gh} - \sqrt{v_2^2 + 2gh}\right)/g.$$

2.54. Два тела начинают падать одновременно с разных высот H и h и достигают земли в один и тот же момент времени. Какую начальную скорость сообщили верхнему телу, если нижнее начало падать без начальной скорости?

Ответ: $v_0 = \dfrac{(H-h)g}{\sqrt{2gh}}$.

Решение. Начало координат на земле. Ось y направлена вверх. Уравнения движения первого и второго тела

$$y_1 = H - v_0 t - \frac{gt^2}{2};\quad y_2 = h - \frac{gt^2}{2};$$

В момент падения $y_1 = y_2 = 0$, тогда $H - v_0 t - \dfrac{gt^2}{2} = 0$; $h = \dfrac{gt^2}{2}$,

откуда $v_0 = \dfrac{(H-h)g}{\sqrt{2gh}}$.

2.55. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью v_0 из точки, находящейся на высоте H от поверхности земли. Определите время (t_3), через которое камень упадет на землю, скорость камня в момент падения на землю (v_3), высоту наибольшего подъема (h_1). Построить график $y = y(t)$, $v = v(t)$.

Ответ: $t_3 = \dfrac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\dfrac{v_0}{g}\right)^2 + \dfrac{2H}{g}}$; $v_3 = -\sqrt{v_0^2 + 2gH}$; $h_1 = H + \dfrac{v_0^2}{2g}$.

Решение. Начало координат на земле. Ось y направлена вверх. Уравнение движения камня

$$y(t) = H + v_0 t - \frac{gt^2}{2};\quad v(t) = v_0 - gt.$$

Найдем момент времени t_1, в который высота подъема камня h_1 максимальна. В этот момент $v(t_1) = 0$, откуда $v(t_1) = v_0 - gt_1 = 0$; $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$. Высота максимального подъема $h_1 = y(t_1) = H + v_0 t - \dfrac{gt_1^2}{2}$;

$h_1 = H + \dfrac{v_0^2}{2g}$, t_2 — момент времени, в который тело окажется на высоте H, $y(t_2) = H$; $H = H + v_0 t_2 - \dfrac{gt_2^2}{2}$; $t_2 = \dfrac{2v_0}{g} = 2t_1$.

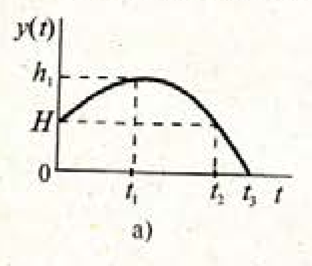
t_3 — момент времени, в который камень упадет на землю.

$$y(t_3)=0;\quad H+v_0t_3-\frac{gt_3^2}{2}=0;\quad t_3=\frac{v_0}{g}+\sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+\frac{2H}{g}}.$$

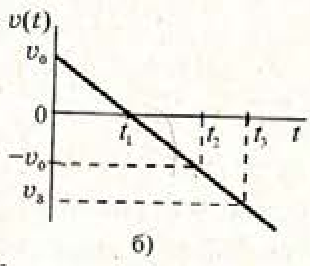
В момент падения на землю $v_3=v(t_3)$,

$v_3=v_0-gt_3=-\sqrt{v_0^2+2gH}$, знак минус указывает на то, что скорость в этот момент направлена вниз.

Графики $y(t)$ и $v(t)$ представлены на рис. 2.25а, 2.25б.



а)



б)

Рис. 2.25

2.56. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Когда оно достигло высшей точки траектории, из того же начального пункта с той же скоростью v_0 брошено второе тело. На каком расстоянии от начального пункта они встретятся?

Ответ: $h=0{,}75H$.

Решение. Первое тело поднялось на высоту $H=\frac{v_0^2}{2g}$. Время отсчитываем с момента начала падения первого тела t_1 (бросания второго тела). Начало координат на земле. Уравнения движения первого и второго тел $y_1=H-\frac{gt_1^2}{2};\quad y_2=v_0t_1-\frac{gt_1^2}{2}$.

В момент встречи $y_1=y_2$, тогда $\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gt_1^2}{2}=v_0t_1-\frac{gt_1^2}{2};\quad t_1=\frac{v_0}{2g}$.

Место встречи $h=y_1(t_1)=y_2(t_1)=v_0\frac{v_0}{2g}-\frac{gv_0^2}{8g^2}=\frac{3}{8}\frac{v_0^2}{g}=\frac{3}{4}H$.

2.57. Тело бросают вертикально вверх. Наблюдатель замечает промежуток времени t_0 между двумя моментами, когда тело находится на высоте h. Найти начальную скорость тела и время движения.

Ответ: $v_0=\frac{g}{2}\sqrt{t_0^2+\frac{8h}{g}};\quad t=\sqrt{t_0^2+\frac{8h}{g}}$.

Решение. Начало координат на земле. Уравнение движения тела

$y(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$

$$\begin{cases} y(t_1)=h; \\ y(t_1+t_0)=h; \end{cases}\qquad \begin{cases} v_0t_1-\dfrac{gt_1^2}{2}=h; & (1)\\ v_0(t_1+t_0)-\dfrac{g(t_1+t_0)^2}{2}=h. & (2)\end{cases}$$

Из (1) имеем $v_0=\frac{h}{t_1}+\frac{gt_1}{2}$, (3)

подставляя в (2) получаем $t_1=-\frac{t_0}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{t_0^2+\frac{8h}{g}}$. (4)

Полное время движения $t_{полн}=2t_1+t_0=\sqrt{t_0^2+\frac{8h}{g}}$. Решая совместно (3) и (4), получаем $v_0=\frac{g}{2}\sqrt{t_0^2+\frac{8h}{g}}$.

2.58. Два камня находятся на одной вертикали на расстоянии $S=10$ м друг от друга. В некоторый момент времени верхний камень бросают вниз со скоростью $v=20$ м/с, а нижний отпускают. Через какое время камни столкнутся?

Ответ: $t=0{,}5$с.

Решение. Начало координат в точке нахождения верхнего камня, ось y направлена к земле. Уравнения движения камней:

$y_1=v_0t+\frac{gt^2}{2};\quad y_2=S+\frac{gt^2}{2}$;

В момент столкновения $y_1(t_1)=y_2(t_1)$,

$v_0t_1+\frac{gt_1^2}{2}=S+\frac{gt_1^2}{2};\quad t_1=\frac{S}{v_0}=0{,}5$с.

2.59. С какой скоростью v_0 нужно бросить вертикально вверх тело, чтобы оно прошло путь $S=100$ м за время $t=6$с?

Ответ: а) $v_0=47$ м/с; б) $v_{01}=40$ м/с; $v_{02}=20$ м/с.

Решение. Возможны два случая.

а) Телу сообщена такая начальная скорость v_0, что оно пройдет путь S, не достигнув максимальной высоты подъема H. Тогда

$S=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ и $v_0=\frac{S}{t}+\frac{gt}{2}=47$ м/с.

б) Тело достигает высоты H, не успев пройти путь S. В этом случае $S=H+S_1$, где S_1 — путь, пройденный телом при движе-

нии вниз. Тогда $H = v_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2}$; $S_1 = \frac{1}{2} g t_2^2$; $t = t_1 + t_2$; $v_0 = g t_1$, здесь t_1 — время подъема тела, t_2 — время прохождения пути S_1. Из вышепреведенных уравнений получаем

$$v_{01} = \frac{1}{2}\left(gt + \sqrt{4gS - g^2t^2}\right) = 40\ \text{м/с};\quad v_{02} = \frac{1}{2}\left(gt - \sqrt{4gS - g^2t^2}\right) = 20\ \text{м/с}.$$

Второй результат соответствует случаю, когда тело в конце пути S опустится ниже точки бросания.

2.60. Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка $H = 2{,}7$ м, начала двигаться вертикально вверх с постоянным ускорением $a = 1{,}2$ м/с². Спустя время $t_0 = 2{,}0$ с после начала подъема, с потолка кабины стал падать болт. Найдите время свободного падения болта t, его перемещение h и пройденный путь S за это время в системе отсчета, связанной с шахтой лифта.

Ответ: $t = 0{,}7$ с; $h = -0{,}7$ м; $S = 1{,}3$ м.

Решение. В системе отсчета, связанной с шахтой лифта, болт будет двигаться равнозамедленно (начальная скорость $v_0 = at_0$, ускорение — g), а лифт — равноускоренно (начальная скорость v_0, ускорение a). Если h_1 — перемещение лифта за время t, то

$$h = h_1 - H,\quad h = v_0 t - \frac{gt^2}{2};\quad h_1 = v_0 t + \frac{at^2}{2}.\ \text{Тогда}\ t = \sqrt{\frac{2H}{g+a}} = 0{,}7\ \text{с};$$

$$h = at_0\sqrt{\frac{2H}{g+a}} - \frac{gH}{g+a} = -0{,}7\ \text{м};\quad S = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{a^2t_0^2}{g} - att_0 = 1{,}3\ \text{м}.$$

3. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

3.1. Тело брошено горизонтально с начальной скоростью v_0. Найдите: 1) уравнение траектории тела $y = f(x)$ (постройте согласно этому уравнению траекторию полета тела); 2) зависимость скорости тела от времени; 3) зависимость от времени угла α между вектором скорости тела и горизонтом.

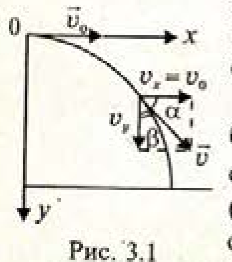


Рис. 3.1

Решение. Начало координат поместим в точку бросания тела, ось y направлена к земле, ось x — совпадает с направлением начальной скорости $\vec{v}_0$ (рис 3.1). Вдоль оси x тело движется равномерно со скоростью v_0, а по оси y наблюдаем свободное падение.

1) Уравнения движения тела: $v_x = v_0$;

$v_y = gt$; $x = v_0 t$; $y = \frac{gt^2}{2}$, тогда $t = \frac{x}{v_0}$ подставим в y и получим уравнение траектории: $y = \frac{gx^2}{2v_0^2}$ — парабола.

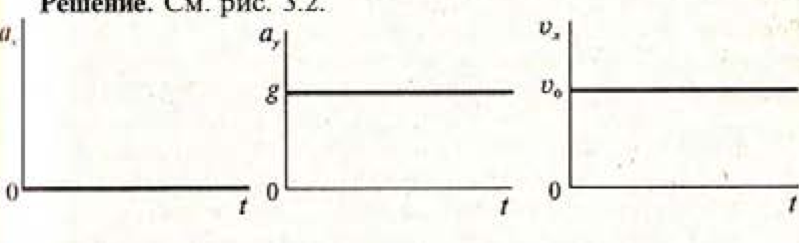
2) Скорость тела в любой момент (рис. 3.1)

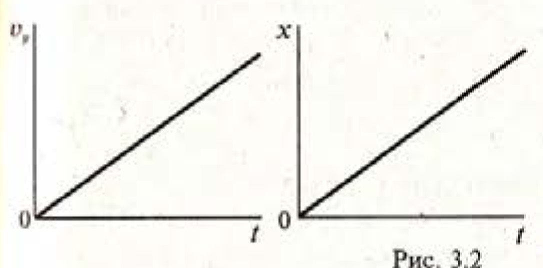
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{gt}{v_0}\right)$.

3.2. Тело брошено горизонтально с начальной скоростью v_0. Поместив начало координат в точку бросания и направив ось x вдоль начальной скорости, а ось y — вертикально вниз, постройте графики зависимостей: $a_x(t)$, $a_y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x(t)$, $y(t)$.

Решение. См. рис. 3.2.





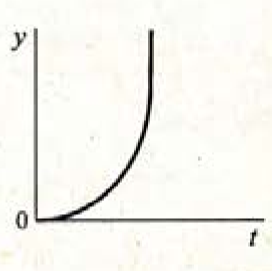


Рис. 3.2

Указание. При решении задач 3.3—3.17 использовать решение задачи 3.1.

3.3. Камень, брошенный горизонтально с обрыва высотой $H = 10$ м, упал на расстоянии $S = 14$ м от точки бросания. Запишите уравнение траектории камня и из него определите начальную скорость.

Ответ: $v_0 = 9{,}8$ м/с.

Решение.

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2};\quad x = S;\quad y = H;\quad H = \frac{gS^2}{2v_0^2};\quad v_0 = S\sqrt{\frac{g}{2H}} = 9{,}8\ \text{м/с}.$$

3.4. Мячик скатывается с верхушки лестницы, обладая начальной скоростью $\upsilon_0 = 1,7$ м/с. Высота и ширина каждой ступеньки одинаковы $h = d = 20,3$ см. О какую по счету ступеньку мячик ударится впервые?

Ответ: $n = 3$.

Решение. Используем уравнение траектории $y = \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}$, где $y = nh$; $x = nd$, тогда $nh = \frac{gn^2d^2}{2\upsilon_0^2}$, откуда $n = \frac{2\upsilon_0^2 h}{gd^2} = 3$.

3.5. В мишень с расстояния $S = 50$ м сделано два выстрела в горизонтальном направлении при одинаковой наводке винтовки. Скорость первой пули $\upsilon_1 = 320$ м/с, второй $\upsilon_2 = 350$ м/с. Определите расстояние между пробоинами.

Ответ: $\Delta H = 2$ см.

Решение. Из уравнения траектории $y = \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}$ получаем смещение по оси y $y_1 = \frac{gS^2}{2\upsilon_1^2}$; $y_2 = \frac{gS^2}{2\upsilon_2^2}$; $\Delta H = y_1 - y_2 = \frac{gS^2(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)}{2\upsilon_1^2\upsilon_2^2} = 2$ см.

3.6. Камень бросили с вышки в горизонтальном направлении. Через $t_1 = 2$ с он упал на землю на расстоянии $S = 40$ м от основания вышки. Определите высоту вышки h, начальную υ_0 и конечную υ_1 скорости камня. Составьте уравнение траектории камня. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: $\upsilon_0 = 20$ м/с, $H = 19,6$ м, $\upsilon_1 = 28$ м/с.

Решение.

$\upsilon_x = \upsilon_0 = \frac{S}{t} = 20$ м/с; $\upsilon_y = gt = 19,6$ м/с;

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2} = 28$ м/с.

Из уравнения траектории $H = \frac{gS^2}{2\upsilon_0^2} = 19,6$ м.

3.7. Тело брошено горизонтально. Через время $t = 5$ с после броска направления полной скорости υ и полного ускорения a составили угол $\beta = 45°$. Найдите полную скорость υ тела в этот момент ($g = 10$ м/с^2).

Ответ: $\upsilon = 70,5$ м/с.

Решение. См. рис. 3.1.

Полное ускорение равно ускорению свободного падения $a = g$. Тогда $\upsilon_y/\upsilon = \cos\beta$; $\upsilon = \upsilon_y/\cos\beta = gt/\cos\beta$; $\upsilon = 10 \cdot 5/\cos 45° = 70,5$ м/с.

3.8. Дальность полета тела, брошенного горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 4,9$ м/с, равна высоте, с которой его бросили. Чему равна эта высота и под каким углом к горизонту тело упало на землю?

Ответ: $h = 4,9$ м; $\alpha = \text{arctg}\, 2 = 64°$.

Решение. Уравнение траектории $y = \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}$. Учитывая, что $x = S$; $y = H$, $S = H$, получаем $H = \frac{gH^2}{2\upsilon_0^2}$, откуда $H = \frac{2\upsilon_0^2}{g} = 4,9$ м.

Уравнения движения $x = \upsilon_0 t$; $y = \frac{gt^2}{2}$; $\upsilon_x = \upsilon_0$; $\upsilon_y = gt$.

По условию $S = H$, т. е. $\upsilon_0 t = \frac{gt^2}{2}$; $\upsilon_0 = \frac{gt}{2}$ (рис. 3.1),

т. е. $\text{tg}\,\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{gt}{\upsilon_0} = 2$; $\alpha = \text{arctg}\, 2 = 64°$.

3.9. Камень, брошенный с башни горизонтально с начальной скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с, упал на расстоянии $S = 10$ м от башни. С какой высоты h был брошен камень?

Ответ: $h = 4,9$ м.

Решение самостоятельное.

3.10. С самолета, летевшего на высоте h в горизонтальном направлении со скоростью υ_0, сбросили груз, который упал в точке A (рис. 3.3). Под каким углом к вертикали пилот видел цель в момент выбрасывания груза?

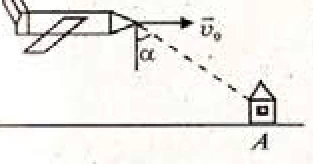


Рис. 3.3

Ответ: $\alpha = \text{arctg}\left(\upsilon_0\sqrt{\frac{2}{hg}}\right)$.

Решение. $\text{tg}\,\alpha = \frac{S}{h}$; из уравнения траектории $h = \frac{gS^2}{2\upsilon_0^2}$, откуда $\text{tg}\,\alpha = \upsilon_0\sqrt{\frac{2}{gh}}$; $\alpha = \text{arctg}\left(\upsilon_0\sqrt{\frac{2}{gh}}\right)$.

3.11. Камень брошен с горы горизонтально с начальной скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с. Через какое время t его скорость будет направлена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту?

Ответ: $t = 1,5$ с.

Решение. $\text{tg}\,\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{gt}{\upsilon_0}$; $t = \frac{\upsilon_0\,\text{tg}\,\alpha}{g} = 1,5$ с.

3.12. С вертолета, летящего на высоте $H = 125$ м со скоростью $\upsilon_0 = 90$ км/ч, сбросили груз. На какой высоте его скорость будет направлена под углом 45° к горизонту?

Ответ: $h = 93$ м.

Решение. См. задачу 3.11.

$$h = H - \frac{gt^2}{2}; \quad t = \frac{\upsilon_0 \operatorname{tg}\alpha}{g}; \quad \upsilon_0 = 90 \text{ км/ч} = 25 \text{ м/с};$$

$$h = H - \frac{\upsilon_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{2g} = 93 \text{ м}.$$

3.13. Камень, брошенный с крыши дома горизонтально с начальной скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с, упал на землю под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Какова высота h дома?

Ответ: $h = 34,4$ м.

Решение. $y = \dfrac{gt^2}{2}; \quad t = \dfrac{\upsilon_0 \operatorname{tg}\alpha}{g}$ (см. задачу 3.11).

$$y = h = \frac{\upsilon_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{2g} \approx 34,4 \text{ м}.$$

3.14. Определите скорость тела через $t = 3,0$ с после того, как его бросили горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 39,2$ м/с.

Ответ: $|\upsilon| = 49$ м/с, $\alpha = 37°$ к горизонту.

Решение. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2} = 49$ м/с.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{gt}{\upsilon_0} = \operatorname{arctg}\frac{9,8 \cdot 3}{39,2} = 37° \text{ к горизонту}.$$

3.15. Тело, находящееся на высоте $H = 80$ м над землей, брошено горизонтально с начальной скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с. Найдите скорость тела в момент, когда оно окажется на высоте $h = 60$ м над землей. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2g(H-h)} = 25$ м/с.

Решение самостоятельное.

3.16. Человек ныряет в воду с крутого берега высотой $H = 5,0$ м, имея после разбега скорость $\upsilon_0 = 6,7$ м/с. Определите модуль и направление скорости человека при достижении им воды.

Ответ: $\upsilon = 12$ м/с, $\alpha = 56°$.

Решение. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}; \quad \upsilon_x = \upsilon_0; \quad \upsilon_y = \sqrt{2gh};$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh} = 12 \text{ м/с}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2gh}}{\upsilon_0} = \operatorname{arctg}1,49 = 56°.$$

3.17. Тело брошено со стола горизонтально. При падении на пол его скорость $\upsilon = 7,8$ м/с. Высота стола $h = 1,5$ м. Найдите начальную скорость тела υ_0.

Ответ: $\upsilon_0 = 5,6$ м/с.

Решение. Скорость тела в момент падения

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}; \quad \upsilon_x = \upsilon_0;$$

$$\upsilon_y = \sqrt{2gh}; \quad \upsilon_0 = \sqrt{\upsilon^2 - 2gh} = 5,6 \text{ м/с}.$$

3.18. Тело брошено горизонтально с начальной скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с. Найдите нормальное $\bar{a}_n$ и касательное $\bar{a}_\tau$ ускорения через время $t = 1$ с после начала движения тела.

Ответ: $a_n \approx 8,2$ м/с^2, $a_\tau \approx 5,4$ м/с^2.

Решение. Полное ускорение тела в любой точке траектории равно ускорению свободного падения $\bar{g}$; $\bar{g} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau$ (рис. 3.4), где $\bar{a}_n$ — нормальное (центростремительное) ускорение, $\bar{a}_\tau$ — тангенциальное ускорение. Из треугольника ускорений ABC получаем $a_n = g\sin\alpha$; $a_\tau = g\cos\alpha$. Скорость $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$, где $\upsilon_x = \upsilon_0$, $\upsilon_y = gt$.

Рис. 3.4

Из треугольника скоростей ADK имеем

$$\sin\alpha = \frac{\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} = \frac{gt}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}}.$$

Тогда $a_n = \dfrac{g\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}} = 8,2$ м/с^2; $a_\tau = \dfrac{g^2t}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}} \approx 5,4$ м/с^2.

3.19. В какой момент времени у тела, брошенного горизонтально с начальной скоростью $\upsilon_0 = 19,6$ м/с, касательное ускорение равно нормальному?

Ответ: $t = 2$ с.

Решение. См. задачу 3.18.

Если $a_\tau = a_n$, то угол $\alpha = 45°$ (рис. 3.4).

Тогда $\upsilon_y = \upsilon_x = \upsilon_0$; $gt = \upsilon_0$; $t = \upsilon_0/g = 2$ с.

3.20. Мяч брошен горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 9,8$ м/с. Через сколько времени и в каком месте нормальное ускорение мяча будет в два раза больше касательного?

Ответ: $t = 0,5$ с; $x = 4,9$ м; $y = 1,2$ м.

Решение. См. задачу 3.18.

По условию $a_n = 2a_\tau$; $g = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_\tau\sqrt{5}$; $a_\tau = \dfrac{g}{\sqrt{5}}$; $a_n = \dfrac{2g}{\sqrt{5}}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a_n}{a_\tau} = 2$; $\quad v_y = gt = \dfrac{v_0}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\quad t = \dfrac{v_0}{2g} = 0{,}5\,\text{с}$; $\quad x = v_0 t = \dfrac{v_0^2}{2g} = 4{,}9\,\text{м}$;

$y = \dfrac{gt^2}{2} = \dfrac{v_0^2}{8g} = 1{,}2\,\text{м}$.

3.21. С обрыва в горизонтальном направлении бросают камень со скоростью $v_0 = 20\,\text{м/с}$. Определите точку траектории, радиус кривизны которой в восемь раз больше радиуса в верхней точке.

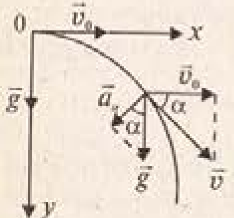


Рис. 3.5

Ответ: $x = 71\,\text{м}$; $y = 61\,\text{м}$.

Решение. Радиус кривизны в верхней точке $R_0 = \dfrac{v_0^2}{g}$, $(a_n = g)$. В точке, где $R = 8R_0$, $\dfrac{v^2}{a_n} = 8\dfrac{v_0^2}{g}$.

Из рис. 3.5 видно, что $v = \dfrac{v_0}{\cos\alpha}$; $a_n = g\cos\alpha$, тогда

$\dfrac{v_0^2}{g\cos^3\alpha} = 8\dfrac{v_0^2}{g}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\alpha = 60°$. $v_y = gt = v_0\operatorname{tg}60°$; $t = \dfrac{v_0\operatorname{tg}60°}{g} =$

$= \dfrac{v_0\sqrt{3}}{g}$ — момент, когда $R = 8R_0$. В этот момент координаты точки

$x = v_0 t = \dfrac{v_0^2\sqrt{3}}{g} = 71\,\text{м}$, $\quad y = \dfrac{gt^2}{2} = \dfrac{3v_0^2}{2g} = 61\,\text{м}$.

3.22. Ракета стартует с поверхности Земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Определите: а) вид траектории; б) высоту наибольшего подъема; в) дальность полета; г) скорость в наивысшей точке $v_н$; д) скорость в конечной точке v_t; е) угол, под которым тело падает на Землю.

Решение.

Начало системы отсчета выбираем в точке бросания тела 0 (рис. 3.6). Движение рассматриваем как сумму двух прямолинейных движений: равномерного вдоль земли, равнопеременного с ускорением g по оси y.

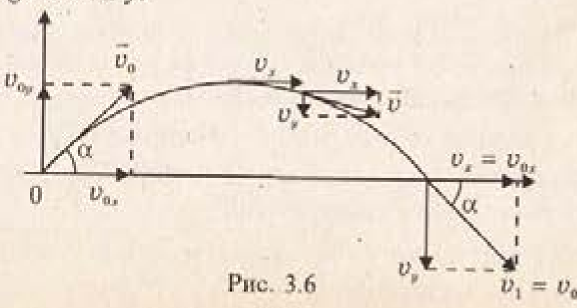


Рис. 3.6

В начальный момент времени $t = 0$:

$x_0 = 0$, $y_0 = 0$

$v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0y} = v_0\sin\alpha$.

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}t = v_0 t\cos\alpha \\ y(t) &= v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \text{ — координаты тела в момент времени } t.$$

Из уравнения для $x(t)$ извлечем время и подставим в уравнение для $y(t)$; в результате получим уравнение траектории $y = f(x)$:

$$y(x) = \frac{v_0 x\sin\alpha}{v_0\cos\alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha};\quad y(x) = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Уравнение траектории — парабола.

Любое тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе.

Скорость тела в наивысшей точке подъема: $v_Н = v_x = v_0\cos\alpha$.

$v_{yН} = 0$ (y — составляющая скорости равна нулю).

$v_{yН} = v_0\sin\alpha - gt_1 = 0$, где t_1 — время подъема.

$t_1 = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$; подставляем t_1 в выражение $y(t)$ и получаем максимальную высоту подъема H:

$$H = v_0\sin\alpha\frac{v_0\sin\alpha}{g} - \frac{gv_0^2\sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g};\quad H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Время подъема равно времени падения, тогда полное время полета: $t_п = 2t_1 = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

Дальность полета $x = S$:

$$x = S = v_0 t_п\cos\alpha = v_0\cos\alpha\frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g};\quad S = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Наибольшая дальность полета при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. $\alpha = 45°$,

$S_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$. Скорость в конечной точке $v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ при $t_п = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

Скорость в точке падения равна начальной скорости: $v_t = v_0$.

$$v_t = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt_п)^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + v_0^2\sin^2\alpha - 2v_0 g\sin\alpha\frac{2v_0\sin\alpha}{g} + g^2\left(\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)^2} = v_0.$$

Угол, под которым тело падает на землю, α_1:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \upsilon\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha - gt_n}{\upsilon_0 \cos\alpha} = \frac{-\upsilon_0 \sin\alpha}{\upsilon_0 \cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha_1 = -\alpha.$$

3.23. Для тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью υ_0, постройте графики зависимостей: $a_x(t)$, $a_y(t)$, $\upsilon_x(t)$, $\upsilon_y(t)$, $x(t)$, $y(t)$. Начало координат совместить с начальным положением тела.

Решение. См. рис. 3.7.

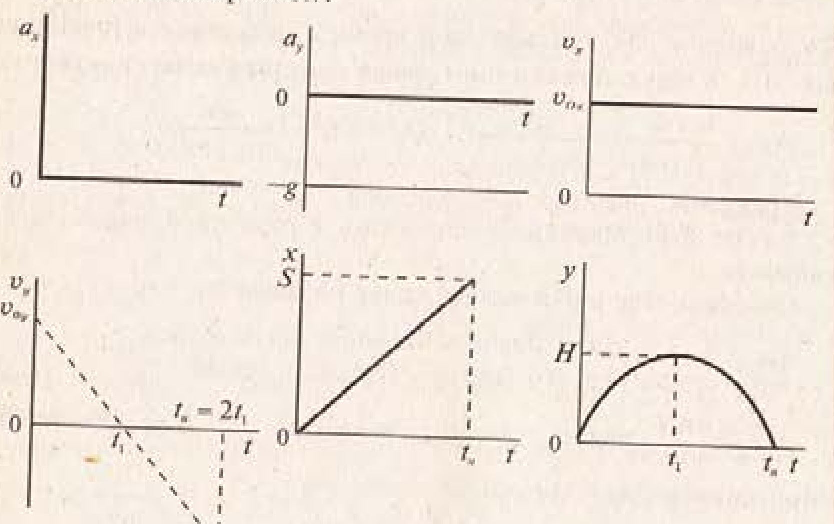


Рис. 3.7

3.24. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Найдите изменение вектора скорости тела за время полета.

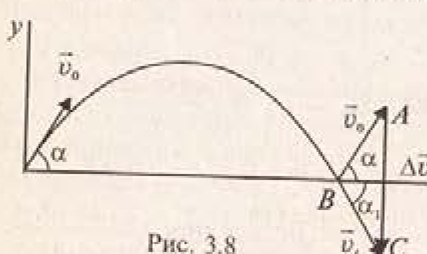


Рис. 3.8

Ответ: $|\Delta\vec{\upsilon}| = 2\upsilon_0 \sin\alpha$.

Решение. Начальная скорость $\vec{\upsilon}_0$, $\vec{\upsilon}_t$ — скорость тела в момент падения (рис. 3.8). Тогда $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_t - \vec{\upsilon}_0$. $|\alpha| = |\alpha_1|$; $|\vec{\upsilon}_0| = |\vec{\upsilon}_t|$.

Из ΔABC найдем модуль изменения скорости $|\Delta\vec{\upsilon}| = 2\upsilon_0 \sin\alpha$.

3.25. Два тела брошены под разными углами к горизонту и с различными начальными скоростями. Покажите, что во время движения их относительная скорость постоянна по модулю и направлению.

Ответ: $\upsilon_{отн} = \sqrt{\upsilon_{01}^2 + \upsilon_{02}^2 - 2\upsilon_{01}\upsilon_{02}\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$.

Решение. Векторные уравнения скоростей двух тел $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_{01} + \vec{g}t$; $\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_{02} + \vec{g}t$. Относительная скорость обоих тел равна $\vec{\upsilon}_{отн} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_{01} - \vec{\upsilon}_{02}$. Очевидно, что эта величина постоянная. Проекции на оси координат $\upsilon_{отн\,x} = \upsilon_{1x} - \upsilon_{2x} = \upsilon_{01}\cos\alpha_1 - \upsilon_{02}\cos\alpha_2$;

$$\upsilon_{отн\,y} = \upsilon_{1y} - \upsilon_{2y} = \upsilon_{01}\sin\alpha_1 - \upsilon_{02}\sin\alpha_2;$$

$$|\upsilon_{отн}| = \sqrt{\upsilon_{отн\,x}^2 + \upsilon_{отн\,y}^2} = \sqrt{\upsilon_{01}^2 + \upsilon_{02}^2 - 2\upsilon_{01}\upsilon_{02}\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

3.26. Камень, брошенный под углом $\alpha = 60°$ к горизонту со скоростью $\upsilon_0 = 30$ м/с, через $t = 2{,}0$ с упал на крышу дома. Определите высоту дома и расстояние до него.

Ответ: $h = 32$ м, $S = 30$ м.

Решение. Уравнение движения $y = \upsilon_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$; $x = \upsilon_0 t\cos\alpha$.

В момент падения камня на крышу дома $y = h$; $x = S$;

$$h = \upsilon_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 32\text{ м}, \quad S = \upsilon_0 t\cos\alpha = 30\text{ м}.$$

3.27. Из орудия вылетает снаряд со скоростью $\upsilon_0 = 1000$ м/с. Цель находится на расстоянии по горизонтали $S = 2000$ м и на высоте $h = 800$ м относительно орудия. Под каким углом относительно линии горизонта должно выстрелить орудие?

Ответ: $\alpha_1 = 22{,}4°$; $\alpha_2 = 89{,}4°$.

Решение. $x = S = \upsilon_{0x}t = \upsilon_0\cos\alpha\cdot t$; $t = \frac{S}{\upsilon_0\cos\alpha}$.

$$y = h = \upsilon_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}; \quad h = \frac{\upsilon_0\sin\alpha\cdot S}{\upsilon_0\cos\alpha} - \frac{gS^2}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha};$$

$$4\upsilon_0^4(h^2 + S^2)\cos^4\alpha - 4\upsilon_0^2 S^2(\upsilon_0^2 - gh)\cos^2\alpha + g^2 S^4 = 0$$

$$116\cdot 10^4\cos^4\alpha - 992160\cos^2\alpha + 96 = 0$$

$\cos\alpha_1 = 0{,}925$; $\alpha_1 = 22{,}4°$

$\cos\alpha_2 = 0{,}00984$; $\alpha_1 = 89{,}4°$

Оба решения удовлетворяют условию задачи.

3.28. Струя пожарного насоса описывает параболу, заданную функцией $y = 3x - 0{,}2x^2$. Определите максимальную высоту и дальность полета струи воды.

Ответ: $h_{max} = 11{,}25$ м, $S_{max} = 15$ м.

Решение. В момент, когда струя попадает на землю, $y = 0$, т. е. $x(3 - 0{,}2x) = 0$; $x_1 = 0$ — начальная точка,

$x_2 = S_{max} = 15$ м.

При максимальной высоте подъема струи $\frac{dy}{dx} = 0$; $3 - 0,4x = 0$; $x_3 = 7,5$ м, в то же время в этой точке $y(x_3) = h_{max} = 11,25$ м.

3.29. Из брандспойта, расположенного вблизи поверхности земли, вырывается струя воды со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Брандспойт медленно вращается вокруг вертикальной оси, одновременно с этим изменяется его угол наклона к горизонту. Определите максимальную площадь, которую можно полить этим брандспойтом.

Ответ: $S_{max} = 327$ м^2.

Решение. Максимальное расстояние, на которое попадет вода из брандспойта $l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, будет при $\alpha = 45°$, $l_{max} = v_0^2/g$. Тогда максимальная площадь, которую можно полить, $S_{max} = \pi l_{max}^2 = \pi v_0^4/g^2$; $S_{max} = 327$ м^2.

3.30. Двое играют в мяч, бросая его друг другу. Какой наибольшей высоты достигнет мяч во время игры, если он от одного игрока к другому летит в течение времени $t = 2,0$ с?

Ответ: $H = 4,9$ м.

Решение. Мяч движется одновременно в горизонтальном и вертикальном направлениях. Если рассмотреть движение мяча вдоль оси y, то время падения равно времени подъема тела и равно половине времени полного движения t. Тогда $H = \frac{g}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{gt^2}{8} = 4,9$ м.

3.31. Камень, брошенный под углом к горизонту, упал на землю через $t = 4,0$ с. Чему равны высота и дальность полета камня, если известно, что во время движения его максимальная скорость была вдвое больше минимальной?

Ответ: $H = 20$ м, $S = 45$ м.

Решение. Максимальная скорость v_0 — начальная скорость движения камня, а минимальная — скорость камня в точке его максимального подъема $v_{min} = v_0 \cos\alpha$. По условию $v_0 = 2v_0 \cos\alpha$; $\cos\alpha = 0,5$; $\alpha = \arccos 0,5$. Высота максимального подъема (см. задачу 3.30) $H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{gt^2}{8}$; откуда $v_0 = \frac{gt}{2\sin\alpha}$.

Дальность полета $S = v_0 \cos\alpha \cdot t = \frac{gt^2 \cos\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{gt^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$; или же $S = \frac{gt^2}{2}\operatorname{ctg}(\arccos 0,5)$. В результате $H = 20$ м, $S = 45$ м.

3.32. Снаряд, вылетевший из пушки, разорвался на расстоянии S втрое большем, чем максимальная высота его подъема h. Под каким углом он вылетел?

Ответ: $\alpha = 53,1°$.

Решение. См. задачу 3.22.

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g};\quad S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g};\quad 3h = S;\quad \frac{3v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3};\quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = 53,1°.$$

3.33. Два тела брошены с одинаковой скоростью под углами α и $(90° - \alpha)$ к горизонту. Определите отношение наибольших высот подъема и дальностей полета этих тел.

Ответ: $\frac{h_1}{h_2} = \operatorname{tg}^2\alpha$; $\frac{S_1}{S_2} = 1$.

Решение. Наибольшие высоты подъема тел $h_1 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$;

$$h_2 = \frac{v_0^2 \sin^2(90° - \alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{2g};\quad \frac{h_1}{h_2} = \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Дальности полета тел: $S_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$; $S_2 = \frac{v_0^2 \sin 2(90° - \alpha)}{g} =$

$$= \frac{v_0^2 \sin(180° - 2\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g};\quad \frac{S_1}{S_2} = 1.$$

3.34. Астронавт на неизвестной планете обнаружил, что он может прыгнуть на максимальное расстояние $S = 15$ м по горизонтали, имея начальную скорость $v_0 = 3$ м/с. Какое ускорение свободного падения на этой планете?

Ответ: $g = 0,6$ м/с^2.

Решение. См. задачу 3.22.

Дальность полета $S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, где α — угол между направлением скорости астронавта v_0 и линией горизонта. Величина S максимальна при $\alpha = 45°$, тогда $g = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{S} = \frac{v_0^2}{S}$. $g = 0,6$ м/с^2.

3.35. Тело брошено под углом $\alpha = 60°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Определите моменты времени, когда скорость направлена под углом $\beta = 45°$ к горизонту.

Ответ: $t_1 = 0,37$ с; $t_2 = 1,39$ с.

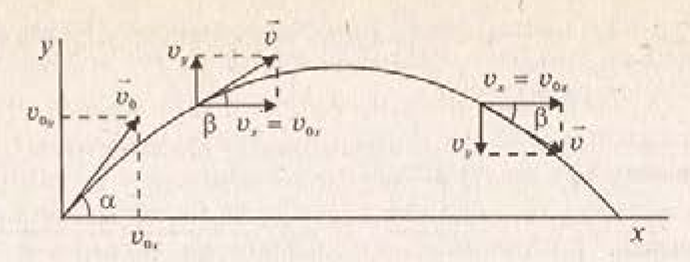


Рис. 3.9

Решение. $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = const$ (рис. 3.9). $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$;

$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$; $\pm \operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x}$; $\pm\operatorname{tg}\beta = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha}$.

Угол β может быть положительным (на подъеме) и отрицательным (на спуске). Тогда угол $\beta = 45°$ в моменты времени:

$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm v_0 \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{g}$; $t_1 = 0{,}37$ с; $t_2 = 1{,}39$ с.

3.36. На какой высоте вектор скорости тела, брошенного под углом $\alpha_0 = 45°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с, будет составлять с горизонтом угол $\beta = 30°$?

Ответ: $h = 6{,}8$ м.

Решение. См. задачу 3.35.

Вектор скорости тела будет составлять угол $\beta = 30°$ с линией горизонта в моменты времени $t_{1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm v_0 \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{g}$ на одной и той же высоте h.

$$h = y(t_1) = v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{g t_1^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha + v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{g} -$$

$$- \frac{v_0^2 \sin^2\alpha + 2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + v_0^2 \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta\right)\cos^2\alpha;$$

$h = 6{,}8$ м.

3.37. Камень брошен под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Через какое время камень будет на высоте $h = 1$ м?

Ответ: $t_1 = 0{,}27$ с, $t_2 = 0{,}75$ с.

Решение. Уравнение движения по оси y: $y = h = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$;

$\frac{gt^2}{2} - v_0 t \sin\alpha + h = 0$; $t_{1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}}{g}$; $t_1 = 0{,}27$ с;

$t_2 = 0{,}75$ с. На этой высоте камень будет дважды: при подъеме и при спуске.

3.38. Камень, брошенный под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, дважды был на одной высоте h: спустя время $t_1 = 3$ с и время $t_2 = 5$ с после начала движения. Найдите начальную скорость v_0 и высоту h.

Ответ: $v_0 = 78{,}4$ м/с; $h = 73{,}5$ м.

Решение. Используем уравнение движения по оси y:

$y = h = v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{g t_1^2}{2}$; $h = v_0 t_2 \sin\alpha - \frac{g t_2^2}{2}$. Из первого уравнения $v_0 = \frac{2h + g t_1^2}{2 t_1 \sin\alpha}$, подставим во второе уравнение $h = \frac{2h + g t_1^2}{2 t_1 \sin\alpha} \cdot t_2 \sin\alpha - \frac{g t_2^2}{2}$;

откуда $h = \frac{g t_1 t_2}{2} = 73{,}5$ м и $v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2\sin\alpha} = 78{,}4$ м/с.

3.39. Тело, брошенное под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, через время $t = 4$ с после начала движения имело вертикальную проекцию скорости $v_y = 9{,}8$ м/с. Найдите расстояние S между местом бросания и местом падения.

Ответ: $S = 283$ м.

Решение. Проекция скорости на ось y: $v_y = v_0 \sin\alpha - g t_1$, откуда начальная скорость $v_0 = \frac{v_y + g t_1}{\sin\alpha}$. Дальность полета $x = S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} =$

$= \frac{(v_y + g t_1)^2 \sin 2\alpha}{g \sin^2\alpha} = \frac{2(v_y + gt)^2 \operatorname{ctg}\alpha}{g} = 283$ м.

3.40. Камень брошен с башни, имеющей высоту h, с начальной скоростью v_0, направленной под углом α к горизонту. На каком расстоянии S от основания башни упадет камень?

Ответ: $S = \frac{v_0}{g}\cos\alpha\left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh}\right)$.

Решение. Начало координат на земле. Уравнения движения вдоль осей x и y: $x = v_0 t \cos\alpha$; $y = y_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$. В момент падения на землю $S = v_0 t \cos\alpha$; $0 = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$; откуда $t = \frac{S}{v_0 \cos\alpha}$;

$h + v_0 \frac{S \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} - \frac{gS^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = 0$; $gS^2 - 2Sv_0^2 \sin\alpha\cos\alpha - 2v_0^2 h\cos^2\alpha = 0$;

$S = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh}\right)$.

3.41. Мяч брошен из окна верхнего этажа здания с начальной скоростью $\upsilon_0 = 8$ м/с под углом $\alpha = 20°$ ниже линии горизонта. Он упал на землю через $t = 3$ секунды. а) На каком расстоянии S от основания здания упадет мяч? б) С какой высоты H он был брошен? в) Через какое время t_1 мяч опустится на $h = 10$ м от точки бросания?

Ответ: $S = 22{,}6$ м; $H = 52{,}3$ м; $t_1 = 1{,}18$ с.

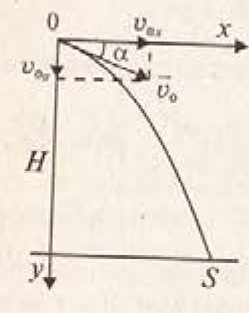


Рис. 3.10

Решение. а) $x = S = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$ (см. рис. 3.10); $S = 22{,}6$ м.

б) $y = H = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t + \dfrac{gt^2}{2}$; $H = 52{,}3$ м.

в) $y = h = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_1 + \dfrac{gt_1^2}{2}$;

$\dfrac{g}{2}t_1^2 + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_1 - h = 0$;

$t_1 = \dfrac{-\upsilon_0 \sin\alpha + \sqrt{(\upsilon_0 \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g}$; $t_1 = 1{,}18$ с.

3.42. Тело бросают с высоты $H = 4$ м под углом $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ к горизонту так, что к поверхности земли оно подлетает под углом $\beta = \dfrac{\pi}{3}$. Какое расстояние S по горизонтали пролетит тело?

Ответ: $S = \dfrac{2H}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} = 11{,}42$ м.

Решение. Выбираем оси x и y, как показано на рисунке 3.11. Координаты начального положения тела $x_0 = 0$, $y_0 = H$. Проекции начальной скорости на оси $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$ и $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$. Законы движения по осям x и y имеют вид:

$x(t) = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$; $y(t) = H + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - gt^2/2$.

Зависимость проекций скоростей от времени:

$\upsilon_x(t) = \upsilon_0 \cos\alpha$ и $\upsilon_y(t) = \upsilon_0 \sin\alpha - gt$.

Пусть t_1 — момент падения тела на землю. Тогда дальность полета тела $S = x(t_1) = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t_1$.

Рис. 3.11

В этот момент $y(t_1) = 0$, т. е.

$$H + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_1 - gt_1^2/2 = 0. \quad (1)$$

Значения проекции скоростей равны

$\upsilon_x(t_1) = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_y(t_1) = \upsilon_0 \sin\alpha - gt_1 < 0$.

Из условий задачи в момент $t = t_1$: $\upsilon_x(t_1) = \upsilon\cos\beta$, $\upsilon_y(t_1) = -\upsilon\sin\beta$.

Взяв отношение $\upsilon_y(t_1)/\upsilon_x(t_1)$, получаем

$\upsilon_y(t_1)/\upsilon_x(t_1) = (\upsilon_0 \sin\alpha - gt_1)/\upsilon_0 \cos\alpha$; $\upsilon_y(t_1)/\upsilon_x(t_1) = -(\upsilon\sin\beta)/(\upsilon\cos\beta)$.

$-\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - (gt_1)/\upsilon_0 \cos\alpha$, отсюда $t_1 = \dfrac{1}{g}(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha)\upsilon_0 \cos\alpha$.

Подставив в выражение (1), найдем:

$\upsilon_0^2 \cos^2\alpha = 2Hg/\left(\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha\right)$ и следовательно,

$S = 2H/(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) = 11{,}42$ м.

3.43. Пикирующий самолет сбрасывает бомбу с высоты H и поражает цель, удаляющуюся по земле со скоростью υ_2. На каком расстоянии S по горизонтали от цели была сброшена бомба, если в этот момент времени скорость самолета υ_1 направлена под углом α к горизонту?

Решение. Выберем координатные оси таким образом, чтобы в момент бросания бомбы $t = 0$ цель находилась по горизонтали на расстоянии S от начала координат, а самолет на высоте H (рис. 3.12).

Рис. 3.12

Начальная скорость бомбы совпадает со скоростью самолета. Проецируем ее на оси x и y: $\upsilon_{1x} = \upsilon_1 \cos\alpha$, $\upsilon_{1y} = -\upsilon_1 \sin\alpha$.

Уравнения движения бомбы в поле силы тяжести имеют вид:

$x_1(t) = \upsilon_1 \cos\alpha \cdot t$, $y_1(t) = H - \upsilon_1 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$.

Закон движения цели в данной системе координат:

$x_2(t) = S + \upsilon_2 t$; $y_2(t) = 0$.

В момент τ поражения цели x- и y-координаты цели и бомбы совпадают, т. е. $x_1(\tau) = x_2(\tau)$, $y_1(\tau) = y_2(\tau)$.

Тогда:

$$\begin{cases} \upsilon_1 \cos\alpha \cdot \tau = S + \upsilon_2\tau, \\ H - \upsilon_1 \sin\alpha \cdot \tau - \dfrac{g\tau^2}{2} = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$S = \frac{1}{g}(\upsilon_1 \cos\alpha - \upsilon_2)(\sqrt{\upsilon_1^2 \sin^2\alpha + 2gH} - \upsilon_1 \sin\alpha).$$

3.44. Самолет летит горизонтально со скоростью $\upsilon = 1440$ км/ч на высоте $H = 20$ км. Когда он пролетает над зенитной установкой, в него выпускают снаряд. Какова должна быть минимальная на-

чальная скорость снаряда v_0 и угол α его с горизонтом, чтобы он попал в самолет?

Ответ: $v_0 = 743$ м/с, $\alpha = 57°$.

Решение. Чтобы снаряд попал в самолет, необходимо, чтобы скорость самолета была равна горизонтальной (x) составляющей скорости снаряда $v_{0x} = v$. Минимальная начальная вертикальная (y) составляющая скорости снаряда должна быть равна $v_{0y} = \sqrt{2gH}$. Минимальная начальная скорость снаряда $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{v^2 + 2gH} \approx$ ≈ 743 м/с. Угол скорости снаряда с горизонтом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_{0y}}{v_{0x}} =$ $= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2gH}}{v} = 57°$.

3.45. Камень бросили со скоростью $v_0 = 19{,}6$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определите радиус кривизны траектории камня: 1) в верхней точке; 2) в момент падения на землю.

Ответ: $R_1 = 9{,}8$ м, $R_2 = 78{,}4$ м.

Решение. Радиус кривизны траектории можно определить, зная нормальное ускорение и скорость в данной точке траектории $R = \frac{v^2}{a_n}$. В верхней точке $v = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$; $a_n = g$, тогда $R_1 = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} = 9{,}8$ м. В точке падения на землю скорость $v_t = v_0$; $a_n = g\cos\alpha$ (рис. 3.13).

Тогда $R_2 = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha} = 78{,}4$ м.

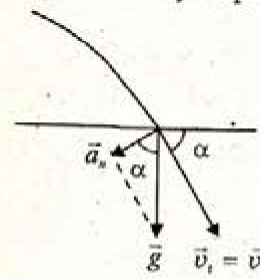


Рис. 3.13

3.46. Камень бросили под углом $60°$ к горизонту со скоростью 19,6 м/с. Каковы будут нормальное и касательное ускорения камня через 0,5 с после начала движения? Через сколько времени после начала движения нормальное к траектории ускорение камня будет максимальным?

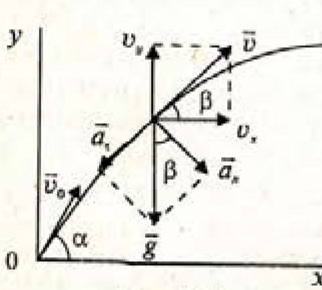


Рис. 3.14

Ответ: $a_n = 6{,}2$ м/с², $a_\tau = 7{,}6$ м/с², $t = 1{,}73$ с.

Решение. См. задачу 3.35.

$a_n = g\cos\beta$; $a_\tau = g\sin\beta$ (рис. 3.14).

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gt}{v_0\cos\alpha};\quad \beta = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gt}{v_0\cos\alpha}\right);$$

$$a_n = g\cos\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gt}{v_0\cos\alpha}\right) = 6{,}2\ \text{м/с}^2;$$

$$a_\tau = g\sin\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gt}{v_0\cos\alpha}\right) = 7{,}6\ \text{м/с}^2.$$

Нормальное ускорение достигнет максимума в верхней точке траектории, когда оно будет равно $\vec{g}$. Тогда $t = \frac{v_0\sin\alpha}{g} = 1{,}73$ с.

3.47. Мотоциклист въезжает на высокий край рва. Какую минимальную скорость должен иметь мотоциклист в момент отрыва от края, чтобы перескочить ров (рис. 3.15)?

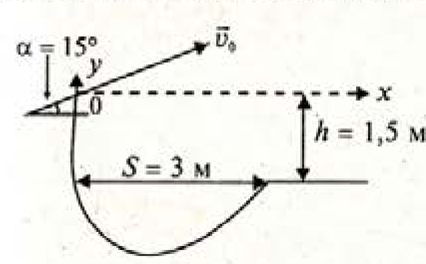


Рис. 3.15

Ответ: $v_0 = 16{,}2$ км/ч.

Решение. Начало координат помещаем в точку отрыва мотоциклиста от края рва, ось y направлена вверх, ось x — вправо. Уравнение движения мотоциклиста в момент приземления

$$x = v_0\cos\alpha \cdot t = S,$$

откуда $t = \frac{S}{v_0\cos\alpha}$,

$$y = v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = -h,\ \text{тогда}\ -h = v_0\sin\alpha\frac{S}{v_0\cos\alpha} - \frac{gS^2}{2v_0^2\cos^2\alpha};$$

$$-h = S\operatorname{tg}\alpha - \frac{gS^2}{2v_0^2\cos^2\alpha};\quad v_0 = \frac{S}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h + S\operatorname{tg}\alpha)}} = 4{,}5\ \text{м/с} = 16{,}2\ \text{км/ч}.$$

3.48. Теннисист, находясь на расстоянии $l = 12{,}6$ м от сетки, посылает мячик под углом α к горизонту. Чтобы пройти прямо над сеткой, мячик должен подняться на высоту $h = 0{,}33$ м. Под каким углом к горизонту летит мячик? Какова должна быть начальная скорость мячика?

Ответ: $\alpha = 3°$; $v_0 = 48{,}6$ м/с.

Решение. Высота подъема мячика $y = h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$, (1)

дальность полета до сетки $x = l = v_0\cos\alpha \cdot t_n$, где $t_n = (v_0\sin\alpha)/g$ — время подъема мячика до высоты h, тогда $l = \frac{v_0^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{g}$. (2)

Из (1) и (2) получаем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{l}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2h}{l} = 3^\circ$, $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}/\sin\alpha$; $\upsilon_0 = 48{,}6$ м/с.

3.49. Игрок посылает мяч с высоты $h = 1{,}2$ м над землей так, чтобы угол бросания был равен $\alpha = 45°$. На расстоянии $S = 47$ м от места бросания расположена сетка высотой $H = 7{,}3$ м. Какова должна быть минимальная скорость, чтобы мяч перескочил сетку?

Ответ: $\upsilon = \frac{S}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h + S\operatorname{tg}\alpha - H)}} = 23$ м/с.

Решение самостоятельное.

3.50. Баскетболист бросает мяч в кольцо. В момент броска мяч находится на высоте $h = 2{,}05$ м, а через $t = 1$ с падает в кольцо, расположенное на высоте $H = 3{,}05$ м. С какого расстояния от кольца (по горизонтали) произведен бросок, если мяч был брошен под углом $\alpha = 60°$ к горизонту?

Ответ: $S = 3{,}4$ м.

Решение. Уравнение движения мяча $S = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$;

$$H = h + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2};\quad \upsilon_0 = \frac{S}{t\cos\alpha};\quad H = h + \frac{St\sin\alpha}{t\cos\alpha} - \frac{gt^2}{2};$$

$$S = \frac{2(H - h) + gt^2}{2tg\alpha} = 3{,}4 \text{ м}.$$

3.51. Какое расстояние по горизонтали пролетит мяч, брошенный со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, если он ударится о потолок (рис. 3.16)? Высота потолка $h = 3$ м, удар упругий.

Ответ: $S = 5$ м.

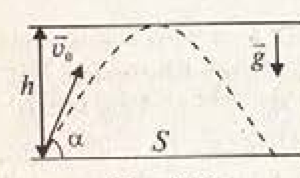


Рис. 3.16

Решение. Уравнение движения мяча по вертикали $h = \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$;

откуда $t = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} - \sqrt{\left(\frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 - \frac{2h}{g}}$.

Расстояние, пройденное мячом по горизонтали за все время движения $2t$

$$S = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot 2t = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}}\right),\quad \text{где}\quad h < \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g},\ \text{т. к.}$$

есть удар о потолок. В результате $S = 5$ м.

3.52. Два тела брошены одновременно из одной точки — одно вверх, другое вниз, оба с начальной скоростью $\upsilon_0 = 30$ м/с под

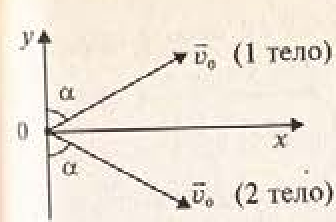


Рис. 3.17

углом $\alpha = 60°$ к вертикали. Найдите разность уровней, на которых будут находиться тела спустя время $t = 2$ с.

Ответ: $y_1 - y_2 = 60$ м.

Решение. Уравнения движения тел по оси y: $y_1 = \upsilon_0 t\cos\alpha - gt^2/2$; (рис. 3.17).

$$y_2 = -\upsilon_0 t\cos\alpha - gt^2/2;$$

$$\Delta y = y_1 - y_2 = 2\upsilon_0 t\cos\alpha.$$

3.53. Футбольный мяч посылается с начальной скоростью $\upsilon_0 = 10{,}7$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. На расстоянии $S = 6{,}0$ м от точки удара находится вертикальная стенка, о которую мяч упруго ударяется. Найдите расстояние от точки удара по мячу до точки его приземления.

Ответ: $x = 2$ м.

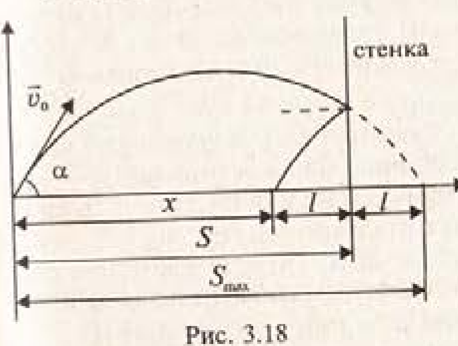


Рис. 3.18

Решение. Максимальное расстояние, которое мог бы пролететь мяч в отсутствии стенки, $S_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 10$ м.

Видно, что $S > \frac{S_{max}}{2}$, т. е. отражение от стенки происходит при снижении мяча (рис. 3.18). Из рисунка видно, что

$$l = S_{max} - S = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} - S;\quad x = S - l = 2S - \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 2 \text{ м}.$$

3.54. С какой высоты надо бросить тело в горизонтальном направлении, чтобы оно столкнулось в воздухе с другим телом, брошенным под углом $\alpha = 60°$ к горизонту с той же начальной скоростью из точки, отстоящей на расстоянии $S = 1{,}0$ м по горизонтали от места бросания первого тела?

Ответ: $h = 1{,}73$ м.

Рис. 3.19

Решение. Уравнения движения первого и второго тел (рис. 3.19). Для первого тела: $x_1 = \upsilon_0 t$; $y_1 = h - \frac{gt^2}{2}$. Для второго тела: $x_2 = S + \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$, $y_2 = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$.

В момент встречи $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$; $\upsilon_0 t = S + \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$, откуда $t = \frac{S}{2\upsilon_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$; $h - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$; $h = \frac{S\sin\alpha}{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1{,}73$ м.

3.55. Из точки A свободно падает тело. Одновременно из точки B под углом α к горизонту бросают другое тело (рис. 3.20) так, чтобы оба тела столкнулись в воздухе. Покажите, что угол α не зависит от начальной скорости тела, брошенного из точки B, и определите этот угол, если $H/l = 1{,}6$.

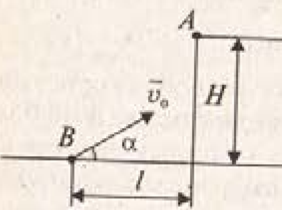


Рис. 3.20

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{l}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{H}{l} = 58^\circ$.

Решение самостоятельное.

3.56. Какой скоростью обладал лыжник при прыжке с трамплина, находящегося на вершине горы, имеющей уклон $\alpha = 45°$, если он приземлился на горе на расстоянии $S = 29$ м от вершины?

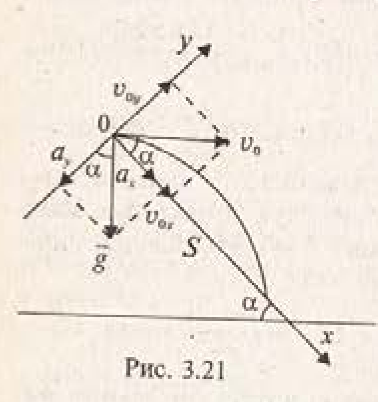


Рис. 3.21

Ответ: $\upsilon_0 = 10$ м/с.

Решение. Ось x направим вдоль наклонной плоскости, а ось y — перпендикулярно к ней (рис. 3.21). Проекции скорости υ_0: $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$. Полное ускорение равно ускорению свободного падения g, тогда $a_x = g\sin\alpha$; $a_y = -g\cos\alpha$.

Уравнения движения

$x = S = \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$; $y = \upsilon_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$. Для момента приземления на склон горы

$$x = S;\ S = \upsilon_0 t\cos\alpha + \frac{gt^2 \sin\alpha}{2};\ y = 0;\ \upsilon_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2\cos\alpha}{2} = 0,$$

откуда $t = \frac{2\upsilon_0 \operatorname{tg}\alpha}{g}$. $S = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha}{g} + \frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha}{g} = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha}{g\cos^2\alpha}$,

откуда $\upsilon_0 = \sqrt{\frac{gS\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}} = 10$ м/с.

3.57. С горы с уклоном $\alpha = 30°$ бросают мяч с начальной скоростью $\upsilon_0 = 9{,}8$ м/с перпендикулярно склону горы. Найдите время полета мяча. На каком расстоянии от точки бросания упадет мяч?

Ответ: $t = 2{,}3$ с; $S = 13$ м.

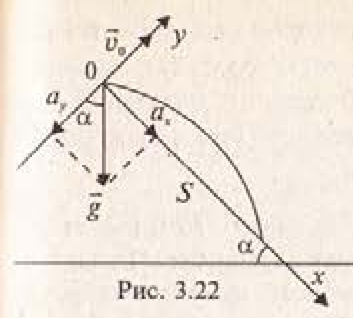


Рис. 3.22

Решение. Уравнения движения мяча (рис. 3.22): $\upsilon_x = a_x t = gt\sin\alpha$;

$\upsilon_y = \upsilon_0 - |a_y| t = \upsilon_0 - gt\cos\alpha$; $x = \frac{a_x t^2}{2}$;

$y = \upsilon_0 t - \frac{|a_y| t^2}{2}$. В момент падения на землю $\upsilon_0 t_п - \frac{gt_п^2 \cos\alpha}{2} = 0$; $t_п = \frac{2\upsilon_0}{g\cos\alpha} = 2{,}3$ с.

Дальность полета $x = S = \frac{gt_п^2 \sin\alpha}{2} = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha}{g\cos^2\alpha} = 13$ м.

3.58. Тело брошено со скоростью υ_0 под углом β к наклонной плоскости, которая образует с горизонтом угол α. Определите время полета t и максимальное удаление тела от наклонной плоскости h.

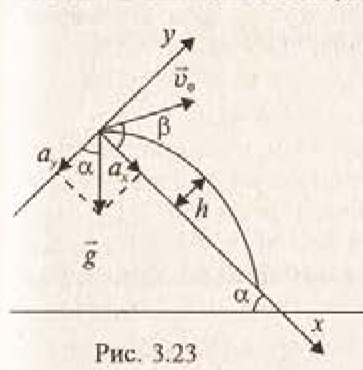


Рис. 3.23

Ответ: $t = \frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}$; $h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}{2g\cos\alpha}$.

Решение. См. задачу 3.56 и рис. 3.23.

$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \cos\beta$; $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\beta$;

$a_x = g\sin\alpha$; $a_y = -g\cos\alpha$;

$x = \upsilon_0 t\cos\beta + \frac{g\sin\alpha}{2}t^2$;

$y = \upsilon_0 t\sin\beta - \frac{g\cos\alpha}{2}t^2$.

Время полета t_1 находим из условия $y(t_1) = 0$:

$\upsilon_0 t_1 \sin\beta - \frac{g\cos\alpha}{2}t_1^2 = 0$; откуда $t_1 = \frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}$. В момент падения

$x(t_1) = S$, тогда $S = \upsilon_0 \cos\beta \frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g\cos\alpha} + \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}\right)^2$;

$S = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\beta\cos(\beta-\alpha)}{g\cos^2\alpha}$. Максимальное расстояние h находим из условия $y(t_2) = h$, t_2 — время подъема до высшей точки траектории, где $\upsilon_y(t_2) = 0$. $\upsilon_0 \sin\beta - gt_2 \cos\alpha = 0$; $t_2 = \frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}$.

В результате $h = \upsilon_0 \sin\beta \frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g\cos\alpha} - \frac{g\cos\alpha}{2}\left(\frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}\right)^2$; $h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}{2g\cos\alpha}$.

3.59. Мяч бросают вверх вдоль склона холма под углом $\beta = 60°$ к горизонту. На расстоянии $S = 30$ м от точки бросания он падает на землю. Угол наклона холма $\alpha = 30°$. Определите начальную скорость мяча. Сколько времени прошло между двумя положениями мяча на той высоте, на которой он упал?

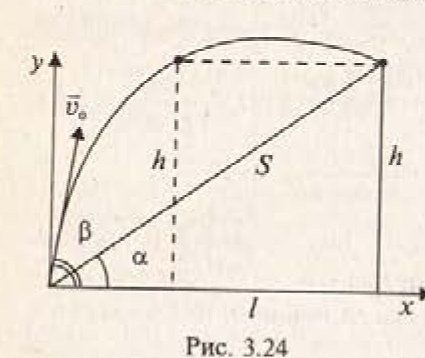


Рис. 3.24

Ответ: $v_0 = 21$ м/с, $\Delta t = 1{,}24$ с.

Решение. Уравнение движения мяча в момент падения на склон (рис. 3.24)

$$v_0 \sin\beta \cdot t - \frac{gt^2}{2} = h; \; h = S\sin\alpha; \quad (1)$$

$$v_0 \cos\beta \cdot t = l; \; l = S\cos\alpha. \quad (2)$$

Из (2) получим $t = \dfrac{S\cos\alpha}{v_0\cos\beta}$, подставим в (1):

$$v_0 \sin\beta \cdot \frac{S\cos\alpha}{v_0\cos\beta} - \frac{gS^2\cos^2\alpha}{2v_0^2\cos^2\beta} = S\sin\alpha;$$

$$v_0 = \cos\alpha\sqrt{\frac{gS}{2\cos\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)}} = 21 \text{ м/с}.$$

Определим моменты времени, когда мяч находится на одинаковой высоте h (из уравнения (1)):

$$\frac{gt^2}{2} - v_0\sin\beta\cdot t + 2S\sin\alpha = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{v_0\sin\beta \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\beta - gS\sin\alpha}}{g}.$$

Промежуток времени между двумя положениями мяча на высоте h, на которой он упал: $\Delta t = \dfrac{2}{g}\sqrt{v_0^2\sin^2\beta - 2gS\sin\alpha} = 1{,}24$ с.

3.60. Мяч бросают горизонтально со скоростью $v_0 = 14$ м/с с горы, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом. На каком наибольшем расстоянии от поверхности горы окажется мяч во время полета? Где он приземлится?

Ответ: $S = \dfrac{2v_0^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{g\cos\alpha} = 57$ м; $H = \dfrac{v_0^2\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}{2g} = 7{,}1$ м.

Решение самостоятельное.

4. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

4.1. Точка движется в плоскости, причем ее прямоугольные координаты определяются уравнениями $x = A\cos\omega t$, $y = A\sin\omega t$, где A и ω — постоянные. Какова форма траектории точки?

Решение. $x = A\cos\omega t$; $y = A\sin\omega t$. Уравнение траектории легко получить, если каждое выражение возвести в квадрат и их сложить $x^2 = A^2\cos^2\omega t$; $y^2 = A^2\sin^2\omega t$, тогда $x^2 + y^2 = A^2$ — окружность радиуса A.

4.2. Точка движется по окружности с постоянной скоростью $v = 50$ см/с. Вектор скорости изменяет направление на $\Delta\varphi = 30°$ за время $\Delta t = 2{,}0$ с. Каково нормальное ускорение?

Ответ: $a_n = 13$ см/с^2.

Решение. Нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{R}$. Учтем, что $v = \omega R$, где $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ — угловая скорость, тогда $R = \dfrac{v}{\omega} = \dfrac{v\cdot\Delta t}{\Delta\varphi}$, откуда $a_n = v\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, $\left(\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{6}\right)$, $a_n = 13$ см/с^2.

4.3. Конец минутной стрелки часов передвинулся за 1 минуту на 37 см. Какова длина стрелки?

Ответ: $l = 3{,}5$ м.

Решение. Линейная скорость конца стрелки $v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, где $\Delta S = 0{,}37$ м; $\Delta t = 60$ с. Угловая скорость стрелки $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t_1} = \dfrac{2\pi}{3600\,\text{с}}$, $\Delta t_1 = 1$ ч $= 3600$ с, учитывая, что $v = \omega l$, получим $l = \dfrac{v}{\omega}$,

$$l = \frac{\Delta S}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t_1}{2\pi} = \frac{0{,}37\cdot 3600}{60\cdot 6{,}28} = 3{,}5\text{ м}.$$

4.4. Минутная стрелка часов в три раза длиннее секундной. Каково отношение между линейными скоростями концов этих стрелок?

Ответ: $v_с / v_м = 20$.

Решение. Пусть длина секундной стрелки l, минутной $3l$. Линейная скорость секундной стрелки $v_с = \dfrac{2\pi l}{60}$, минутной $v_м = \dfrac{2\pi\cdot 3l}{3600}$, тогда $\dfrac{v_с}{v_м} = \dfrac{2\pi l}{60}\cdot\dfrac{3600}{2\pi\cdot 3l} = 20$.

4.5. Определите линейную скорость и ускорение, которыми обладает точка земной поверхности на широте 60° с. ш. и на полюсе, за счет суточного вращения Земли.

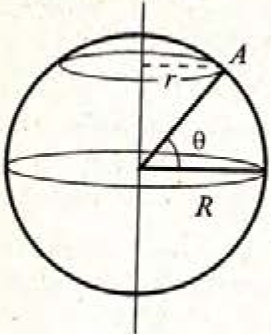


Рис. 4.1

Ответ: $\upsilon = 2{,}3\cdot 10^2$ м/с; $a = 1{,}7$ см/с^2.

Решение. Линейная скорость точки A равна (рис. 4.1) $\upsilon = \frac{2\pi r}{T}$, где $T = 1$ сутки $= 24$ ч $= 24 \cdot 3600$ с, $r = R\cos\theta$, R — радиус Земли, $R = 6380\cdot 10^3$ м.

$$\upsilon = \frac{2\pi R\cos\theta}{T} = 2{,}3\cdot 10^2 \text{ м/с};$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{4\pi^2 R\cos\theta}{T^2} = 1{,}7 \text{ см/с}^2.$$

4.6. Диск начинает движение из состояния покоя и вращается равноускоренно. Каким будет угол между вектором скорости и вектором ускорения произвольной точки диска, когда он сделает один оборот?

Ответ: $\alpha = 85°$.

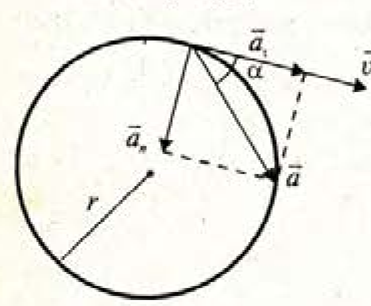


Рис. 4.2

Решение. Полное ускорение любой точки диска a, линейная скорость υ (рис. 4.2). $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}$; $a_n = \frac{\upsilon^2}{r}$. Учитывая, что движение равноускоренное, $\upsilon = a_\tau t$, а путь, пройденный точкой по окружности радиусом r, равен $S = \frac{a_\tau t^2}{2} = 2\pi r N$, где N — число оборотов. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\upsilon^2}{r\cdot a_\tau} = \frac{a_\tau^2 t^2}{r\cdot a_\tau} = \frac{a_\tau t^2}{r} = 4\pi N$, $\alpha = \operatorname{arctg} 4\pi N$, (при $N = 1$) $\alpha = 85°$.

4.7. Вал начинает вращение из состояния покоя и в первые $t = 10$ с совершает $N = 50$ оборотов. Считая вращение вала равноускоренным, определите угловое ускорение.

Ответ: $\beta = 6{,}3$ рад/с^2.

Решение. Угловое ускорение β можно найти, учитывая, что движение равноускоренное, из формулы $\varphi = \frac{\beta t^2}{2}$; $2\pi N = \frac{\beta t^2}{2}$, откуда $\beta = \frac{4\pi N}{t^2} = 6{,}3\text{с}^{-2}$.

4.8. Некоторое тело начинает вращаться с постоянным угловым ускорением $\beta = 0{,}04$ рад/с^2. Через сколько времени после начала вращения полное ускорение какой-либо точки тела будет направлено под углом $\alpha = 76°$ к направлению скорости этой точки?

Ответ: $t = 10$ с.

Решение. $\operatorname{tg}\alpha = a_n/a_\tau$ (рис. 4.2) $a_n = \omega^2 r$; $\omega = \beta t$; $a_n = \beta^2 t^2 r$; $a_\tau = \beta r$; тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\beta^2 t^2 r}{\beta r}$, откуда $t = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\beta}} = 10$ с.

4.9. Найдите радиус R маховика, если при вращении линейная скорость точек на его ободе $\upsilon_1 = 6$ м/с, а точек, находящихся на расстоянии $r = 15$ см ближе к оси вращения, $\upsilon_2 = 5{,}5$ м/с.

Ответ: $R = 1{,}8$ м.

Решение. Угловая скорость всех точек обода одинакова:

$$\omega = \frac{\upsilon_1}{r_1} = \frac{\upsilon_2}{r_2};\quad \frac{\upsilon_1}{R} = \frac{\upsilon_2}{R - r},\ \text{откуда}\ R = \frac{\upsilon_1 r}{\upsilon_1 - \upsilon_2} = 1{,}8 \text{ м}.$$

4.10. Точка движется по окружности радиусом $R = 20$ см с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 5{,}0$ см/с^2. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение будет равно касательному?

Ответ: $t = 2$с.

Решение. Согласно условию задачи $a_\tau = a_n$; $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$; $\upsilon = a_\tau t$; тогда $a_\tau = \frac{a_\tau^2 t^2}{R}$, откуда $t = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = 2$с.

4.11. Материальная точка движется по окружности радиусом $R = 20$ см равноускоренно с касательным ускорением $a_\tau = 5{,}0$ см/с^2. Через какое время t после начала движения центростремительное ускорение a_n будет больше a_τ в $n = 2$ раза?

Ответ: $t = \sqrt{\frac{nR}{a_\tau}} = 2{,}78$ с.

Решение самостоятельное.

4.12. Материальная точка, двигаясь равноускоренно по окружности радиусом $R = 1$м, прошла за время $t_1 = 10$ с путь $S = 50$ м. С каким центростремительным ускорением a_n двигалась точка спустя время $t_2 = 5$с после начала движения?

Ответ: $a_n = 25$ м/с^2.

Решение. Движение равноускоренное, $S=\frac{a_\tau t_1^2}{2}$, откуда $a_\tau=\frac{2S}{t_1^2}$. Скорость в момент времени t_2 равна $\upsilon=a_\tau t_2=\frac{2St_2}{t_1^2}$. Центростремительное ускорение в этот момент $a_n=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{4S^2t_2^2}{Rt_1^4}=25\text{ м/с}^2$.

4.13. Поезд выезжает на закругленный участок пути с начальной скоростью $\upsilon_0=54$ км/ч и проходит путь $S=600$ м за время $t=30$ с, двигаясь равноускоренно. Радиус закругления $R=1{,}0$ км. Определить скорость и ускорение в конце этого пути.

Ответ: $\upsilon=90$ км/ч; $a=0{,}71\text{ м/с}^2$.

Решение. При равноускоренном движении $S=\frac{\upsilon_0+\upsilon}{2}t$, где $\frac{\upsilon_0+\upsilon}{2}=\upsilon_{ср}$, тогда $\upsilon=\frac{2S}{t}-\upsilon_0=90$ км/ч — скорость в конце пути.

Ускорение в конце пути $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$; $a_\tau=\frac{\upsilon-\upsilon_0}{t}$; $a_n=\frac{\upsilon^2}{R}$; откуда $a=\sqrt{\frac{(\upsilon-\upsilon_0)}{t^2}+\frac{\upsilon^4}{R^2}}=0{,}7\text{ м/с}^2$.

4.14. Вал радиусом R может вращаться около горизонтальной оси. На вал намотана невесомая нерастяжимая нить, на конце которой висит некоторый груз. В начальный момент груз и вал неподвижны. Груз начинает опускаться с постоянным ускорением a_0 и приводит во вращение вал. Найдите полное ускорение точек обода колеса как функцию высоты h, на которую опускается груз.

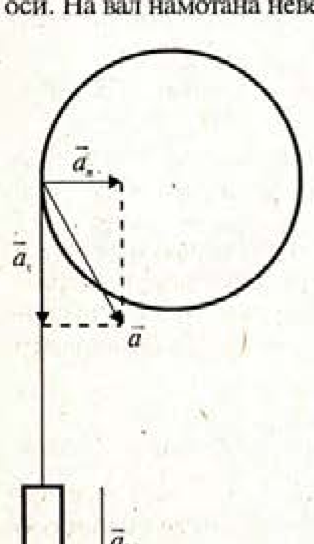


Рис. 4.3

Ответ: $a=\frac{a_0}{R}\sqrt{R^2+4h^2}$.

Решение. Полное ускорение $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$ (рис. 4.3). $a_\tau=a_0$, скорость груза $\upsilon=a_0t$, нормальное ускорение точки на ободе вала $a_n=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{a_0^2t^2}{R}$, тогда $a=\sqrt{a_0^2+\frac{a_0^4t^4}{R^2}}$. Высота падения груза

$h=\frac{a_0t^2}{2}$, тогда $t=\sqrt{\frac{2h}{a_0}}$ и $a=\frac{a_0}{R}\sqrt{R^2+4h^2}$.

4.15. Ступенчатый шкив с радиусами $r=0{,}25$ м и $R=0{,}50$ м приводится во вращение грузом, опускающимся с постоянным ускорением $a=2\text{ м/с}^2$ (рис. 4.4). Определите модуль и направление ускорения точки M в тот момент, когда груз пройдет путь $S=100$ см.

Ответ: $a_M=32\text{ м/с}^2$, $\alpha=83°$ к вертикали.

Решение. Полное ускорение точки M равно (рис. 4.4) $a_M=\sqrt{a_{\tau_M}^2+a_{n_M}^2}$. Тангенциальное ускорение тела на шкиве радиусом r $a_\tau=a=\beta r$; $\beta=\frac{a}{r}$. Тангенциальное ускорение точки $a_{\tau_M}=\beta R=\frac{a}{r}R$.

Нормальное ускорение точки M $a_{n_M}=\frac{\upsilon_M^2}{R}$.

Угловая скорость $\omega=\frac{\upsilon_M}{R}=\beta t$. Время движения найдем из $S=\frac{at^2}{2}$; $t=\sqrt{\frac{2S}{a}}$. Тогда

Рис. 4.4

$\upsilon_M=\beta tR=\frac{a}{r}\sqrt{\frac{2S}{a}}R=\frac{R}{r}\sqrt{2aS}$ и

$a_{n_M}=\frac{\upsilon_M^2}{R}=\frac{2aSR}{r^2}$. $a_M=\sqrt{\frac{a^2}{r^2}R^2+\frac{4a^2S^2R^2}{r^4}}=\frac{aR}{r^2}\sqrt{r^2+4S^2}=32\text{ м/с}^2$.

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a_{n_M}}{a_{\tau_M}}=\operatorname{arctg}\frac{2aSRr}{r^2aR}=\operatorname{arctg}\frac{2S}{r}=83°$.

4.16. Колесо радиусом $R=0{,}50$ м катится без скольжения по горизонтальной дороге со скоростью $\upsilon=1{,}0$ м/с. Определите скорость и ускорение точек, лежащих на концах вертикального и горизонтального диаметров, а также на концах диаметра, составляющего угол $\alpha=30°$ с вертикальным диаметром.

Ответ: $\upsilon_1=0$ м/с; $\upsilon_2=2$ м/с; $\upsilon_3=1{,}4$ м/с; $\upsilon_4=1{,}4$ м/с; $\upsilon_5=0{,}52$ м/с; $\upsilon_6=1{,}93$ м/с; $a=2\text{ м/с}^2$ для всех точек.

Решение. Когда колесо катится по земле, все его точки участвуют одновременно в двух движениях: поступательном со скоростью υ, и вращательном, вокруг мгновенной оси вращения с линейной (касательной) скоростью $\upsilon_л$.

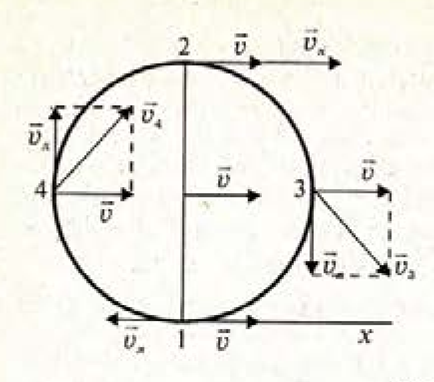


Рис. 4.5

При качении без проскальзывания для любой точки i $\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_л$ (рис. 4.5). Для точки 1 мгновенная скорость $\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_л = 0$, $v_1 = v - v_л = 0$; $v_л = v$.

Для точки 2 $v_2 = v + v_л = 2v = 2$ м/с.

Для точек 3 и 4 $v_3 = v_4 = \sqrt{v^2 + v_л^2} = v\sqrt{2} = 1,4$ м/с.

Для точки 5 $v_5 = \sqrt{v^2 + v_л^2 - 2v_л v\cos\alpha} = 2v\sin\frac{\alpha}{2} = 0,52$ м/с.

Для точки 6 $v_6 = \sqrt{v^2 + v_л^2 + 2v_л v\cos\alpha} = 2v\cos\frac{\alpha}{2} = 1,93$ м/с.

Ускорение всех точек одинаково $a = a_n = \frac{v_л^2}{R} = 2$ м/с^2.

4.17. Сверху заднего колеса велосипеда устанавливают крыло, защищающее седока от слетающей с колеса грязи. Почему возможно попадание этой грязи на седока, ведь колесо и велосипедист движутся с одинаковой скоростью?

Решение. Верхние точки колеса движутся со скоростью большей, чем скорость велосипеда (см. задачу 4.16.). Поэтому частицы грязи, слетающие с верхней части колеса, вполне могут догнать велосипедиста.

4.18. Мальчик вращает камень, привязанный к веревке длиной $l = 0,5$ м, в вертикальной плоскости с частотой $n = 3,0$ с$^{-1}$. На какую высоту взлетел камень, если веревка оборвалась в тот момент, когда скорость была направлена вертикально вверх?

Ответ: $h = 4,5$ м.

Решение. Линейная скорость вращающегося камня $v = \omega l = 2\pi nl$.

Высота, на которую поднялся камень, $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2\pi^2 n^2 l^2}{g} = 4,5$ м.

4.19. Кривошип OA, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 2,5$ рад/с, приводит в движение колесо радиуса $r = 5,0$ см, катящееся по неподвижному колесу радиуса $R = 15$ см. Найти скорость точки B (рис. 4.6).

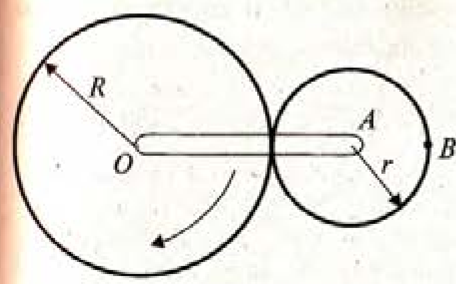


Рис. 4.6

Ответ: $v_B = 1$ м/с.

Решение. Линейная скорость точки A равна $v_A = \omega(r + R)$. Тогда линейная скорость точки B равна $v_B = 2v_A$ (см. задачу 4.16). $v_B = 2\omega(r + R) = 1$ м/с.

4.20. Цилиндрический каток радиусом $R = 10$ см помещен между двумя параллельными рейками. Рейки движутся в одну сторону со скоростями $v_1 = 6,0$ м/с и $v_2 = 4,0$ м/с. Какова скорость его центра, если проскальзывание отсутствует? Какова угловая скорость вращения катка? Решите задачу для случая, когда скорости реек направлены в разные стороны.

Ответ: 1) $v_ц = 5$ м/с; $\omega = 10$ с$^{-1}$; 2) $v_ц = 1$ м/с; $\omega = 50$ с$^{-1}$.

Решение. Цилиндрический каток участвует в двух движениях: вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω и движется поступательно со скоростью v. Вращение приводит к тому, что скорость одной из реек уменьшается на величину ωR (линейная скорость на окружности цилиндра), а скорость другой — увеличивается на ту же величину:

1) $v_1 = v_ц + \omega R$; $v_2 = v_ц - \omega R$. Отсюда

$$v_ц = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = 5 \text{ м/с}; \quad \omega = \frac{v_1 - v_2}{2R} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

2) Когда скорости реек направлены в разные стороны,

$$v_1 = v_ц + \omega R; \; -v_2 = v_ц - \omega R; \; v_ц = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) = 1 \text{ м/с}; \; \omega = \frac{v_1 + v_2}{2R} = 50 \text{ с}^{-1}.$$

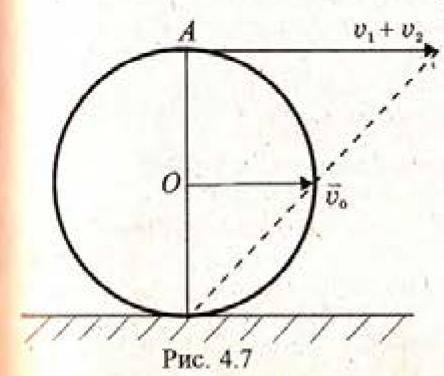


Рис. 4.7

4.21. Шестеренка радиуса R помещена между двумя параллельными зубчатыми рейками. Рейки движутся в разные стороны со скоростями v_1 и v_2. Сколько оборотов n делает шестеренка в единицу времени?

Ответ: $n = (v_1 + v_2)/4\pi R$.

Решение. Считаем, что нижняя рейка неподвижна, а верхняя катится слева направо со скоростью

$v_1 + v_2$ (рис. 4.7). Движение колеса — сумма двух движений: поступательного центра масс со скоростью v_0 и вращения вокруг оси O. При движении без скольжения линейная скорость колеса $v = v_0$ (см. задачу 4.16). Тогда скорость точки A равна $v_A = v + v_0 = 2v_0 = v_1 + v_2$.

Учтем, что $v = v_0 = \dfrac{2\pi R}{T}$, откуда $T = \dfrac{4\pi R}{v_1 + v_2}$, $n = \dfrac{1}{T} = \dfrac{v_1 + v_2}{4\pi R}$.

4.22. Мальчик держит один конец доски, а другой ее конец лежит на цилиндре. Доска находится в горизонтальном положении. Мальчик двигает доску вперед, вследствие чего цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости, доска по цилиндру также не скользит. Какой путь должен пройти мальчик до цилиндра, если длина доски равна l?

Ответ: $2l$.

Решение. Точка, касающаяся доски, движется со скоростью вдвое большей, чем скорость оси цилиндра. Пока мальчик, толкая доску, пройдет путь l, цилиндр передвинется на расстояние $l/2$. Таким образом, чтобы дойти до цилиндра мальчик должен пройти расстояние $2l$.

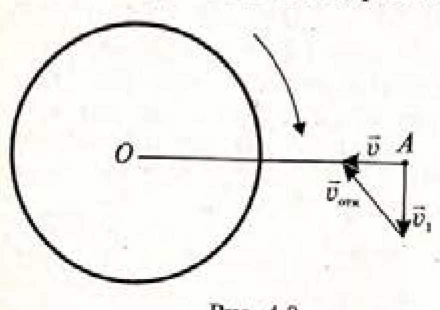


Рис. 4.8

4.23. Круглая горизонтальная платформа вращается вокруг своей оси с частотой $n = 30\,\text{мин}^{-1}$. Шар катится в направлении AO со скоростью $v = 7{,}0\,\text{м/с}$ (рис. 4.8). Найдите скорость шара относительно платформы в момент, когда $|AO| = 8{,}0\,\text{м}$.

Ответ: $v_{отн} = 26\,\text{м/с}$.

Решение. Скорость шара относительно платформы $\vec{v}_{отн} = \vec{v} - \vec{v}_1$, где $v_1 = 2\pi n \cdot OA$. В скалярном виде $v_{отн} = \sqrt{v^2 + v_1^2} = \sqrt{v^2 + 4\pi^2 n^2 \cdot OA^2} = 26\,\text{м/с}$.

4.24. Пропеллер самолета радиусом $R = 1{,}5\,\text{м}$ вращается с частотой $n = 2{,}0 \cdot 10^3\,\text{мин}^{-1}$, причем посадочная скорость самолета относительно земли равна $v = 161\,\text{км/ч}$. Какова скорость точки на конце пропеллера? Какова траектория движения этой точки?

Ответ: $u = \left(4\pi^2 n^2 R^2 + v^2\right)^{1/2} = 317\,\text{м/с}$, винтовая линия с шагом $h = \dfrac{v}{n} = 1{,}34\,\text{м}$.

Решение самостоятельное.

4.25. Шкив диаметром 20 см делает 300 оборотов за 3 мин. Определить период вращения, угловую и линейную скорости точки на ободе шкива.

Ответ: $T = 0{,}6$ с, $\omega = 10{,}5\,\text{рад/с}$, $v = 1{,}05\,\text{м/с}$.

Решение. Период вращения шкива $T = \dfrac{t}{N} = \dfrac{180}{300} = 0{,}6$; угловая скорость $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 10{,}5\,\text{рад/с}$, линейная скорость $v = \omega\dfrac{d}{2} = 1{,}05\,\text{м/с}$.

4.26. Вал начинает вращаться и в первые 10 с совершает 50 оборотов. Считая вращение вала равноускоренным, определите угловое ускорение и конечную угловую скорость.

Ответ: $\beta = 6{,}28\,\text{рад/с}^2$; $\omega = 62{,}8\,\text{рад/с}$.

Решение. Движение равноускоренное, тогда

$$\varphi = 2\pi N = \frac{\beta t^2}{2};\quad \beta = \frac{4\pi N}{t^2} = 6{,}28\,\text{рад/с}^2;\quad \omega = \beta t = 62{,}8\,\text{рад/с}.$$

4.27. Колесо вращается по закону $\varphi = 4 + 5t - t^3$. Найдите в конце первой секунды вращения угловую скорость колеса, а также линейную скорость, полное ускорение и его направление для точек, лежащих на ободе колеса. Радиус колеса $R = 20\,\text{см}$.

Ответ: $\omega = 2\,\text{рад/с}$, $v = 0{,}4\,\text{м/с}$, $a = 1{,}44\,\text{м/с}^2$, $\alpha = 33{,}6°$.

Решение. Угловая скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = 5 - 3t^2$; $\omega(t = 1c) = 2\,\text{рад/с}$;

$v = \omega R = 0{,}4\,\text{м/с}$. Угловое ускорение $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = -6t$; $\beta = -6\,\text{рад/с}^2$.

Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где $a_\tau = \beta R$; $a_n = \omega^2 R$, тогда

$a = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$; $a = 1{,}44\,\text{м/с}^2$.

Направление полного ускорения определим, найдя угол α между касательной к траектории и ускорением

$$\cos\alpha = \frac{|a_\tau|}{a} = \frac{\beta R}{R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}} = \frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2 + \omega^4}},\quad \cos\alpha = 0{,}83,\quad \alpha = 33{,}6°.$$

4.28. Тело вращается так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $\omega = 2 + 0{,}5t$. Найти полное число оборотов, совершенных телом. за 20с

Ответ: $N = 22$.

Решение. Возможны два пути решения:

1) $\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega dt = \int_0^{20} (2+0,5t)dt = \left(2t + \frac{0,5t^2}{2}\right)\Big|_0^{20} = 140$ рад. Полное число оборотов тела $N = \frac{\varphi}{2\pi}$; $N = 22$.

2) Движение равноускоренное. Общий вид скорости $\omega = \omega_0 + \beta t$, сравнив с $\omega = 2 + 0,5t$, получим $\omega_0 = 2$ рад/с, $\beta = 0,5$ рад/с. Тогда

$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta} = 140$ рад; $N = \frac{\varphi}{2\pi} \approx 22$.

4.29. Диск вращается с угловым ускорением $\beta = -2\,с^{-2}$. Сколько оборотов N сделает диск при изменении частоты вращения от $n_1 = 240\,мин^{-1}$ до $n_2 = 90\,мин^{-1}$? Найдите время Δt, в течение которого это произойдет.

Ответ: $N = 22$, $\Delta t = 7,85$ с.

Решение. $n_1 = 240\,мин^{-1} = 4\,с^{-1}$; $n_2 = 90\,мин^{-1} = 1,5\,с^{-1}$;

$$\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\beta} = \frac{4\pi^2(n_2^2 - n_1^2)}{2\beta};\quad N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\pi(n_2^2 - n_1^2)}{\beta} = 22;$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \beta\Delta t;\quad \Delta t = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\beta} = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{\beta};\quad \Delta t = 7,85\,с.$$

4.30. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 2 рад/с^2. Через 0,5 с после начала движения полное ускорение колеса стало $a = 13,6$ м/с^2. Найдите радиус колеса.

Ответ: $R = 6,1$ м.

Решение. Смотри задачу 4.27.

Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; $a_\tau = \beta R$; $a_n = \omega^2 R$; $\omega = \beta t$, тогда $a = \beta R\sqrt{1+\beta^2 t^4}$, откуда $R = \frac{a}{\beta\sqrt{1+\beta^2 t^4}}$, $R = 6,1$ м.

4.31. Колесо при вращении имеет начальную частоту $n_0 = 5\,с^{-1}$, после торможения его частота уменьшилась до $n = 3\,с^{-1}$. Найдите угловое ускорение колеса и число оборотов, сделанных им за это время. $t = 60c$

Ответ: $\beta = 0,21$ рад/с, $N = 240$.

Решение. Уравнение движения колеса:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\beta t^2}{2}; \quad (1)$$

$$\omega = \omega_0 - \beta t. \quad (2)$$

Поскольку $\varphi = 2\pi N$ и $\omega = 2\pi n$, преобразуем уравнение (2):

$2\pi n = 2\pi n_0 - \beta t$, откуда: $\beta = \frac{2\pi(n_0 - n)}{t}$; $\beta = 0,21$ рад/с^2,

учитывая (1) и (2), находим полное число оборотов:

$$N = n_0 t - \frac{\beta t^2}{4\pi};\quad N = 240.$$

4.32. На горизонтальной оси вращаются со скоростью 3000 об/мин два тонких диска, укрепленных на расстоянии $S = 1$ м друг от друга. Пуля, летящая параллельно оси вращения, пробивает оба диска, причем вторая пробоина оказалась смещенной относительно первой на угол 45°. Пробив диски, пуля углубляется в мишень на $d = 60$ см. Определите: 1) скорость пули во время движения ее между дисками, считая скорость постоянной; 2) время движения пули в мишени; 3) ускорение пули в мишени.

Ответ: $v = 400$ м/с, $t = 0,003$ с, $a = -133\cdot 10^3$ м/с^2.

Решение. За время движения пули между дисками они поворачиваются на $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Время движения пули между дисками определяется из условия $\omega = 2\pi n = \frac{\varphi}{t}$, откуда $t = \frac{\varphi}{2\pi n}$.

Тогда скорость движения пули $v = \frac{S}{t} = \frac{S\cdot 2\pi n}{\varphi} = 400$ м/с.

Ускорение движения пули в мишени можно определить из соотношения $v^2 = -2ad$, откуда $a = -\frac{v^2}{2d} = -133\cdot 10^3$ м/с^2. Тогда время движения пули в мишени $t_1 = -v/a = 0,003$ с.

КИНЕМАТИКА

Уровень II

1. Человек бежит по эскалатору. В первый раз он насчитал $n_1 = 50$ ступенек, во второй раз, двигаясь в ту же сторону со скоростью втрое большей, он насчитал $n_2 = 75$ ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

Ответ: $n = 100$.

Решение. Пусть u — скорость человека относительно эскалатора, l — длина эскалатора, n — число ступенек на нем. Предположим, что человек бежит вниз. Время его пребывания на эскалаторе равно $l/(v+u)$, путь, пройденный по эскалатору, $ul/(v+u)$, а число ступенек, которое он насчитал, $n_1 = \frac{ul}{v+u}\cdot\frac{n}{l}$. Число ступе-

нек, которое он насчитал во втором случае, $n_2 = \frac{3ul}{v+3u}\cdot\frac{n}{l}$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{ul}{v+u}\cdot\frac{n}{l} = n_1; \\ \frac{3ul}{v+3u}\cdot\frac{n}{l} = n_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+\frac{v}{u} = \frac{n}{n_1}; \\ 1+\frac{1}{3}\frac{v}{u} = \frac{n}{n_2}; \end{cases}$$

откуда $n = \frac{2n_1n_2}{3n_1 - n_2} = 100$.

2. Из пункта A на берегу канала с неподвижной водой надо попасть в пункт B на противоположном берегу (рис. 1). Человек плывет через канал на лодке со скоростью v_1, а далее идет пешком со скоростью v_2. При каком соотношении углов α_1 и α_2 он быстрее всего попадет из A в B?

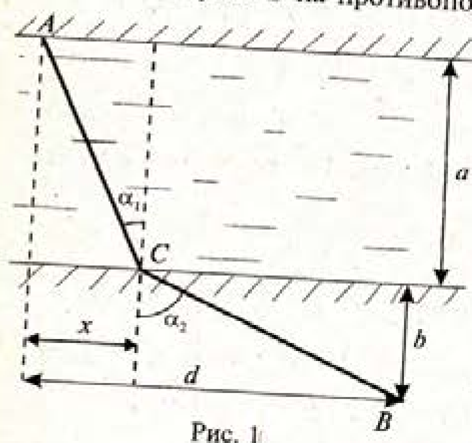


Рис. 1

Решение. Время движения лодки от A до C:

$$t_1 = \sqrt{x^2 + a^2}/v_1.$$

Время движения от C до B

$$t_2 = \sqrt{(d-x)^2 + b^2}/v_2.$$

Полное время движения

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v_2}.$$ Условие экстремума $\frac{dt}{dx} = 0$.

Тогда $\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0$.

Так как $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sin\alpha_1$ и $\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \sin\alpha_2$, то

$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$, следовательно $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$.

3. Шарик движется между двумя массивными вертикальными стенками, соударяясь с ними. Одна из стенок закреплена, а вторая удаляется от нее с постоянной скоростью $u = 0{,}5$ м/с. Считая движение шарика все время горизонтальным, а удары о стенки абсолютно упругими, найдите его окончательную скорость после 15-го удара, если начальная скорость $v_0 = 20$ м/с.

Ответ: $v = 5$ м/с.

Решение. Перейдем в систему отсчета, в которой стенка покоится. Здесь скорость шарика до удара равна $v_0 - u$. После упругого удара скорость только поменяет знак и станет равной $-(v_0 - u)$. Скорость шарика относительно неподвижной системы отсчета будет равна $v = v_0 - 2u$. Слагаемое $-2u$ будет появляться после каждого удара о движущуюся стенку, то есть $v = v_0 - 2nu$, где n — число ударов о движущуюся стенку. Тогда после 15-го удара $v = 20 - 2\cdot 15\cdot 0{,}5 = 5$ м/с.

4. Две свечи, высота каждой из которых в начальный момент была равна h, находятся на растоянии d друг от друга. Расстояние между каждой свечой и ближайшей к ней стеной также равно d (рис. 2). С какой скоростью движутся тени от свечей по стенам, если одна свеча сгорает за время t_1, а другая — за время t_2?

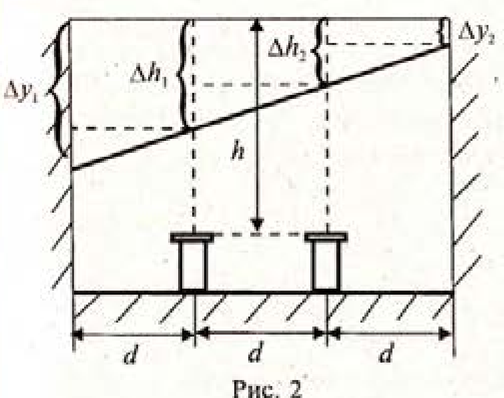


Рис. 2

Решение. Пусть за время Δt высота первой свечи уменьшилась на Δh_1, а второй на Δh_2 (рис. 2). В этом случае тень от первой свечи на левой стене опустится на расстояние

$$\Delta y_1 = \Delta h_1 + (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\Delta h_1 - \Delta h_2.$$

Тень на правой стене опустится на расстояние

$$\Delta y_2 = \Delta h_2 - (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\Delta h_2 - \Delta h_1.$$

Учтем, что $\Delta h_1 = \frac{h}{t_1}\Delta t$; $\Delta h_2 = \frac{h}{t_2}\Delta t$, тогда

$$v_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta t} = \frac{2h}{t_1} - \frac{h}{t_2} = \frac{h}{t_1t_2}(2t_2 - t_1); \quad v_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta t} = \frac{2h}{t_2} - \frac{h}{t_1} = \frac{h}{t_1t_2}(2t_1 - t_2).$$

Пусть $t_2 > t_1$, тогда $v_1 > 0$, а v_2 может быть отрицательной величиной, т. е. на правой стене тень может перемещаться вверх.

5. Спортсмен толкает ядро. Под каким углом к горизонту должна быть направлена скорость, чтобы ядро упало как можно дальше? Начальная скорость ядра $v_0 = 13{,}5$ м/с, высота точки бросания ядра $H = 2$ м.

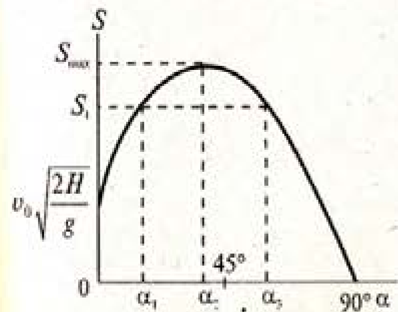


Рис. 3

Ответ: $\alpha_0 = 42{,}2°$,

$S_{max} = 20{,}5$ м.

Решение. Уравнение движения ядра $y = y_0 + v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}$;

$y_0 = H$; $x = v_0 t \cos\alpha$. В момент падения ядра на землю $t = t_1$

$y = y(t_1) = 0$; $x = x(t_1) = S$. $H + v_0 t_1 \sin\alpha - \dfrac{gt_1^2}{2} = 0$;

$$S = v_0 t_1 \cos\alpha; \tag{1}$$

откуда $t_1 = \dfrac{S}{v_0 \cos\alpha}$, тогда $S(\alpha) = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{g}\left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gH}\right)$.

Чтобы найти максимум $S(\alpha)$ нужно взять производную $\dfrac{dS}{d\alpha}$ и приравнять ее нулю $\dfrac{dS}{d\alpha} = 0$. Можно поступить проще. Нарисуем график $S(\alpha)$ (рис. 3) и найдем значения углов α_1 и α_2, при которых дальность равна S_1. Из уравнений (1) с учетом $\cos^{-2}\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$

получаем $\mathrm{tg}^2\alpha - \dfrac{2v_0^2}{gS_1}\mathrm{tg}\,\alpha + 1 - \dfrac{2v_0^2 H}{gS_1^2} = 0$,

откуда $\mathrm{tg}\,\alpha_{1,2} = \dfrac{v_0^2}{gS_1}\left(1 \mp \sqrt{1 - \left(\dfrac{gS_1}{v_0^2}\right)^2 + \dfrac{2gH}{v_0^2}}\right)$.

При $S_1 = S_{max}$ решение должно быть только одно, определяющее угол α_0, следовательно:

$$1 - \left(\frac{gS_{max}}{v_0^2}\right)^2 + \frac{2gH}{v_0^2} = 0; \tag{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \frac{v_0^2}{gS_{max}}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем $S_{max} = \dfrac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gH}$; $S_{max} = 20{,}5$ м;

$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}}$; $\alpha_0 = 42{,}2°$.

6. С высоты $h = 2$ м вниз под углом $\alpha = 60°$ к горизонту брошен мяч с начальной скоростью $v_0 = 8{,}7$ м/с. Найдите расстояние S между двумя последовательными ударами мяча о землю. Удары считать абсолютно упругими.

Ответ: $S \approx 9{,}7$ м.

Решение. Проекции начальной скорости v_0 на оси x и y (рис. 4) равны $v_{0x} = v_0 \cos\alpha = v_x = const$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Учтем, что $h = \dfrac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g}$,

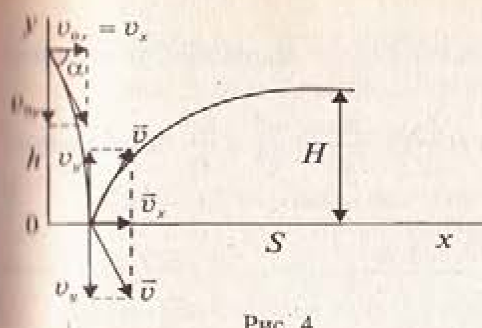


Рис. 4

откуда $v_y = \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh} = \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh}$.

Время подъема на максимальную высоту H равно $t = \dfrac{v_y}{g}$, с учетом того, что при абсолютно упругом ударе y — составляющая скорости, v_y меняет свое направление на противоположное.

Время до следующего удара равно $2t$, тогда расстояние, которое пролетит мяч до следующнго удара равно

$$S = 2tv_x = \frac{2v_0}{g}\cos\alpha\sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh} \approx 9{,}7 \text{ м}.$$

7. Упругий шарик падает с высоты h на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α, и упруго отражается с той же скоростью. Найдите расстояния $x_1, x_2, ..., x_n$ между точками ударов: первого и второго, второго и третьего и т. д. и наконец n-го и $n+1$-го (рис. 5). Кроме того, найдите x_1' при условии, что наклонная плоскость движется вертикально вверх с постоянной скоростью u.

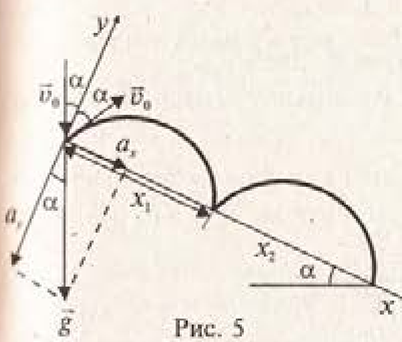


Рис. 5

Ответ: $x_1 = 8h\sin\alpha$;

$x_1' = \dfrac{4\sin\alpha}{g}(v + u)^2$.

Решение. Скорость шарика в момент первого удара $v_0 = \sqrt{2gh}$. После абсолютно упругого удара скорость шарика та же, но с другим направлением, симметричным относительно оси y (рис. 5). Проекции начальной скорости $v_{0x} = v_0 \sin\alpha$; $v_{0y} = v_0 \cos\alpha$. Уравнения движения $v_x = v_{0x} + a_x t$;

$v_y = v_{0y} + a_y t$; $x = v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}$; $y = v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}$; $a_x = g\sin\alpha$; $a_y = -g\cos\alpha$,

тогда $v_x = v_0 \sin\alpha + gt\sin\alpha$; $v_y = v_0 \cos\alpha - gt\cos\alpha$.

Время достижения максимальной высоты t_1, найдем из условия

$v_y = 0$, откуда $t_1 = \dfrac{v_0}{g} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Время между первым и вторым уда-

рами $t_n = 2t_1 = 2\frac{v_0}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Подставим эту величину в уравнение:

$$x_1 = v_0 \sin\alpha \cdot t_n + \frac{g\sin\alpha \cdot t_n^2}{2} = v_0 \sin\alpha \frac{2v_0}{g} + \frac{g\sin\alpha}{2}\cdot\frac{4v_0^2}{g^2} = \frac{8v_0^2}{2g}\sin\alpha = 8h\sin\alpha.$$

Проекции скорости в момент второго удара

$$v_x = v_0 \sin\alpha + g\sin\alpha \cdot \frac{2v_0}{g} = 3v_0 \sin\alpha;$$

$$v_y = v_0 \cos\alpha - g\cos\alpha \cdot \frac{2v_0}{g} = \pm v_0 \cos\alpha.$$

Знак «–» соответствует моменту падения; знак «+» — моменту отражения, т. е. v_y только меняет знак. В момент n-го удара проекции скорости после отражения равны

$v_x = (2n-1)v_0 \sin\alpha$; $v_y = v_0 \cos\alpha$.

Таким образом, по оси x проекция скорости равномерно возрастает, а по оси y остается постоянной. Промежутки времени между ударами постоянны.

Расстояние x_2 между точками второго и третьего ударов

$$x_2 = 3v_0 \sin\alpha \frac{2v_0}{g} + g\sin\alpha \cdot \left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 = 2\cdot 8h\sin\alpha.$$

Продолжая аналогично вычисления, найдем

$x_1 : x_2 : x_3 : ... : x_n = 1:2:3: ... : n$. Расстояние между точками n и $n+1$ ударов равно $x_n = 8nh\sin\alpha$.

Если наклонная плоскость движется вверх со скоростью $\vec{u}$, то относительная скорость плоскости и шарика $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_0 - \vec{u}$; т. е. $v_{отн} = v_0 + u$, тогда $x_1' = \frac{4v_{отн}^2}{g}\sin\alpha = \frac{4\sin\alpha}{g}(v_0+u)^2$.

8. Снаряд выпущен из орудия со скоростью v_0 под углом β к горизонту (рис. 6). Рассчитайте: а) расстояние S, которое он пролетит по склону, имеющему угол α с горизонтом; б) при каком угле β это расстояние будет максимальным и чему оно равно?

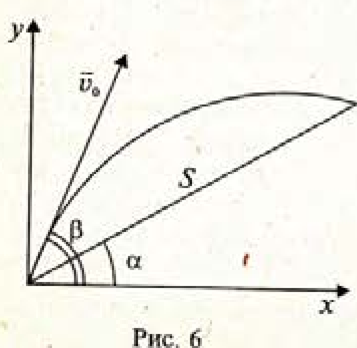


Рис. 6

Решение. а) Используем уравнение траектории

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\beta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\beta}x^2;$$

учитывая $x = S\cos\alpha$,

$y = S\sin\alpha$, получаем

$$S\sin\alpha = S\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\beta}(S\cos\alpha)^2; \text{ или } S = \frac{2v_0^2\cos\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)}{g\cos^2\alpha}.$$

б) $S = \max$ при $\frac{dS}{d\beta} = 0$, тогда $\beta = 45° + \frac{\alpha}{2}$ и $S_{\max} = \frac{v_0^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$.

9. Какова траектория точки обода велосипедного колеса относительно земли при равномерном и прямолинейном движении велосипедиста?

Решение. Рассмотрим зависимость координат точки A от времени (рис. 7). Пусть радиус колеса R и угловая скорость его вращения вокруг оси C — ω. Движение точки A сложное: поступательное со скоростью движения центра колеса C и вращательное с угловой скоростью ω. В момент времени $t = 0$: $x = 0$, $y = 0$, $\varphi = 0$. В некоторый момент времени t: $y = R - R\cos\varphi = R(1-\cos\omega t)$; $\varphi = \omega t$. $x = l - R\sin\varphi = l - R\sin\omega t$.

Длина дуги $l = R\varphi = R\omega t$, тогда $x = R(\omega t - \sin\omega t)$; $y = R(1-\cos\omega t)$.

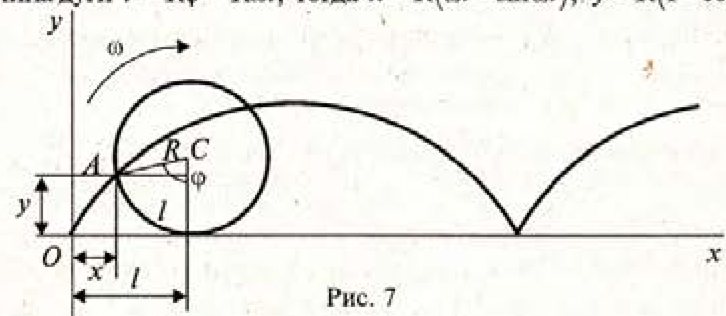


Рис. 7

10. Машина движется со скоростью u по дороге, покрытой гравием. На какую максимальную высоту h могут подняться мелкие камешки, оторвавшиеся от покрышки колеса радиусом R?

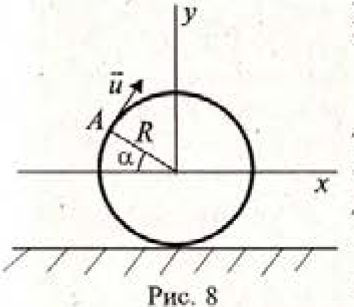


Рис. 8

Ответ: $h \geq R$.

Решение. Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с машиной со скоростью u (рис. 8). Начальные координаты и скорости точки A (камешка) $x_0 = -R\cos\alpha$; $y_0 = R\sin\alpha$; $v_{0x} = u\sin\alpha$; $v_{0y} = u\cos\alpha$.

В произвольный момент времени

$$x(t) = -R\cos\alpha + u\sin\alpha\cdot t;\quad y(t) = R\sin\alpha + u\cos\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2};$$

$v_x(t) = u\sin\alpha;\quad v_y(t) = u\cos\alpha - gt.$

Если t_1 — время подъема камешка до наивысшей точки траектории, то в этот момент $v_y(t_1) = 0$, т. е. $u\cos\alpha - gt_1 = 0;\ t_1 = \frac{u}{g}\cos\alpha.$

Высота подъема камешка $h = y(t_1) = R\sin\alpha + \frac{u^2}{2g}\cos^2\alpha.$

$h(\alpha)$ будет максимальной, если $\frac{dh}{d\alpha} = 0.$ Тогда

$R\cos\alpha - \frac{u^2}{g}\cos\alpha\cdot\sin\alpha = 0;\ \cos\alpha(R - \frac{u^2}{g}\sin\alpha) = 0.$

Высота подъема камешка максимальна при выполнении условий:

1) $\cos\alpha_0 = 0;\ \ \alpha_0 = \frac{\pi}{2};\ \ h(\alpha_0) = R.$

2) $R - \frac{u^2}{g}\sin\alpha = 0;\ \ \sin\alpha_0 = \frac{gR}{u^2}.$

11. Диск с отверстиями, просверленными по окружностям на расстоянии $S = 1$ см друг от друга (рис. 9) освещен сзади лампой. Диск вращается с частотой $\upsilon = 30$ об/мин. На каком расстоянии от центра мы увидим сплошной светящийся круг? Человеческий глаз не ощущает колебаний яркости, если они происходят чаще, чем 16 раз в секунду.

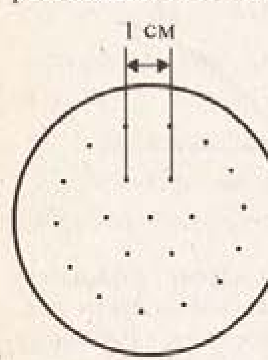


Рис. 9

Ответ: $R > 5{,}1\cdot10^{-2}$ м.

Решение. Мы увидим светящийся круг там, где освещенные отверстия успевают сменить друг друга за время, меньше или равное 1/16 с. Так как отверстия отстоят друг от друга на расстоянии 1 см, то, следовательно, их скорость должна быть:

$$v = \frac{S}{t} = \frac{10^{-2}}{1/16} = 16\cdot10^{-2}\ \text{м/с}.$$

Таким образом, мы увидим светящийся круг там, где линейная скорость вращения диска $v > 16\cdot10^{-2}$ м/с. Из соотношения между линейной и угловой скоростями $v = \omega R$ находим:

$$R > \frac{v}{\omega};\quad \omega = 2\pi\nu;\quad R > \frac{v}{2\pi\nu};\quad R > \frac{16\cdot10^{-2}\cdot60}{2\pi\cdot30} = 5{,}1\cdot10^{-2}\ \text{м},$$

т. е. светящиеся отверстия сольются в сплошной круг на расстоянии $R \geq 5{,}1\cdot10^{-2}$ м от центра.

ДИНАМИКА

Уровень I

5. ДИНАМИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

5.1. Автомобиль массой 14 т трогается с места и первые 50 м проходит за 10 с. Найдите силу тяги, если коэффициент сопротивления равен $\mu = 0{,}05$.

Ответ: $F_т \approx 21$ кН.

Решение. Исходя из второго закона Ньютона $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$ имеем $F_т - F_с = ma$, где $F_с = \mu mg$ — сила сопротивления. Ускорение $a = \frac{2S}{t^2}$, тогда $F_т = m\left(\mu g + \frac{2S}{t^2}\right) = 21$ кН.

5.2. Паровоз на горизонтальном участке пути, имеющем длину $S = 600$ м, развивает силу тяги $F_т = 147$ кН. Скорость поезда массой $m = 1000$ т возрастает при этом от $v_0 = 36$ км/ч до $v = 54$ км/ч. Найдите силу сопротивления $F_с$ движению поезда, считая ее постоянной.

Ответ: $F_с = 4{,}3$ кН.

Решение. $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a};\quad F_т - F_с = ma;\quad F_с = F_т - ma;\quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2S},$

тогда $F_с = F_т - \frac{m\left(v^2 - v_0^2\right)}{2S} = 43$ кН.

5.3. Какие капли дождя падают быстрее — крупные или мелкие и почему?

Решение. При установившемся движении сила тяжести равна силе сопротивления. С увеличением размеров капли сила тяжести увеличивается пропорционально ее объему, т. е. радиусу капли в кубе, а сила сопротивления — пропорционально площади сечения капли, т. е. пропорционально квадрату радиуса. Поэтому при увеличении радиуса капли сила тяжести увеличивается быстрее, чем сопротивление, что приводит к увеличению постоянной скорости,

с которой капля падает на землю, по мере увеличения размеров капли.

5.4. Автомобиль движется со скоростью $v_1 = 72$ км/час по ветру, скорость которого относительно земли равна $v_2 = 15$ м/с. Во сколько раз увеличится сила сопротивления воздуха во время движения автомобиля с той же скоростью против ветра? Считать силу сопротивления воздуха прямо пропорциональной квадрату относительной скорости.

Ответ: $F_{c2}/F_{c1} = 49$.

Решение. Относительная скорость $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. При движении автомобиля по ветру относительная скорость $u_1 = v_1 - v_2$. При движении против ветра относительная скорость $u_2 = v_1 + v_2$. Сила сопротивления $F_{c1} \sim u_1^2$; $F_{c2} \sim u_2^2$, тогда $\frac{F_{c2}}{F_{c1}} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = \left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}\right)^2 = 49$.

5.5. Тело массой $m = 40$ г, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с, достигло высшей точки подъема спустя время $t = 2,5$ с. Найдите среднюю силу сопротивления воздуха, действовавшую на тело во время полета.

Ответ: $F_c = 0,088$ Н.

Решение. $m\vec{g} + \vec{F}_c = m\vec{a}$; $F_c = ma - mg$; $a = \frac{v_0}{t}$;

$$F_c = m\left(\frac{v_0}{t} - g\right) = 0,088 \text{ Н}.$$

5.6. Воздушный шар массой M опускается с постоянной скоростью. Какова масса балласта, который нужно выбросить, чтобы шар поднимался с той же скоростью? Подъемная сила воздушного шара Q известна.

Ответ: $m = 2(M - Q/g)$.

Решение. Уравнение движения воздушного шара при спуске $mg - F_c - Q = 0$, где F_c — сила сопротивления воздуха. При подъеме, учитывая выброшенный балласт массы m,

$(M - m)g + F_c - Q = 0$, откуда $m = 2(M - Q/g)$.

5.7. Проволока выдерживает груз массой $m_{max} = 450$ кг. С каким максимальным ускорением можно поднимать груз массой $m = 400$ кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она не оборвалась?

Ответ: $a = 1,23$ м/с^2.

Решение. Максимальное натяжение проволоки $T_{max} = m_{max}g$. При подъеме груза массой m возможно максимальное ускорение a:

$T_{max} - mg = ma$; $(m_{max} - m)g = ma$; откуда $a = (m_{max} - m)g/m = 1,23$ м/с^2.

5.8. Веревка выдерживает груз массой $m_1 = 110$ кг при подъеме его с некоторым ускорением, направленным по вертикали, и груз массой $m_2 = 690$ кг при опускании его с таким же по модулю ускорением. Какова максимальная масса груза, который можно поднять на этой веревке, двигая его с постоянной скоростью?

Ответ: $m = 190$ кг.

Решение. Уравнение движения груза при подъеме вверх $T_{max} - m_1g = m_1a$; при опускании $m_2g - T_{max} = m_2a$; при движении с постоянной скоростью $T_{max} = mg$. Решая систему трех уравнений получаем $m = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} = 190$ кг.

5.9. Шар массой m падает в жидкости плотностью ρ с постоянной скоростью v. С какой силой нужно тянуть этот шар для того, чтобы он поднимался в той же жидкости со скоростью $2v$? Объем шара равен V. Сопротивление при движении шара в жидкости пропорционально скорости шара.

Ответ: $F = 3g(m - \rho V)$.

Решение. При движении шара вниз $mg - F_c - F_A = 0$, где $F_{c_1} = kv$ — сила сопротивления; $F_A = \rho gV$ — сила Архимеда, т. е. $mg - kv - \rho gV = 0$. При подъеме $F + \rho gV - k \cdot 2v - mg = 0$, тогда сила, с которой нужно тянуть шар, $F = 3g(m - \rho V)$.

5.10. Два мальчика равных масс, стоящие на коньках на расстоянии l друг от друга, выбирают натянутую между ними веревку: один со скоростью v, другой со скоростью $2v$. Через сколько времени и в каком месте они сойдутся? Решите задачу для случая, когда массы мальчиков относятся как $1 : 1,5$.

Ответ: $t = l/3v$.

Решение. По третьему закону Ньютона сила взаимодействия мальчиков одинакова по величине $F_1 = F_2$; $m_1a_1 = m_2a_2$, т. к. $m_1 = m_2$, то и $a_1 = a_2$, т. е. скорости мальчиков относительно земли одинаковы. Они встретятся посередине через время $t = \frac{l}{v_1 + v_2} = \frac{l}{3v}$. Если их массы относятся как $m_1/m_2 = 1/1,5$, то $m_1a_1 = m_2a_2$; $m_2/m_1 = a_1/a_2$; $S_1 = a_1t^2/2$; $S_2 = a_2t^2/2$; $S_1/S_2 = a_1/a_2 = m_2/m_1 = 1,5$.

5.11. Какая горизонтальная сила F требуется, чтобы тело массой $m = 2$ кг, лежащее на горизонтальной поверхности, начало скользить по ней с ускорением $a = 0,2$ м/с^2? Коэффициент трения между телом и поверхностью равен 0,02.

Ответ: $F = 0,79$ Н.

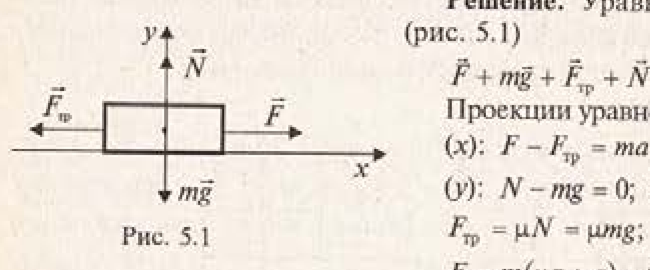


Рис. 5.1

Решение. Уравнение движения (рис. 5.1)

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Проекции уравнения на оси x и y:

(x): $F - F_{тр} = ma$;

(y): $N - mg = 0$; $N = mg$;

$F_{тр} = \mu N = \mu mg$;

$F = m(\mu g + a) = 0,79$ Н.

5.12. Сила $F_3 = 10$ Н составляет с осью x угол $\alpha = 30°$, силы F_1 и F_2 перпендикулярны оси (рис. 5.2). Определите силу F_2, если известно, что сила F_1 равна 5,0 Н, а сумма сил вдоль оси y равна 0. Чему равна сила, действующая вдоль оси x?

Рис. 5.2

Ответ: $F_2 = 10$ Н, $F_x = 8,7$ Н.

Решение. Проекция на ось x:

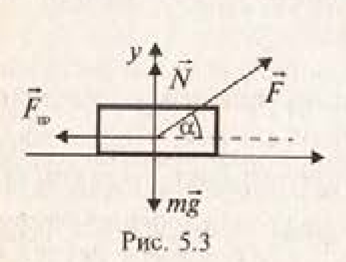
$F_x = F_3 \cos\alpha = 8,7$ Н; на ось y:

$F_1 + F_3 \sin\alpha - F_2 = 0$;

$F_2 = F_1 + F_3 \sin\alpha = 10$ Н.

5.13. Человек потянул санки массой $m = 8$ кг с силой $F = 100$ Н за веревку под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Коэффициент трения санок о снег $\mu = 0,10$. Определите ускорение, с которым начнут двигаться санки.

Ответ: $a = 10$ м/с^2.



Решение. Уравнение движения (рис. 5.3)

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} = m\vec{a};$$

(x): $F\cos\alpha - F_{тр} = ma$;

(y): $F\sin\alpha + N - mg = 0$;

$N = mg - F\sin\alpha$;

$F_{тр} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$;

Рис. 5.3

$$a = \frac{1}{m}[F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)] = \frac{1}{m}[F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg] = 10 \text{ м/с}^2.$$

5.14. Человек передвигает груженые сани с постоянной скоростью с помощью твердого стержня, соединенного с санями и расположенного под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Одинаковые ли силы F_1 и F_2 нужно приложить к саням для их передвижения, если их толкать перед собой или тянуть за собой? Во сколько раз одна сила больше другой? Коэффициент трения саней о дорогу $\mu = 0,1$.

Ответ: $\frac{F_1}{F_2} = 1,12$.

Решение.

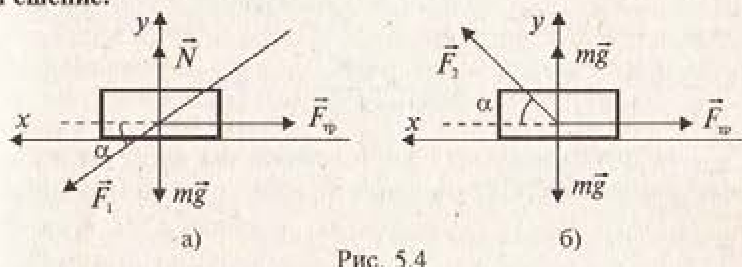


Рис. 5.4

1) Сани толкают перед собой (рис. 5.4а):

$\vec{F}_1 + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} = 0$;

(x): $F_1\cos\alpha - F_{тр_1} = 0$;

(y): $N - mg - F_1\sin\alpha = 0$;

$N = mg + F_1\sin\alpha$; $F_{тр_1} = \mu N = \mu(mg + F_1\sin\alpha)$;

$F_1\cos\alpha - \mu mg - \mu F_1\sin\alpha = 0$; $F_1 = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$;

2) Сани тянут за собой (рис. 5.4б)

(x): $F_2\cos\alpha - F_{тр_2} = 0$;

(y): $N + F_2\sin\alpha - mg = 0$; $N = mg - F_2\sin\alpha$; $F_{тр_2} = \mu(mg - F_2\sin\alpha)$;

$F_2\cos\alpha - \mu mg + \mu F_2\sin\alpha = 0$; $F_2 = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$;

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{1 + \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 1,12.$$

5.15. Два груза массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г связаны нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис. 5.5). С каким ускорением будут двигаться грузы, если к грузу m_1 приложить силу $F = 1,5$ Н, направленную параллельно плоскости стола?

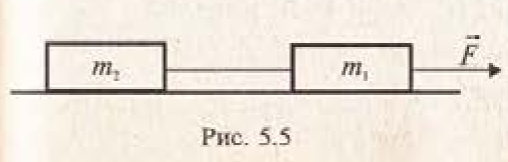


Рис. 5.5

Какую силу натяжения будет испытывать при этом нить, связывающая тела?

Ответ: $a = 3\,м/с^2$, $T = 0{,}9\,Н$.

Решение. Для первого тела (рис. 5.6):

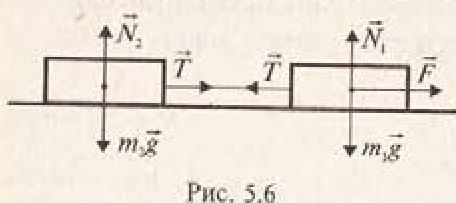


Рис. 5.6

$$\vec F + m_1\vec g + \vec T + \vec N_1 = m_1\vec a;$$

для второго

$$m_2\vec g + \vec T + \vec N_2 = m_2\vec a;$$

$$(x):\ \begin{cases} F - T = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases}$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 3\,м/с^2;\quad T = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} = 0{,}9\,Н.$$

5.16. Два бруска массами m_1 и m_2, связанные нерастяжимой нитью, находятся на горизонтальной плоскости. К ним приложены силы F_1 и F_2, составляющие с горизонтом углы α и β (рис. 5.7). Найдите ускорение системы и натяжение нити. Коэффициенты трения брусков о плоскость одинаковы и равны μ. Система движется влево.

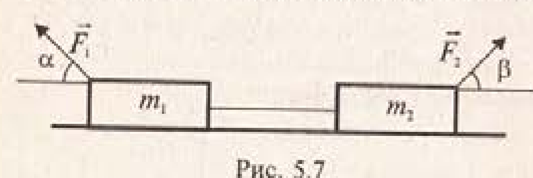


Рис. 5.7

Ответ: $T = \left[F_1 m_2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) + F_2 m_1(\cos\beta - \mu\sin\beta)\right]/(m_1 + m_2)$;

$a = \left\{\left[F_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - F_2(\cos\beta - \mu\sin\beta)\right]/(m_1 + m_2)\right\} - \mu g$.

Решение. Для первого и второго тел (рис. 5.8):

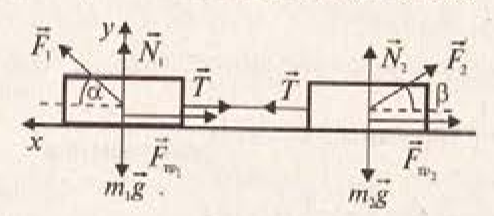


Рис. 5.8

$$\vec F_1 + m_1\vec g + \vec F_{тр_1} + \vec T + \vec N_1 = m_1\vec a;\quad \vec F_2 + m_2\vec g + \vec F_{тр_2} + \vec T + \vec N_2 = m_2\vec a;$$

(x): $F_1\cos\alpha - F_{тр_1} - T = m_1 a$; (y): $F_1\sin\alpha + N_1 - m_1 g = 0$;

$N_1 = m_1 g - F_1\sin\alpha$; $F_{тр_1} = \mu N_1 = \mu(m_1 g - F_1\sin\alpha)$;

(x): $-F_2\cos\beta - F_{тр_2} + T = m_2 a$;

(y): $F_2\sin\beta + N_2 - m_2 g = 0$; $N_2 = m_2 g - F_2\sin\beta$;

$F_{тр_2} = \mu N_2 = \mu(m_2 g - F_2\sin\beta)$.

$$\begin{cases} F_1\cos\alpha - \mu(m_1 g - F_1\sin\alpha) - T = m_1 a; \\ -F_2\cos\beta - \mu(m_2 g - F_2\sin\beta) + T = m_2 a; \end{cases}$$

$$a = \frac{F_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - F_2(\cos\beta - \mu\sin\beta)}{m_1 + m_2} - \mu g;$$

$$T = \frac{F_1 m_2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) + F_2 m_1(\cos\beta - \mu\sin\beta)}{m_1 + m_2}.$$

5.17. Три тела связаны нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К телу массой m_1 приложена сила F_1, направленная вдоль поверхности, а к телу массой m_3 — сила $F_2 > F_1$, направленная в противоположную сторону. Найдите силу натяжения нити между телами с массами m_1 и m_2.

Ответ: $T = \left(m_1 F_2 + (m_2 + m_3)F_1\right)/(m_1 + m_2 + m_3)$.

Указание. См. решение задачи 5.16.

5.18. Какова начальная скорость шайбы, пущенной по поверхности льда, если она остановилась через 40 с? Коэффициент трения шайбы о лед $\mu = 0{,}05$.

Ответ: $v_0 = 20\,м/с$.

Решение. Уравнение движения шайбы $\vec F_{тр} = m\vec a$; $-\mu mg = ma$; $a = -\mu g$; $v_0 = -at$; $v_0 = \mu gt = 20\,м/с$.

5.19. При быстром торможении трамвай, имевший скорость $v = 25\,км/ч$, начал двигаться «юзом». Какой участок пути пройдет трамвай с момента начала торможения до полной остановки? Коэффициент трения между колесами и рельсами $\mu = 0{,}2$.

Ответ: $S = v^2/2\mu g = 12{,}3\,м$.

Указание. См. решение задачи 5.18.

5.20. Тело массой $m = 2\,кг$ лежит на гладком горизонтальном столе. С каким ускорением начнет двигаться тело, если:

1) нить потянуть с силой $F = 9{,}8\,Н$;

2) подвесить к нити груз массой $m_1 = 1{,}0\,кг$?

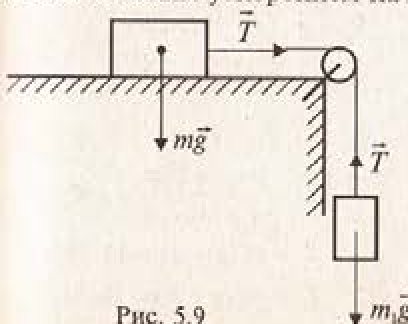


Рис. 5.9

Ответ: $a_1 = 4{,}9\,м/с^2$, $a_2 = 3{,}3\,м/с^2$.

Решение. 1) $F = ma_1$;

$a_1 = F/m = 4{,}9\,м/с^2$.

2) $\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_2; \\ T = m a_2; \end{cases}$ (рис. 5.9)

$m_1 g - ma_2 = m_1 a_2;\ \ a_2 = m_1 g/(m + m_1) = 3{,}3\,\text{м/с}^2.$

5.21. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой $M = 300$ г. Брусок связан нитью, перекинутой через невесомый блок без трения с телом массой $m = 100$ г. Начальная скорость бруска направлена от блока и равна $v_0 = 4{,}9$ м/с (рис. 5.10). Определите через $t = 4$ с после начала движения бруска: а) скорость v бруска, б) расстояние S бруска от его начального положения.

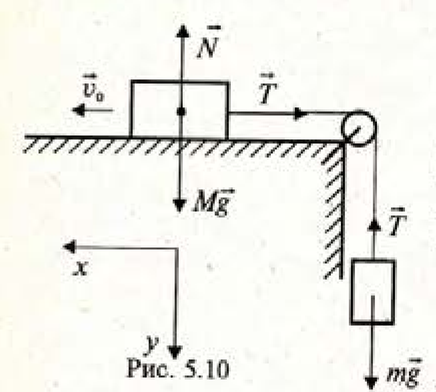


Рис. 5.10

Ответ: а) $v = 4{,}9$ м/с; б) $S = 0$ м.

Решение. Уравнения движения для тел: (x): $T = Ma$; (y): $mg - T = ma$;

$$a = \frac{mg}{M+m};\quad v = v_0 - at = v_0 - \frac{mgt}{M+m} = 4{,}9\,\text{м/с}.$$

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2} = v_0 t - \frac{mgt^2}{2(M+m)} = 0.$$

5.22. На гладком столе лежит брусок массой $m = 4$ кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. Найдите ускорение a, с которым движется брусок, и силу T натяжения каждого из шнуров. Массой блоков, шнуров и силой трения пренебречь.

Ответ: $a = 1{,}4\,\text{м/с}^2$; $T_1 = 11{,}2$ Н; $T_2 = 16{,}8$ Н.

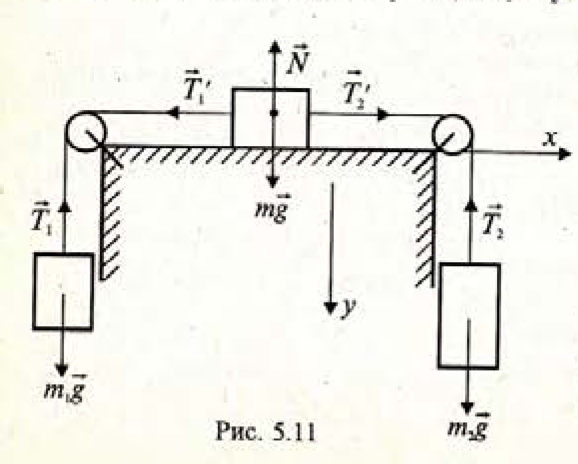


Рис. 5.11

Решение. Уравнения движения грузов (рис. 5.11)

$$m_2 g - T_2 = m_2 a;$$
$$T_2' - T_1' = ma;$$
$$T_1 - m_1 g = m_1 a;$$
$$T_1 = T_1';$$
$$T_2 = T_2';$$
$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m} = 1{,}4\,\text{м/с}^2;$$
$$T_1 = m_1(g + a) = 11{,}2\,\text{Н};$$
$$T_2 = m_2(g - a) = 16{,}8\,\text{Н}.$$

5.23. Брусок массой 2 кг скользит по горизонтальной поверхности под действием груза массой 5 кг, прикрепленного к концу нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок. Коэффициент трения бруска о поверхность 0,1. Найдите ускорение движения тела и силу натяжения нити. Массами блока и нити, а также трением в блоке пренебречь.

Ответ: $a \approx 1{,}2\,\text{м/с}^2$, $T = 4{,}3$ Н.

Решение. Рассматриваем движение каждого тела отдельно. Учтем, что сила натяжения нити вдоль нити постоянна и оба тела движутся с одинаковым ускорением a.

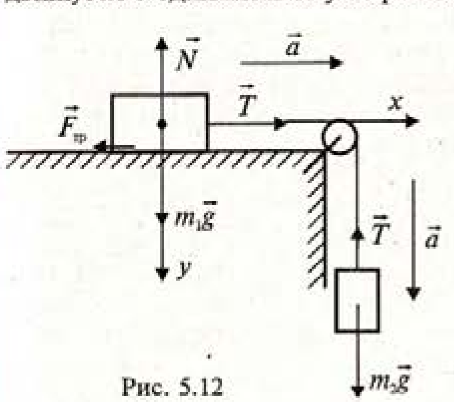


Рис. 5.12

Уравнение движения бруска (рис. 5.12):

$$m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{тр} = m_1\vec{a}. \quad (1)$$

Второй закон Ньютона для груза: $m_2\vec{g} + \vec{T} = m_2\vec{a}$. (2)

Спроецируем первое уравнение на оси x и y, а второе — на ось y:

$$\begin{cases} (x):\ T - F_{тр} = m_1 a \\ (y):\ m_1 g - N = 0 \\ (y):\ m_2 g - T = m_2 a. \end{cases} \quad (3)$$

Учтем дополнительно, что $F_{тр} = \mu N$, а $N = m_1 g$ из (3), тогда $F_{тр} = \mu m_1 g$, следовательно, после сложения трех уравнений (3) получаем: $m_2 g - T + T - \mu m_1 g = (m_2 + m_1)a$,

откуда $a = \dfrac{g(m_2 - \mu m_1)}{m_2 + m_1}$; $a \approx 1{,}2\,\text{м/с}^2$.

Силу натяжения нити находим из последнего уравнения системы (3) $T = m_2(g - a)$; $T = 4{,}3$ Н.

5.24. Система грузов массами $m_1 = 0{,}4$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг находится в лифте, поднимающемся вверх с ускорением $a_0 = 4{,}5\,\text{м/с}^2$ (рис. 5.13). Определите силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом массой m_1 и опорой $\mu = 0{,}1$.

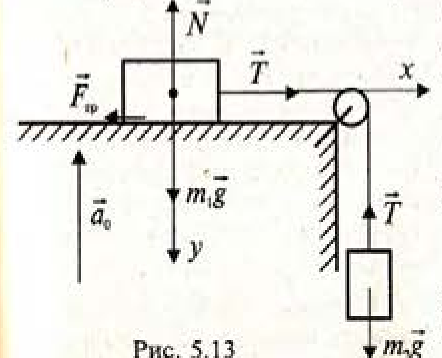


Рис. 5.13

Ответ: $T = 3{,}5$ Н.

Решение. Относительно стола ускорение грузов одинаково

$$a_1' = a_2' = a'.$$

Относительно неподвижной системы координат ускорение груза m_1 имеет горизонтальную

$a_{1x} = a'$ и вертикальную $a_{1y} = a_0$ составляющие, ускорение груза m_2 направлено по вертикали и равно $a_2 = a' - a_0$.

Уравнения движения грузов:

$$m_2 g - T = m_2(a' - a_0);\quad N - m_1 g = m_1 a_0;\quad N = m_1 g + m_1 a_0;$$

$$T - \mu N = m_1 a';\quad T - \mu(m_1 g + m_1 a_0) = m_1 a';\quad a' = \frac{T}{m_1} - \mu(a_0 + g);$$

$$m_2 g - T = m_2\left(\frac{T}{m_1} - \mu(a_0 + g) - a_0\right).\quad T = \frac{m_1 m_2 (1+\mu)(a_0 + g)}{m_1 + m_2} = 3{,}5\,\text{Н}.$$

5.25. Тележка массой $M = 20$ кг катится без трения по горизонтальной плоскости. На ней лежит брусок массой $m = 2$ кг. Коэффициент трения бруска о тележку $\mu = 0{,}25$. В одном случае к бруску приложена сила $F_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ Н, в другом $F_2 = 6$ Н. Определите ускорение тележки и бруска в обоих случаях.

Ответ: 1) $a = 10^{-4}$ м/с^2; 2) $a_б = 0{,}55$ м/с^2; $a_т = 0{,}25$ м/с^2.

Решение. Сила трения скольжения (или максимальная сила трения покоя) между бруском и тележкой $F_{тр} = \mu N = \mu mg = 4{,}9$ Н. Тогда в первом случае при $F_1 < F_{тр}$ брусок с тележкой движется как целое, а во втором случае $F_2 > F_{тр}$, брусок и тележка движутся отдельно.

1) $F_1 = (M + m)a$; $a = F_1/(M + m) = 10^{-4}$ м/с^2.

2) Силы трения одинаковы по величине

$F_{тр_1} = F_{тр_2} = F_{тр} = \mu N = \mu mg$ и приложены к разным телам (рис. 5.14).

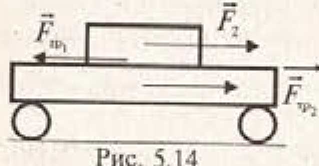


Рис. 5.14

$$(x):\ \begin{cases} F_2 - F_{тр_1} = ma_б; \\ F_{тр_2} = ma_т; \end{cases}$$

$$a_т = \mu mg/M = 0{,}25\,\text{м/с}^2$$

$$a_б = (F_2 - \mu mg)/m = 0{,}55\,\text{м/с}^2.$$

5.26. Доска массой m_1 лежит на гладкой горизонтальной плоскости, по которой может двигаться без трения. На доске лежит тело массой m_2, к которому приложена в горизонтальном направлении сила F. Коэффициент трения между телом и доской равен μ. При каком значении силы F тело начнет скользить по доске?

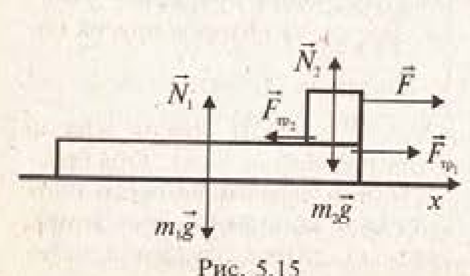


Рис. 5.15

Решение. Силы, действующие на доску и тело, показаны на рисунке (рис. 5.15). В горизонтальном направлении на тело m_2 действует сила F и противоположно направленная сила трения $F_{тр_2}$ со стороны доски.

Согласно третьему закону Ньютона на доску действует такая же по величине, но противоположно направленная сила трения $F_{тр_1}$.

Уравнение движения в проекции на ось x имеют вид:

$$m_1 a_1 = F_{тр};\qquad (1)$$

$$m_2 a_2 = F - F_{тр}.\qquad (2)$$

Если проскальзывания нет ($F_{тр} \le \mu m_2 g$), то ускорения тела и доски одинаковы: $a_1 = a_2 = a$. Тогда из (1) и (2) получаем:

$F_{тр} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} F < \mu m_2 g$. Следовательно, скольжение возникнет при значении силы $F > \mu \dfrac{m_2}{m_1}(m_1 + m_2)g$.

5.27. На горизонтальной поверхности лежит доска массой $M = 10$ кг, а на доске — брусок массой $m = 1$ кг. Какую минимальную силу надо приложить к доске, чтобы брусок соскользнул с нее? Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}1$.

Ответ: $F \ge 10{,}8$ Н.

Указание. См. задачу 5.26.

5.28. Небольшой брусок лежит на краю горизонтальной доски длиной $l = 2$ м (рис. 5.16). Через какое время брусок соскользнет, если доска начнет двигаться по горизонтали с ускорением $a = 3$ м/с^2. Коэффициент трения между бруском и доской равен $\mu = 0{,}2$.

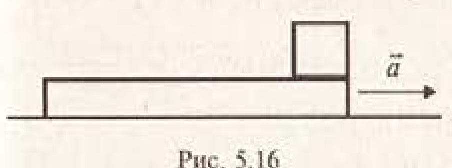


Рис. 5.16

Ответ: $t = 2$ с.

Решение. На брусок m во время движения по доске действует сила трения: $F_{тр} = \mu mg = ma_1$, $a_1 = \mu g$. Ускорение a_1 — это ускорение относительно земли. Так как доска движется с ускорением a, то ускорение бруска относительно доски равно $a - a_1 = a - \mu g$. Время, за которое брусок соскользнет с доски $t = \sqrt{2l/(a - \mu g)} = 2$ с.

5.29. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой $M = 2$ кг, на котором находится брусок массой $m = 1$ кг. Оба бруска соединены легкой нитью, перекинутой через невесомый блок (рис. 5.17). Какую силу нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он начал двигаться от блока с постоянным ускорением $a = g/2$?

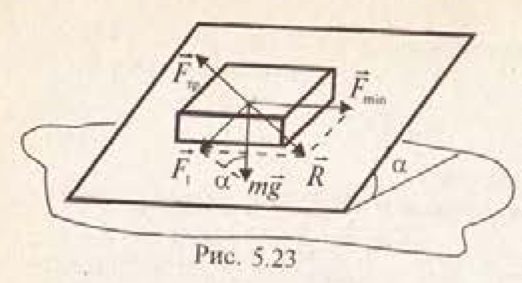


Рис. 5.23

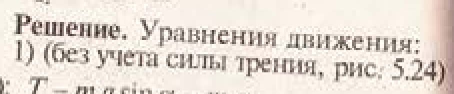
места, на него действуют: сила тяжести $m\vec g$ (ее проекция на плоскость $F_1 = mg\sin\alpha$) и внешняя сила $\vec F_{min}$, результирующая которых $\vec R = \vec F_1 + \vec F_{min}$ должна быть равна силе трения $R = F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$, тогда $\mu mg\cos\alpha = \sqrt{(mg\sin\alpha)^2 + F_{min}^2}$ (рис. 5.23). Брусок сдвинется при $F_{min} = mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ $(\mu \geq \mathrm{tg}\,\alpha)$. $F_{min} = 0$ при $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$.

5.34. Определите ускорение грузов, силу натяжения нити, силу давления на ось блока в двух случаях: 1) трением пренебречь; 2) с учетом силы трения $(\mu = 0,05)$ между грузом m_1 и наклонной плоскостью.

Ответ: 1) $a = 0,98\,\text{м/с}^2$, $T = 17,64$ Н, $F_{д_1} = 30,6$ Н;

2) $a = 0,72\,\text{м/с}^2$, $T = 18,1$ Н, $F_{д_2} = 31,3$ Н.

Рис. 5.24



Решение. Уравнения движения:
1) (без учета силы трения, рис. 5.24)

(x): $T - m_1 g\sin\alpha = m_1 a$;

(y): $m_2 g - T = m_2 a$;

$T = m_2 g - m_2 a = m_2(g - a) = 17,64$ Н;

$a = g(m_2 - m_1\sin\alpha)/(m_1 + m_2) = 0,98\,\text{м/с}^2$.

Рис. 5.25

2) С учетом силы трения $(\mu = 0,05)$ (рис. 5.25)

(x): $T - F_{тр} - m_1 g\sin\alpha = m_1 a$;

(y): $N - m_1 g\cos\alpha = 0$;

$N = m_1 g\cos\alpha$;

$F_{тр} = \mu N = \mu m_1 g\cos\alpha$.

$T - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = m_1 a$;

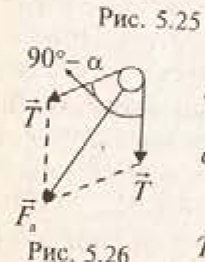


Рис. 5.26

$m_2 g - T = m_2 a$;

$$a = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 0,72\,\text{м/с}^2;$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + 1)}{m_1 + m_2} = 18,1\text{ Н}.$$

Сила давления $\vec F_д$ на ось блока равна $\vec F_д = \vec T + \vec T$ (рис. 5.26); $F_д = 2T\cos\dfrac{90° - \alpha}{2}$. В первом случае $F_{д_1} = 30,6$ Н, во втором $F_{д_2} = 31,3$ Н.

5.35. Три груза с массами m_1, m_2, m_3 связаны нитью, перекинутой через блок, установленный на наклонной плоскости (рис. 5.27). Плоскость образует с горизонтом угол α. Начальные скорости грузов равны нулю. Найдите ускорение грузов и силу натяжения нити, связывающей грузы, находящиеся на наклонной плоскости. Коэффициент трения между грузами и плоскостью μ.

Ответ:
$a = g\left[(m_2 + m_3)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_1\right]/(m_1 + m_2 + m_3)$,
$T = m_2 m_3(1 + \sin\alpha \pm \mu\cos\alpha)/(m_1 + m_2 + m_3)$.

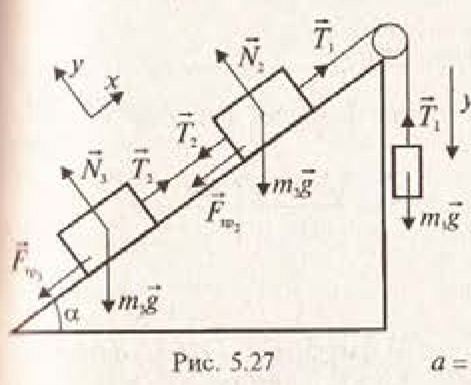


Рис. 5.27

Решение. Уравнения движения в проекциях на оси (грузы поднимаются по наклонной плоскости, рис. 5.27)

$m_1 g - T_1 = m_1 a$;

$T_1 - T_2 - m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha = m_2 a$;

$T_2 - m_3 g\sin\alpha - \mu m_3 g\cos\alpha = m_3 a$,

откуда

$$a = g\frac{m_1 - (m_2 + m_3)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Если грузы опускаются по наклонной плоскости, то

$$a = g\frac{(m_2 + m_3)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_1}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Сила натяжения нити между грузами T_2:

$$T_2 = m_1 m_3\frac{(1 + \sin\alpha \pm \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3};$$

знак «+» для первого случая; «−» — для второго.

5.36. За какое время тело массой m соскользнет с наклонной плоскости высотой h, наклоненной под углом α к горизонту, если по наклонной плоскости с углом наклона β оно движется равномерно?

Ответ: $t = \sqrt{2h/(1 - \mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{ctg}\,\alpha)g}/\sin\alpha$.

Решение. См. задачу 5.32.

$mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta = 0;\quad \mu = \operatorname{tg}\beta.$

$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma;\quad a = g(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta\cdot\cos\alpha).$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}},\ \text{где}\ l = \frac{h}{\sin\alpha},$$

$$\text{тогда}\ t = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta\cdot\cos\alpha)}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g(1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\alpha)}}.$$

5.37. Ледяная гора составляет с горизонтом угол $\alpha = 10°$. По ней пускают вверх камень, который, поднявшись на некоторую высоту, затем соскальзывает по тому же пути вниз. Каков коэффициент трения, если время спуска в 2 раза больше времени подъема?

Ответ: $\mu = 0{,}1$.

Решение. При подъеме вверх уравнение движения камня

$mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = ma_1;$

при спуске: $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_2.$

Пусть камень пройдет расстояние l. Время подъема $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_1}}$;

спуска $t_2 = \sqrt{\frac{2l}{a_2}}$. $\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = n$, откуда $\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = n^2;$

$$\mu = \frac{n^2-1}{n^2+1}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1.$$

5.38. По наклонной дороге с углом наклона $\alpha = 30°$ к горизонту опускается вагонетка массой $M = 500$ кг. Определите силу натяжения каната при торможении вагонетки в конце спуска, если ее скорость перед торможением была $\upsilon_0 = 2{,}0$ м/с, а время торможения $t = 5{,}0$ с. Коэффициент трения принять равным $\mu = 0{,}01$.

Ответ: $T = 2{,}6$ кН.

Рис. 5.28

Решение. Уравнение движения (рис. 5.28)

(x): $mg\sin\alpha - F_{тр} - F_н = ma;$

(y): $N - mg\cos\alpha = 0;$

$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha;\quad a = -\frac{\upsilon_0}{t}$; тогда

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - F_н = -m\frac{\upsilon_0}{t}.$$

Сила натяжения каната

$$F_н = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + m\frac{\upsilon_0}{t} = 2{,}6\ \text{кН}.$$

5.39. Доска массой M может двигаться без трения по наклонной плоскости с углом α к горизонту. В каком направлении и с каким ускорением должен бежать по доске человек массой m, чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости?

Ответ: $a = g\sin\alpha\cdot(1 + M/m)$.

Решение. На доску действуют силы: сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}_1$, сила, действующая со стороны человека (сила трения) $\vec{F}_1$, которая, в случае отсутствия скольжения доски, должна быть равна x-составляющей силы тяжести доски F_x (рис. 5.29) $F_1 = F_x = Mg\sin\alpha$; и сила давления человека на доску $F_д$, равная по величине силе реакции опоры, действующей на человека, N_2. Кроме того, на человека действует сила тяжести и сила, действующая со стороны доски, $\vec{F}_2$, которая по третьему закону Ньютона равна по величине силе F_1: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

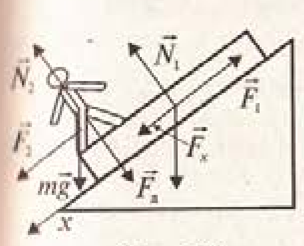


Рис. 5.29

В проекции на ось x уравнения движения человека и доски имеют вид

$mg\sin\alpha + F_2 = ma;\quad Mg\sin\alpha - F_1 = 0;\quad F_1 = F_2 = Mg\sin\alpha$, тогда

$$mg\sin\alpha + Mg\sin\alpha = ma;\quad a = \left(\frac{M}{m} + 1\right)g\sin\alpha.$$

Человек движется вниз по доске с ускорением a.

5.40. Мальчик массой m бежит вверх по неподвижной доске массой M, лежащей на наклонной плоскости с углом при основании α. Трение между доской и плоскостью отсутствует. Какой путь S прошел мальчик к моменту, когда его скорость, равная вначале υ_0, уменьшилась, не изменив своего направления, в 2 раза?

Решение. См. задачу 5.39.

Уравнение движения мальчика вверх по наклонной плоскости (движение вверх замедленное)

$$mg\sin\alpha + Mg\sin\alpha = -m|a|;$$

$$S = \upsilon_0 t - \frac{|a|t^2}{2};\quad \frac{\upsilon_0}{2} = \upsilon_0 - |a|t;$$

$$\text{откуда}\ S = \frac{3m\upsilon_0^2}{8(M+m)g\sin\alpha}.$$

5.41. На гладкой наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, находится тело массой $m = 60$ кг, на которое действует

горизонтально направленная сила $F = 320$ Н (рис. 5.30). Найдите ускорение тела и силу $F_{н.д.}$, с которой тело давит на плоскость.

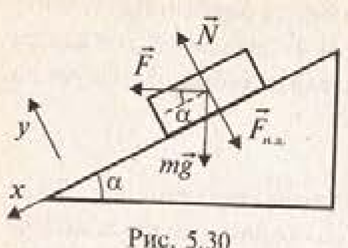


Рис. 5.30

Ответ: $a = 9,5\,м/с^2$, $F_{н.д.} = 349$ Н.

Решение.

(x): $mg\sin\alpha + F\cos\alpha = ma$ (рис. 5.30);

(y): $N + F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0$.

Согласно третьему закону Ньютона

$$\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{F}_{н.д.}\right| = mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 349\,Н;\ a = g\sin\alpha + \frac{F}{m}\cos\alpha = 9,5\,м/с^2.$$

Скольжение по наклонной плоскости будет возможно при $N > 0$; т. е. $mg\cos\alpha - F\sin\alpha > 0$; $F < mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha$; $F < 1018$ Н.

В противном случае тело оторвется от наклонной плоскости.

5.42. Клин с углом при основании $\alpha = 45°$ может скользить вдоль горизонтальной плоскости. На клине находится брусок (рис. 5.31). С каким ускорением должен двигаться клин в горизонтальном направлении, чтобы брусок относительно клина находился в покое, если коэффициент трения между поверхностями клина и бруска $\mu = 0,1$?

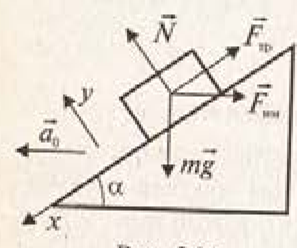


Рис. 5.31

Ответ: $8\,м/с^2 < a < 12\,м/с^2$.

Решение. Используем неинерциальную систему отсчета, связанную с наклонной плоскостью. В этом случае уравнение движения бруска имеет вид

$$m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + \vec{F}_{ин} = 0, \quad (1)$$

где $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0$ — сила инерции, действующая на брусок. Если ускорение $\vec{a}_0$ минимально, то равенство (1) в проекциях на оси имеет вид (рис. 5.31)

(x): $mg\sin\alpha - F_{тр} - ma_0\cos\alpha = 0$;

(y): $N - mg\cos\alpha - ma_0\sin\alpha = 0$;

$F_{тр} = \mu N = \mu m(g\cos\alpha + a_0\sin\alpha)$; (2)

тогда $a_{0_{min}} = g\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = g\dfrac{tg\alpha - \mu}{1 + \mu tg\alpha} = 8\,м/с^2$; $\mathrm{tg}\,\alpha > \mu$.

При максимальном $\vec{a}_0$ сила трения направлена в противоположную сторону, тогда уравнение (1) в проекциях запишем так

(x): $mg\sin\alpha + F_{тр} - ma_0\cos\alpha = 0$;

(y): $N - ma_0\sin\alpha + mg\cos\alpha = 0$;

$F_{тр} = \mu N = \mu m(g\cos\alpha + a_0\sin\alpha)$, совпадает с (2), откуда

$$a_{0_{max}} = g\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = g\frac{tg\alpha + \mu}{1 - \mu tg\alpha} = 12\,м/с^2,\ \mu < \mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Чтобы брусок покоился, клин должен двигаться в интервале ускорений: $g\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mu}{1 + \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha} \le a_0 \le g\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mu}{1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}$; $8\,м/с^2 \le a_0 \le 12\,м/с^2$.

5.43. Найдите силу натяжения нитей и ускорение грузов в системе, показанной на рис. 5.32: 1) трением пренебречь; 2) с учетом силы трения μ_1 для груза m_1 и μ_2 для груза m_2.

Решение. 1) Трением пренебрегаем. Уравнение движения тел (тело m_1 движется вниз, рис. 5.32)

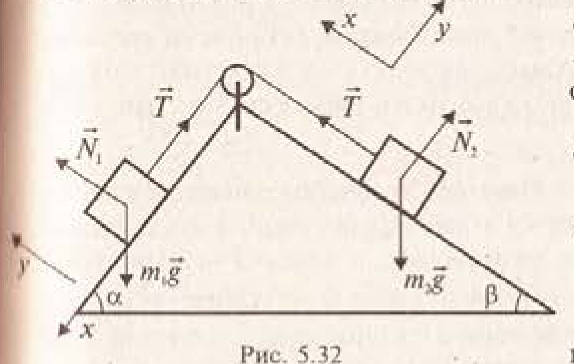


Рис. 5.32

$m_1g\sin\alpha - T = m_1a$;

$-m_2g\sin\beta + T = m_2a$;

откуда

$$a = \frac{g(m_1\sin\alpha - m_2\sin\beta)}{m_1 + m_2};$$

$$T = \frac{m_1m_2g(\sin\alpha + \sin\beta)}{m_1 + m_2}.$$

2) С учетом силы трения (рис. 5.33)

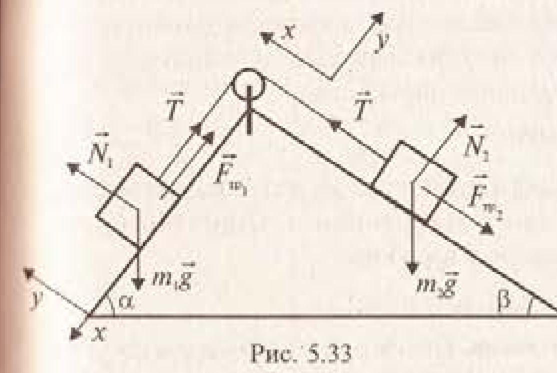


Рис. 5.33

(x): $m_1g\sin\alpha - T - F_{тр_1} = m_1a$ (1)

(y): $N_1 - m_1g\cos\alpha = 0$;

$F_{тр_1} = \mu_1N_1 = \mu_1m_1g\cos\alpha$;

(x): $-m_2g\sin\beta - F_{тр_2} + T = m_2a$; (2)

(y): $N_2 - m_2g\cos\beta = 0$;

$F_{тр_2} = \mu_2N_2 = \mu_2m_2g\cos\alpha$.

Из (1) и (2) получаем

$$m_1g\sin\alpha - T - \mu_1m_1g\cos\alpha = m_1a;\ -m_2g\sin\beta + T - \mu_2m_2g\cos\beta = m_2a;$$

$$a = g\frac{m_1(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) - m_2(\sin\beta + \mu_2\cos\beta)}{m_1 + m_2};$$

$$T = m_1m_2g\frac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + (\sin\beta + \mu_2\cos\beta)}{m_1 + m_2}.$$

5.44. Определите, какой угол с вертикалью составляет нить с грузом, подвешенная на тележке, движущейся с ускорением a.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g)$.

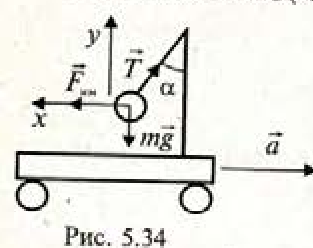


Рис. 5.34

Решение. В системе отсчета, связанной с тележкой (рис. 5.34), груз неподвижен: $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{ин} = 0$; где $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$ сила инерции, введенная в неинерциальной системе отсчета, связанной с тележкой.

$$ma - T\sin\alpha = 0;$$
$$T\cos\alpha - mg = 0;$$
$$ma = mg\operatorname{tg}\alpha; \quad \alpha = \operatorname{arctg}(a/g).$$

5.45. На тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости, составляющей угол 60° с горизонтом, установлен стержень с подвешенным на нити шариком массой $m = 2$ г. Определите угол, который составляет нить с вертикалью, и силу натяжения нити (рис. 5.35).

Ответ: $T = 9{,}8$ мН.

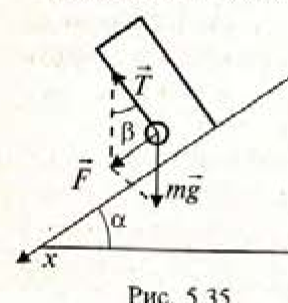


Рис. 5.35

Решение. Уравнение движения шарика $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$. Шарик относительно тележки неподвижен, а тележка скатывается с ускорением $g\sin\alpha$, т. е. ускорение шарика тоже равно $a = g\sin\alpha$, тогда $F = ma = mg\sin\alpha$, следовательно, проекция силы натяжения T на наклонную плоскость равна нулю; $\beta = \alpha$ и T направлена перпендикулярно наклонной плоскости.

Тогда $T = mg\cos\alpha = 9{,}8$ мН.

5.46. На тележке стоит сосуд с жидкостью, тележка движется в горизонтальном направлении с ускорением a. Определите угол наклона поверхности жидкости к горизонту.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}(g/a)$.

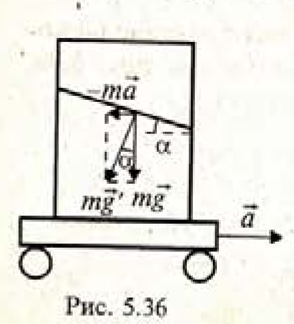


Рис. 5.36

Решение. На элемент жидкости в системе отсчета, связанной с движущейся тележкой, действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$. В этом случае «эффективная» сила тяжести, действующая на элемент жидкости, равна (рис. 5.36) $mg' = m\sqrt{g^2 + a^2}$. Эта сила тяжести перпендикулярна поверхности жидкости, которая будет составлять угол $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{g}$ с линией горизонта.

5.47. На наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α, находится бак с водой, имеющий массу m. С какой силой F, параллельной наклонной плоскости, нужно двигать бак для того, чтобы поверхность воды в баке была параллельна наклонной плоскости? Коэффициент трения между баком и наклонной плоскостью равен μ.

Ответ: $F = \mu mg\cos\alpha$.

Решение. В неинерциальной системе отсчета, связанной с движущимся баком, на элемент жидкости действует сила тяжести $\Delta m\vec{g}$ и сила инерции (рис. 5.37) $\vec{F}_{ин} = -\Delta m\vec{a}$.

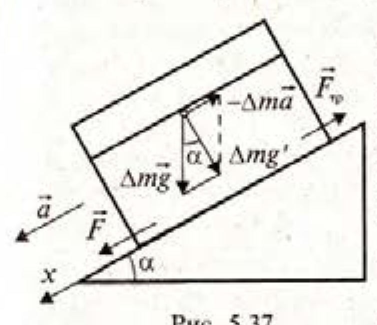


Рис. 5.37

Чтобы поверхность воды была параллельна наклонной плоскости, необходимо, чтобы эффективная сила тяжести $\Delta mg'$ элемента жидкости Δm была перпендикулярна наклонной плоскости, а это возможно, если $\Delta mg\sin\alpha - \Delta ma = 0$, т. е. $a = g\sin\alpha$.

Это ускорение имеет и весь бак с водой. Его уравнение движения $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + F = ma = mg\sin\alpha$, тогда $F = \mu mg\cos\alpha$, т. е. сила, действующая на бак, равна по величине силе трения $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$.

5.48. Коробка массой m_1, в которой находится брусок массой m_2, скользит по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Найдите силы реакции со стороны дна N_2 и стенки коробки F'.

Ответ: $N_2 = m_2 g\cos\alpha$, $F' = 0$.

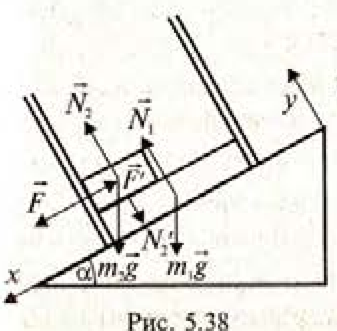


Рис. 5.38

Решение. Силы, действующие на коробку и брусок, указаны на рис. 5.38. Уравнения движения для тел

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F} + \vec{N}_2' = m_1\vec{a};$$
$$m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}' = m_2\vec{a},$$

где по третьему закону Ньютона $\vec{N}_2 = -\vec{N}_2'$; $\vec{F} = -\vec{F}'$. Тогда

(x): $m_1 g\sin\alpha + F = m_1 a$;

$N_1 - N_2 - m_1 g\cos\alpha = 0;\ \ m_2 g\sin\alpha - F = m_2 a;\ \ N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0.$
Отсюда $N_2 = m_2 g\cos\alpha;\ \ a = g\sin\alpha;\ \ N_1 = (m_1 + m_2)g\cos\alpha;$
$\vec{F} = \vec{F}' = 0$, т. е. тело касается стенки, но не деформирует ее.

5.49. На наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, стоит кубик массой m. Плоскость находится в лифте, движущемся с ускорением a, направленным вверх. Найдите силу нормального давления кубика на плоскость. При каком коэффициенте трения μ между кубиком и плоскостью кубик не будет соскальзывать вниз?

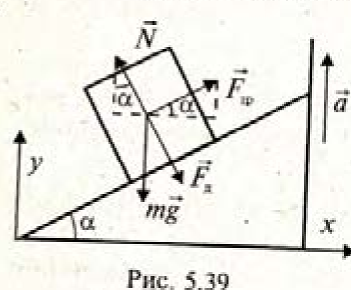


Рис. 5.39

Ответ: $F = m(g+a)\cos\alpha,\ \ \mu > \mathrm{tg}\,\alpha$.

Решение. $m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} = m\vec{a}$; (рис. 5.39)

$$F_{тр}\cos\alpha - N\sin\alpha = 0; \quad (1)$$

$$N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha - mg = ma. \quad (2)$$

Из (1) с учетом $F_{тр} = \mu N$ получим $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Из (2) $N = \dfrac{m(a+g)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = m(a+g)\cos\alpha$.

По третьему закону Ньютона $F_{д} = N = m(a+g)\cos\alpha$.

5.50. В лифте установлен динамометр, на котором подвешено тело массой $m = 1\,кг$. Что будет показывать динамометр, если: 1) лифт движется вверх с ускорением $a_1 = 4{,}9\,м/с^2$; 2) лифт движется вверх замедленно с ускорением $a_2 = 4{,}9\,м/с^2$; 3) лифт движется вниз с ускорением $a_3 = 2{,}45\,м/с^2$; 4) лифт движется вниз замедленно с ускорением $a_4 = 2{,}45\,м/с^2$.

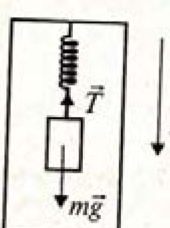


Рис. 5.40

Ответ: $T_1 = 14{,}7\,Н;\ T_2 = 4{,}9\,Н;\ T_3 = 7{,}35\,Н;\ T_4 = 12{,}25\,Н$.

Решение. Уравнение движения тела (рис. 5.40) $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$.

1) Скорость и ускорение направлены вверх

$\uparrow\vec{v}\uparrow\vec{a};\ \ mg - T_1 = -ma_1;\ \ T_1 = m(g + a_1) = 14{,}7\,Н$

2) $\uparrow\vec{v}\downarrow\vec{a};\ \ mg - T_2 = ma_2;\ \ T_2 = m(g - a_2) = 4{,}9\,Н$

3) $\downarrow\vec{v}\downarrow\vec{a};\ \ mg - T_3 = ma_3;\ \ T_3 = m(g - a_3) = 7{,}35\,Н$

4) $\downarrow\vec{v}\uparrow\vec{a};\ \ mg - T_4 = -ma_4;\ \ T_4 = m(g + a_4) = 12{,}25\,Н.$

Очевидно, что показания динамометра не зависят от направления движения, а зависят только от направления ускорения.

5.51. Человек массой 70 кг поднимается в лифте, движущемся равнозамедленно вертикально вверх с ускорением $1\,м/с^2$. Определите силу давления человека на пол кабины лифта.

Ответ: $F_{д} = 616\,Н$.

Решение. На человека, находящегося в кабине лифта, действуют: $m\vec{g}$ — сила тяжести и $\vec{N}$ — сила реакции опоры.

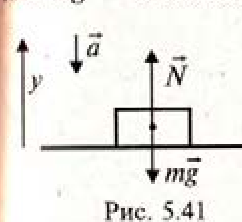


Рис. 5.41

Второй закон Ньютона для человека: $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$.

В проекции на ось y $N - mg = ma$, откуда $N = mg - ma = m(g - a)$, $N = 616$ Н.

На основании третьего закона Ньютона сила давления $F_{д}$ человека на пол кабины равна по модулю силе реакции N пола кабины: $\left|\vec{F}_{д}\right| = \left|\vec{N}\right| = 616\,Н$.

5.52. Масса лифта с пассажирами $M = 800\,кг$. Найдите ускорение лифта и его направление, если сила натяжения троса, на котором подвешена кабина лифта, такая же, как у неподвижного лифта массой $m = 600\,кг$.

Ответ: $a = 2{,}45\,м/с$, направлено вниз.

Указание. См. задачу 5.50.

5.53. С какой силой давит человек массой 70 кг на пол лифта, движущегося с ускорением $0{,}8\,м/с$: 1) вверх; 2) вниз? С каким ускорением должен двигаться лифт, чтобы человек не давил на пол? Вычислите силу натяжения каната, удерживающего лифт при подъеме: 1′) ускоренном; 2′) равномерном; 3′) замедленном. Масса лифта 300 кг.

Ответ: 1) $F_{д} = 740\,Н$; 2) $F_{д} = 630\,Н$, $a = g$.
1′) $T_1 = 3{,}9\,кН$; 2′) $T_2 = 3{,}6\,кН$; 3′) $T_3 = 3{,}3\,кН$.

Указание. См. задачу 5.50.

5.54. На однородный стержень длиной l действуют две силы: F_1 и F_2, приложенные к его концам и направленные в противоположные стороны (рис. 5.42). С какой силой будет растянут стержень в сечении, находящемся на расстоянии x от одного из его концов?

Рис. 5.42

Решение. Растягивающая сила F одинаково действует на обе части стержня, движущиеся с одинаковым ускорением (рис. 5.43).

Рис. 5.43

Если m — масса всего стержня, то $m_1 = \frac{m}{l}x$ — масса его левой части, а $m_2 = \frac{m}{l}(l-x)$ — масса правой.

Уравнения движения для каждой из частей: $F - F_1 = m_1 a$;

$F_2 - F = m_2 a$; откуда $F = \frac{m_2 F_1 + m_1 F_2}{m_1 + m_2} = F_1\left(\frac{l-x}{l}\right) + F_2\left(\frac{x}{l}\right)$.

5.55. Если тепловоз не может сразу сдвинуть тяжелый состав, то он толкает сначала состав назад, а затем уже тянет вперед. Почему так делается?

Решение. При толчке назад буферные пружины сжимаются. При последующем движении вперед вагонные сцепки натягиваются не сразу, а по очереди, начиная от тепловоза, т. е. он приводит состав в движение по частям.

5.56. На стержень длиной $2l$ надето колечко массой m, которое может скользить по стержню без трения. В начальный момент колечко находится на середине стержня. Стержень поступательно передвигается в горизонтальной плоскости с ускорением a в направлении, составляющем угол α со стержнем (рис. 5.44). Определите ускорение относительно стержня, силу реакции со стороны стержня на колечко и время, через которое колечко соскочит со стержня. Силу тяжести не учитывать.

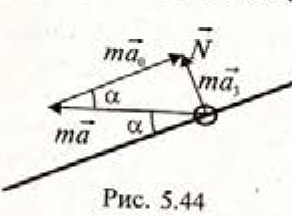


Рис. 5.44

Ответ: $a_0 = a\cos\alpha$, $N = ma\sin\alpha$, $t = \sqrt{2l/(a\cos\alpha)}$.

Решение. На колечко действует только сила реакции со стороны стержня $\vec{N}$. Абсолютное ускорение (относительно земли) $\vec{a}_3$ равно $\vec{a}_3 = \vec{a} + \vec{a}_0$; $a_0 = a\cos\alpha$ — ускорение относительно стержня; $a_3 = a\sin\alpha$.

Сила реакции $N = ma_3 = ma\sin\alpha$. Время, за которое колечко слетит со стержня, найдем из $l = a_0 t^2/2$; $t = \sqrt{2l/(a\cos\alpha)}$.

5.57 К концам шнура, перекинутого через неподвижный блок, подвешены грузы массами $m_1 = 0{,}1$ кг и $m_2 = 0{,}15$ кг. Пренебрегая трением и считая шнур и блок невесомыми, а шнур к тому же нерастяжимым, определите ускорение, с каким будут двигаться грузы, силу натяжения шнура и показания динамометра, на котором висит блок.

Ответ: $a = 1{,}96$ м/с^2; $T = 1{,}18$ Н; $F = 2{,}36$ Н.

Решение. Уравнения движения грузов (рис. 5.45)

$m_1\vec{g} + \vec{T} = m_1\vec{a}$; $m_2\vec{g} + \vec{T}' = m_2\vec{a}$.

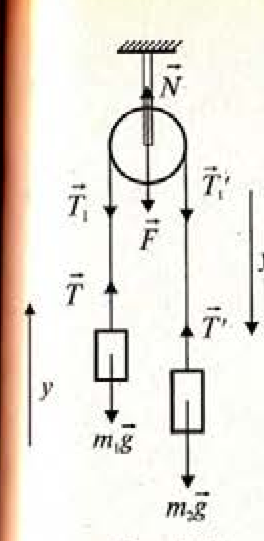


Рис. 5.45

Учитывая, что тела движутся с одинаковым ускорением, и $T = T' = T_1 = T_1'$, получим $T - m_1 g = m_1 a$; $m_2 g - T = m_2 a$.

Тогда $a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = 1{,}96$ м/с^2;

$T = m_1 g + m_1 a = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 1{,}18$ Н.

Показания динамометра

$N = F = 2T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 2{,}36$ Н.

5.58. Через неподвижный блок перекинута веревка, к одному из концов которой привязан груз массой $m_1 = 60$ кг, на другом конце повисла обезьяна массой $m_2 = 65$ кг, которая, выбирая веревку, поднимает груз, оставаясь при этом на одном и том же расстоянии от пола. Через сколько времени груз будет поднят на высоту $h = 12$ м? Массами веревки и блока пренебречь.

Ответ: $t = 5{,}4$ с.

Решение. Уравнения движения груза и обезьяны

$T - m_1 g = m_1 a$; $m_2 g - T = 0$;

откуда $T = m_2 g$; $a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1}$.

$h = \frac{at^2}{2}$; $t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$; $t = \sqrt{\frac{2hm_1}{(m_2 - m_1)g}} = 5{,}4$ с.

5.59. Два тела, массой $m = 240$ г каждое, подвешены на концах нити, перекинутой через блок. Какую массу m_0 должен иметь груз, положенный на одно из тел, чтобы каждое из них прошло за время $t = 4$ с путь $h = 160$ см?

Ответ: $m_0 = 10$ г.

Решение. Движение тела с грузом рассматриваем как движение тела массой $m + m_0$. Тогда $T - mg = ma$;

$(m + m_0)g - T = (m + m_0)a$; $m_0 = 2ma/(g - a)$;

$h = \frac{at^2}{2}$; $a = \frac{2h}{t^2}$; тогда $m_0 = \frac{4mh}{gt^2 - 2h} = 10$ г.

5.60. Два тела, массой $M = 200$ г каждое, подвешены на концах нити, перекинутой через блок. На одно из тел положен груз массой

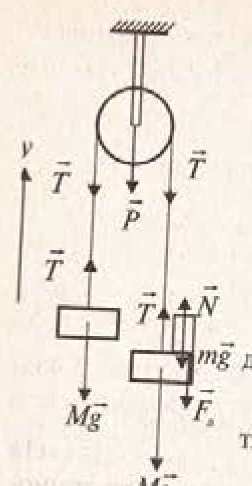


Рис. 5.46

$m = 40$ г. Найдите ускорение, силу, с которой груз давит на тело, а также силу давления на ось блока.

Ответ: $a = 0{,}89$ м/с²; $T = 2{,}14$ Н; $F_д = 0{,}36$ Н; $P = 4{,}28$ Н.

Решение. Для левого и правого тела (рис. 5.46)

$T - Mg = Ma$; $Mg + F_д - T = Ma$;

Для перегрузка $mg - N = ma$.

Сила давления перегрузка на тело $F_д = N$, тогда ускорение грузов $a = \dfrac{mg}{m+2M} = 0{,}89$ м/с²; сила натяжения нити $T = \dfrac{2Mg(M+m)}{m+2M} = 2{,}14$ Н.

Сила давления груза на тело

$$F_д = N = \frac{2mMg}{m+2M} = 0{,}36 \text{ Н}.$$

Сила давления на ось блока $P = 2T = \dfrac{4Mg(M+m)}{m+2M} = 4{,}28$ Н.

5.61. С каким ускорением движется система (рис. 5.47), если $m = 1$ кг, коэффициент трения $\mu = 0{,}2$. Какова сила натяжения T_1 нити, связывающей первое и второе тело, и сила натяжения нити T_2 между вторым и третьим?

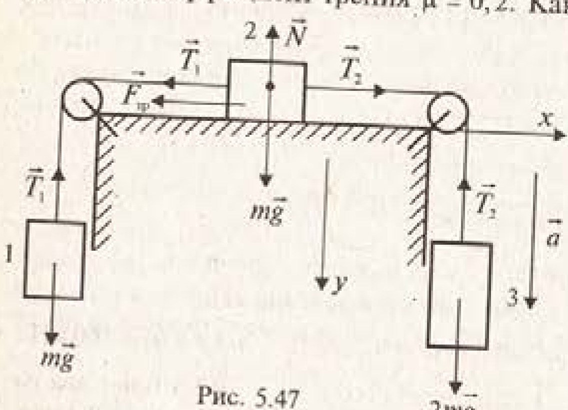


Рис. 5.47

Ответ: $a = 2$ м/с²; $T_1 = 12$ Н; $T_2 = 16$ Н.

Решение.

$T_1 - mg = ma$;

$T_2 - \mu mg - T_1 = ma$;

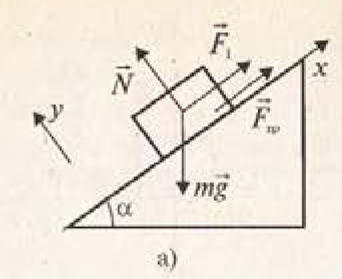
$2mg - T_2 = 2ma$,

отсюда

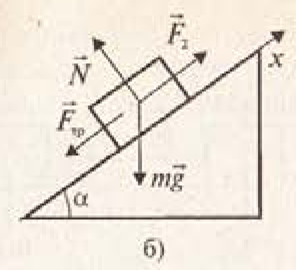
$a = g\dfrac{(1-\mu)}{4} = 2$ м/с²; $T_1 = m(a+g) = \dfrac{mg}{4}(5-\mu) = 12$ Н;

$T_2 = 2m(g-a) = \dfrac{mg}{2}(3+\mu) = 16$ Н.

5.62. Чтобы удерживать тележку на наклонной плоскости с углом наклона α, нужно приложить силу F_1, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, а чтобы вытащить ее наверх, нужно приложить силу F_2. Найдите коэффициент сопротивления.



а)



б)

Рис. 5.48

Решение. Уравнение движения $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F} = m\vec{a}$.

а) Тележку удерживают на наклонной плоскости (рис. 5.48а) $-mg\sin\alpha + F_{тр} + F_1 = 0$; полагаем $a = 0$; $F = F_1$, $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$ — в обоих случаях, тогда $F_1 = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. (1)

б) Тележку втаскивают наверх (рис. 5.48б). Движение равномерное: $-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + F_2 = 0$; $a = 0$; $F = F_2$;

$F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$. (2)

Из (1) и (2) получаем $F_1 + F_2 = 2mg\sin\alpha$; $F_2 - F_1 = 2\mu mg\cos\alpha$,

откуда $\dfrac{F_2 - F_1}{F_1 + F_2} = \dfrac{2\mu mg\cos\alpha}{2mg\sin\alpha}$; $\mu = \dfrac{F_2 - F_1}{F_1 + F_2}\operatorname{tg}\alpha$.

5.63. Вертолет, масса которого $m_1 = 27{,}2$ т, поднимает на тросах вертикально вверх груз массой $m_2 = 15{,}3$ т с ускорением $a = 0{,}6$ м/с². Найдите силу тяги вертолета и силу, действующую со стороны груза на прицепной механизм вертолета.

Ответ: $F_{тяги} = 442$ кН, $T = 160$ кН.

Решение. Трос нерастяжим, поэтому $T = T'$ (рис. 5.49)

Для груза $T - m_2 g = m_2 a$, откуда

$F_{тяги} = (m_1 + m_2)(g + a) = 442$ кН.

Сила натяжения троса $T = m_2(g + a) = 160$ кН.

Рис. 5.49

5.64. Электровоз массой $m_1 = 100$ т тянет два вагона $m_1 = m_2 = 50$ т каждый с ускорением $a = 0{,}1$ м/с². Найдите силу тяги электровоза и силу натяжения сцепок, если коэффициент сопротивления движению равен $\mu = 0{,}006$.

Ответ: $F_{тяги} = 32$ кН; $T_1 = 16$ кН; $T_2 = 8$ кН.

Решение. Для электровоза, первого и второго вагонов (рис. 5.50):

$m_1\vec{g} + \vec{F}_{тр_1} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_т = m_1\vec{a}$; (1)

$m_2\vec{g} + \vec{F}_{тр_2} + \vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}$; (2)

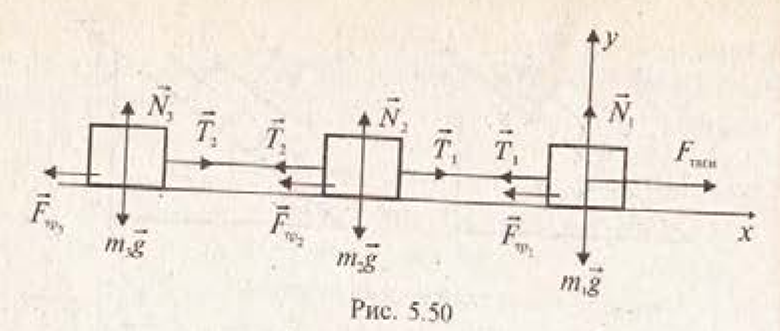


Рис. 5.50

$m_3\vec g + \vec F_{тр_3} + \vec N_3 + \vec T_2 = m_3\vec a.$ (3)

Из (1), (2), (3) получим: $-\mu m_1 g - T_1 + F_{тяги} = m_1 a;$

$-\mu m_2 g - T_2 + T_1 = m_2 a;\quad -\mu m_3 g + T_2 = m_3 a;$

$F_{тяги} = (m_1 + m_2 + m_3)(\mu g + a) = 32$ кН;

$T_1 = (m_2 + m_3)(\mu g + a) = 16$ кН;

$T_2 = m_3(\mu g + a) = 8$ кН.

5.65. Электровоз тянет состав, состоящий из n одинаковых вагонов, с ускорением a. Найдите силу натяжения сцепки между i-м (считая от начала состава) и $(i+1)$-м вагонами, если масса каждого вагона m, а коэффициент сопротивления μ (рис. 5.51).

Ответ: $T_i = (n-i)m(\mu g + a)$.

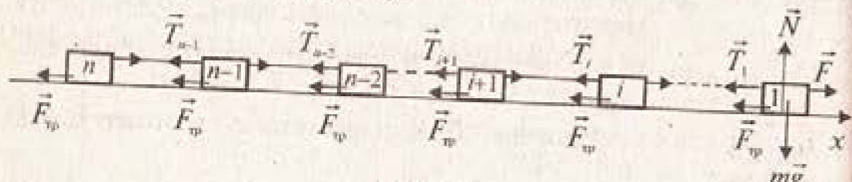


Рис. 5.51

Решение. Уравнения движения для последних $(n-i)$ вагонов ($F_{тр} = \mu mg$):

для n-го вагона	$T_{n-1} - \mu mg = ma;$
$n-1$	$T_{n-2} - T_{n-1} - \mu mg = ma;$
$n-2$	$T_{n-3} - T_{n-2} - \mu mg = ma;$
. . . .	. . . .
$i+1$	$T_i - T_{i+1} - \mu mg = ma.$

Сложим все уравнения: $T_i - (n-i)\mu mg = (n-i)ma$.

Сила натяжения сцепки между i-м и $(i+1)$-м вагонами

$T_i = (n-i)\mu mg + (n-i)ma = (n-i)m(\mu g + a).$

5.66. $n+1$ одинаковых грузов массой m каждый соединены друг с другом одинаковыми пружинами (рис. 5.52). К крайнему грузу

приложена некоторая сила, под действием которой система движется с ускорением $\vec a$ в горизонтальном направлении. Определите величину силы F и изменение длины Δl_i каждой пружины, если коэффициент трения между грузами и плоскостью равен μ и жесткость пружины равна k.

Ответ: $F = (n+1)m(a + \mu g);\quad \Delta l_i = m_i(a + \mu g)/k.$

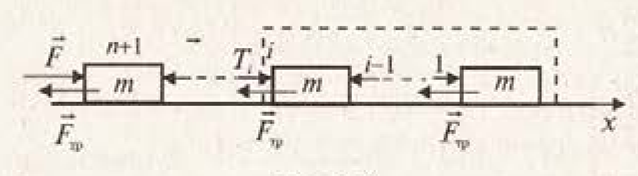


Рис. 5.52

Решение. На i-ю пружину действует сила сжатия T_i, при этом пружина сжимается на x_i; $T_i = kx_i$.

Уравнения движения для всех грузов имеют вид:

для $n+1$ груза	$F - T_n - \mu mg = ma;$
для n груза	$T_n - T_{n-1} - \mu mg = ma;$
. . . .	. . . .
для $i+1$ груза	$T_{i+1} - T_i - \mu mg = ma;$
для i-го	$T_i - T_{i-1} - \mu mg = ma;$
для первого (концевого)	$T_i - \mu mg = ma.$

Силы T_i, входящие в уравнения, — реакции пружин (силы давления со стороны пружин.

Сложим уравнения от первого до i-го (снизу) и от первого до последнего:

$$T_i - i\mu mg = ima; \tag{1}$$

$$F - (n+1)\mu mg = (n+1)ma. \tag{2}$$

Из (1) получаем сжатие i-й пружины $T_i = im(a + \mu g)$ и изменение ее длины $x_i = \dfrac{T_i}{k} = \dfrac{1}{k}im(a + \mu g)$.

Из (2) определим величину силы F

$F = (n+1)m(a + \mu g).$

5.67. Через блок (рис.5.53) перекинута нерастяжимая нить, на концах которой висят грузы с массами m_1 и m_2, причем $m_1 > m_2$. Блок начали поднимать вверх с ускорением a_0 относительно земли. Полагая, что нить скользит по блоку без трения, найдите силу натяжения нити, силу давления на ось блока и ускорения грузов m_1 и

m_2 относительно земли. Какой результат получится при $m_1 = 0,2$ кг, $m_2 = 0,1$ кг, $a_0 = 1$ м/с^2?

Ответ: $T = 1,44$ Н, $F_д = 2,88$ Н; $a_1 = 2,6$ м/с^2, $a_2 = 4,6$ м/с^2.

Решение. Ускорение тел относительно земли равно $\vec{a}_{1,2} = \vec{a} + \vec{a}_0$ (рис. 5.53). Предположим, что первое тело относительно земли опускается, а второе поднимается, тогда

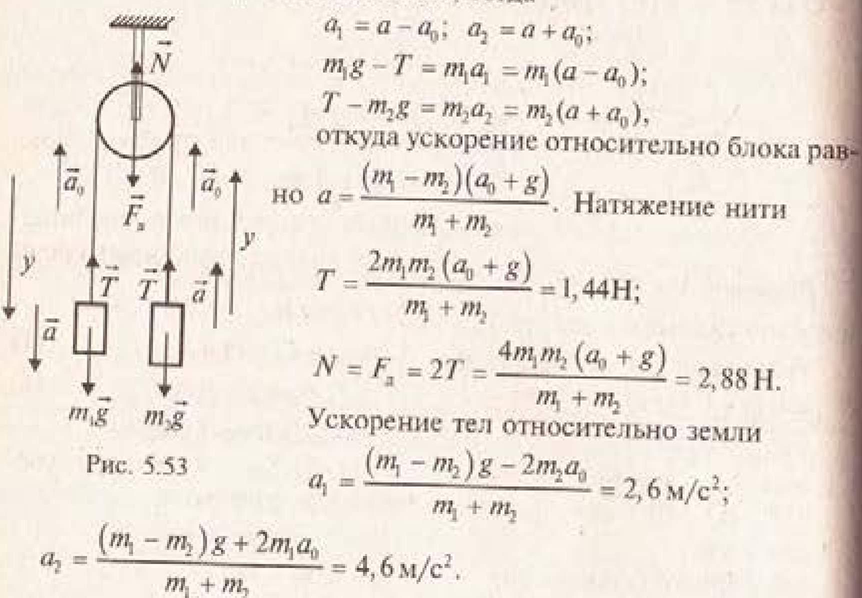


Рис. 5.53

$$a_1 = a - a_0;\quad a_2 = a + a_0;$$
$$m_1 g - T = m_1 a_1 = m_1(a - a_0);$$
$$T - m_2 g = m_2 a_2 = m_2(a + a_0),$$

откуда ускорение относительно блока равно $a = \dfrac{(m_1 - m_2)(a_0 + g)}{m_1 + m_2}$. Натяжение нити

$$T = \frac{2m_1 m_2 (a_0 + g)}{m_1 + m_2} = 1,44\text{Н};$$

$$N = F_д = 2T = \frac{4m_1 m_2 (a_0 + g)}{m_1 + m_2} = 2,88\text{ Н}.$$

Ускорение тел относительно земли

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g - 2m_2 a_0}{m_1 + m_2} = 2,6\text{ м/с}^2;$$

$$a_2 = \frac{(m_1 - m_2)g + 2m_1 a_0}{m_1 + m_2} = 4,6\text{ м/с}^2.$$

5.68. Найдите ускорения a_1 и a_2 тел с массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 600$ г и силу натяжения нитей в системе, показанной на рис. 5.54. Массой блоков и нитей и трением пренебречь.

Ответ: $a_1 = 2,8$ м/с^2; $a_2 = 1,4$ м/с^2; $T = 2,52$ Н.

Решение. Сила натяжения нити на всех участках одинакова. Уравнения движения для грузов $T - m_1 g = m_1 a_1$; $m_2 g - 2T = m_2 a_2$.

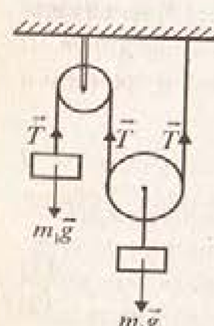


Рис. 5.54

Расстояние, которое пройдет первое тело, в 2 раза больше расстояния, пройденного вторым телом, т. к. они связаны одной нитью, а т. к. $h = at^2/2$, $h \sim a$, то $a_1 = 2a_2$. Тогда тело m_1 поднимается, а m_2 — опускается.

$$T - m_1 g = 2m_1 a_2;\quad m_2 g - 2T = m_2 a_2;$$

$$a_2 = \frac{(m_2 - 2m_1)g}{4m_1 + m_2} = 1,4\text{ м/с}^2;$$

$$a_1 = \frac{2(m_2 - 2m_1)g}{4m_1 + m_2} = 2,8\text{ м/с}^2;$$

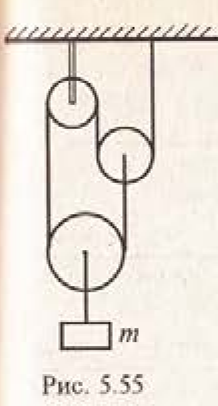


Рис. 5.55

$$T = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2} = 2,52\text{ Н}.$$

5.69. Найдите ускорение груза массой m и силу натяжения нитей в системе, показанной на рис. 5.55. Массой блоков и нитей и трением пренебречь.

Ответ: $a = g$, $T = 0$.

Решение. Все блоки связаны одной нитью, натяжение которой на всех участках постоянно.

Для груза $mg - 2T = ma$, для правого блока $T - 2T = 0$ (блок невесом), $T = 0$; $a = g$.

5.70. Определите натяжения нитей и ускорение грузов, показанных на рис. 5.56. Трением, массами блоков и нитей пренебречь.

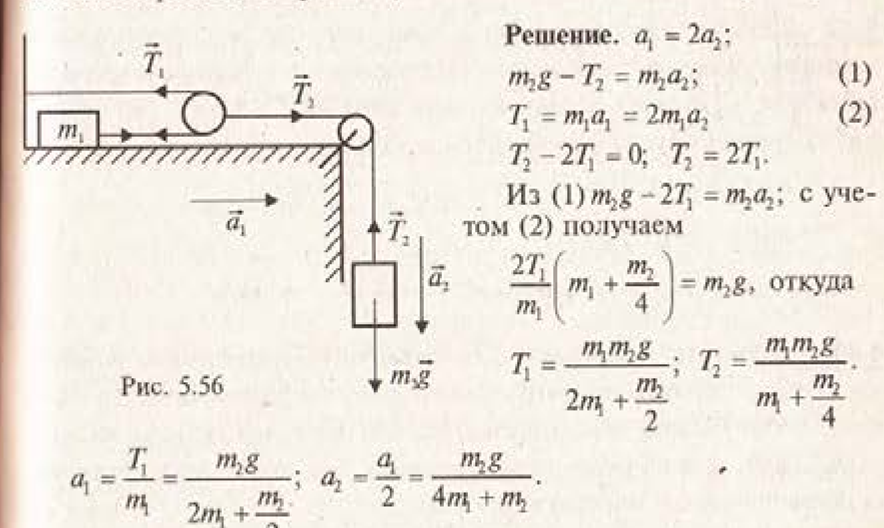


Рис. 5.56

Решение. $a_1 = 2a_2$;

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2; \quad (1)$$
$$T_1 = m_1 a_1 = 2m_1 a_2 \quad (2)$$
$$T_2 - 2T_1 = 0;\quad T_2 = 2T_1.$$

Из (1) $m_2 g - 2T_1 = m_2 a_2$; с учетом (2) получаем

$$\frac{2T_1}{m_1}\left(m_1 + \frac{m_2}{4}\right) = m_2 g,\text{ откуда}$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{2m_1 + \dfrac{m_2}{2}};\quad T_2 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + \dfrac{m_2}{4}}.$$

$$a_1 = \frac{T_1}{m_1} = \frac{m_2 g}{2m_1 + \dfrac{m_2}{2}};\quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{m_2 g}{4m_1 + m_2}.$$

5.71. С каким ускорением движутся тела (рис. 5.57)? Какова сила натяжения нити? Коэффициент трения между телом массой m_1 и горизонтальной плоскостью равен μ. Массами блоков и трением в их осях пренебречь. Нить нерастяжима.

Решение. Натяжение нити на всех участках одинаково — T (рис. 5.57). Пусть тело m_2 опускается, а m_3 поднимается. Уравнения движения:

$$T - \mu m_1 g = m_1 a_1; \quad (1)$$
$$m_2 g - 2T = m_2 a_2; \quad (2)$$
$$T - m_3 g = m_3 a_3; \quad (3)$$

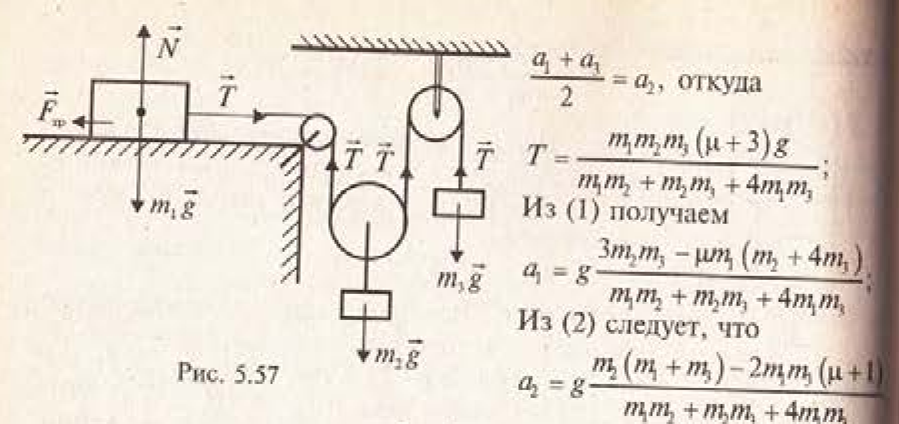


Рис. 5.57

$\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2$, откуда

$$T = \frac{m_1 m_2 m_3 (\mu + 3) g}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4 m_1 m_3};$$

Из (1) получаем

$$a_1 = g \frac{3 m_2 m_3 - \mu m_1 (m_2 + 4 m_3)}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4 m_1 m_3};$$

Из (2) следует, что

$$a_2 = g \frac{m_2 (m_1 + m_3) - 2 m_1 m_3 (\mu + 1)}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4 m_1 m_3}$$

Из (3) получаем $a_3 = g \frac{m_1 \left[m_2 (\mu + 2) - 4 m_3 \right] - m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4 m_1 m_3}$.

5.72. Брусок массой $m = 3$ кг с помощью пружины тянут равномерно по доске, расположенной горизонтально. Какова жесткость пружины, если она удлинилась при этом на $l = 5,0$ см? Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0,25$.

Ответ: $k = 147$ Н/м.

Решение. $-F_{тр} + F_{упр} = 0$

$$F_{тр} = \mu m g; \quad F_{упр} = kl; \quad \mu m g = kl; \quad k = \frac{\mu m g}{l} = 147 \text{ Н/м}.$$

5.73. Акробат массой $m = 70$ кг прыгнул с трапеции на натянутую сетку, которая при этом прогнулась на расстояние $\Delta h = 1$ м (рис. 5.58). Высота трапеции над сеткой $h = 6$ м. С каким ускорением a двигался акробат, прогибая сетку, и с какой силой реакции сетка действовала на тело акробата?

Ответ: $a = 58,8$ м/с², $N = 4802$ Н.

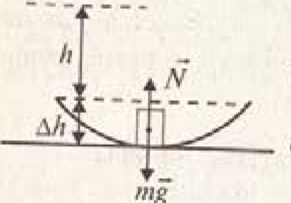


Рис. 5.58

Решение. Скорость, с которой акробат упал на сетку, $v = \sqrt{2gh}$.

Дальше он двигался равнозамедленно с ускорением

$$|a| = \frac{v^2}{2\Delta h} = \frac{gh}{\Delta h} = 58,8 \text{ м/с}^2.$$

Силу реакции сетки можно найти из соотношения $mg - N = ma$; $N = mg + m|a| = mg\left(1 + \frac{h}{\Delta h}\right) = 4802$ Н.

5.74. Определите ускорение грузов, показанных на рис. 5.59. Массы грузов $m = 5$ кг, $M = 1$ кг. Трением, массами блоков и нитей пренебречь.

Ответ: $a_1 = 1,96$ м/с²; $a_2 = 4,4$ м/с².

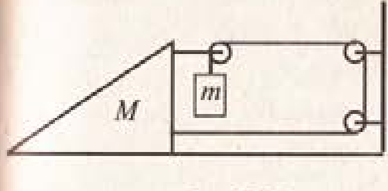


Рис. 5.59

Решение. Система грузов движется вправо как единое целое, поэтому $(m + M)a_1 = 2T$, где a_1 — ускорение горизонтального движения, T — натяжение нити. Для грузика m, опускающегося вниз, получим $mg - T = ma_2$, a_2 — ускорение вертикального движения.

При смещении призмы вправо на расстояние S груз опустится на $h = 2S$, т. е. $a_2 = 2a_1$.

Тогда $(m + M)a_2 = 4T$; $ma_2 = mg - T$, откуда

$$a_2 = \frac{4m}{M + 5m} g = 3,92 \text{ м/с}^2; \quad a_1 = \frac{2m}{M + 5m} g = 1,96 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение тела массой m относительно земли

$$a_2' = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{a_1^2 + 4a_1^2} = a_1\sqrt{5} = 4,38 \text{ м/с}^2.$$

5.75. Какую постоянную горизонтальную силу (рис. 5.60) нужно приложить к тележке массой $M = 1,0$ кг, чтобы грузы массами $m_1 = 0,40$ кг и $m_2 = 0,20$ кг относительно нее не двигались? С каким ускорением должна двигаться тележка, чтобы грузы покоились? Коэффициент трения $\mu = 0,3$.

Ответ: $F = 7,8$ Н; $a = 5,27$ м/с².

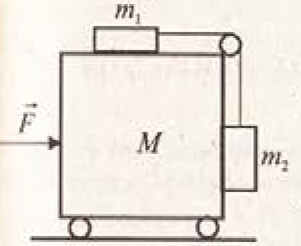


Рис. 5.60

Решение. Если грузы m_1 и m_2 покоятся, то $m_1 a = T$; $m_2 g = T$, откуда $a = \frac{m_2}{m_1} g$.

Система трех грузов движется, как целое. Сила, приложенная к системе, равна

$$F = (m_1 + m_2 + M)a,$$

$$F = (m_1 + m_2 + M)\frac{m_2}{m_1} g = 7,84 \text{ Н}.$$

Найдем ускорение, при котором тела еще покоятся относительно тележки:

$$m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр_1} = m_1\vec{a},$$

$$m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр_2} = m_2\vec{a}.$$

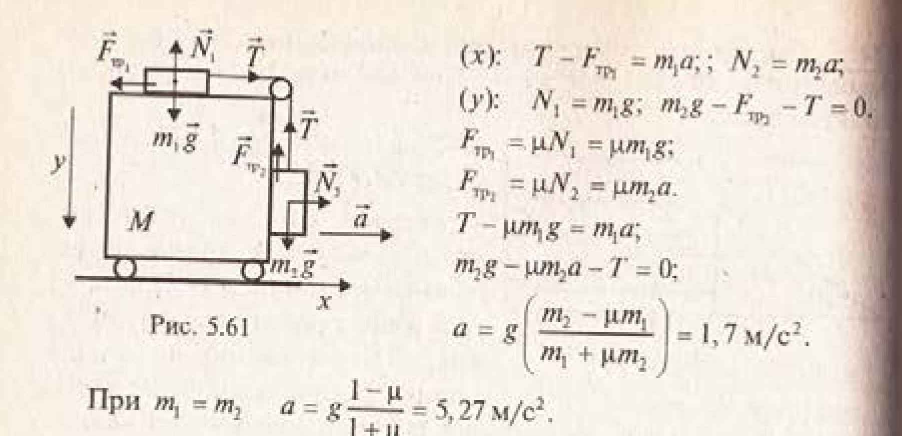


Рис. 5.61

$$(x):\quad T - F_{тр_1} = m_1 a;\ ;\ N_2 = m_2 a;$$
$$(y):\quad N_1 = m_1 g;\ m_2 g - F_{тр_2} - T = 0.$$
$$F_{тр_1} = \mu N_1 = \mu m_1 g;$$
$$F_{тр_2} = \mu N_2 = \mu m_2 a.$$
$$T - \mu m_1 g = m_1 a;$$
$$m_2 g - \mu m_2 a - T = 0;$$
$$a = g\left(\frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + \mu m_2}\right) = 1,7\ \text{м/с}^2.$$

При $m_1 = m_2$ $\quad a = g\dfrac{1-\mu}{1+\mu} = 5,27\ \text{м/с}^2.$

5.76. На одном конце нити, перекинутой через блок, подвешено тело массой $m_1 = 30$ г. Другой конец нити соединен с легкой пружиной, к концу которой прикреплено тело массой $m_2 = 50$ г. Длина пружины в нерастянутом состоянии $l_0 = 10$ см. Под действием силы $F = 0,1$ Н пружина удлиняется, ее деформация $\Delta l = 2$ см. Найдите длину l пружины во время движения грузов, считая, что колебания в системе отсутствуют.

Ответ: $l = 17,35$ см.

Решение. Сила, растягивающая пружину, равна (см. задачу 5.57) $T = \dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = F$. По закону Гука $F = T = k\Delta l = k(l - l_0)$, $k = \dfrac{F}{\Delta l}$ — жесткость пружины, откуда $l = l_0 + \dfrac{2m_1 m_2 g \Delta l}{(m_1 + m_2)F} = 17,35$ см.

6. ДИНАМИКА КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

6.1. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикальной оси с частотой $n = 30\ \text{мин}^{-1}$. Наибольшее расстояние от оси вращения, на котором удерживается тело на диске, $l = 20$ см. Чему равен коэффициент трения тела о диск?

Ответ: $\mu = 0,2$.

Решение. При вращении сила трения играет роль центростремительной силы, тогда $F_{тр} = m\omega^2 l$; $F_{тр} = \mu mg$; $\omega = 2\pi \cdot n$; $\mu mg = 4\pi^2 n^2 ml$ откуда $\mu = 4\pi^2 n^2 l/g = 0,2$.

6.2. На горизонтально вращающейся платформе на расстоянии $r = 50$ см от оси вращения лежит груз. При какой частоте вращения

платформы груз начнет скользить? Коэффициент трения между грузом и платформой $\mu = 0,05$.

Ответ: $n > 0,16$ об/с.

Решение самостоятельное. См. задачу 6.1.

6.3. На краю горизонтально вращающейся платформы радиуса $R = 1$ м лежит груз. В какой момент времени t после начала вращения платформы груз соскользнет с нее, если ее вращение равноускоренное и в момент времени $t_0 = 2$ мин она имеет угловую скорость $\omega = 1,4$ рад/с? Коэффициент трения между грузом и платформой $\mu = 0,05$.

Ответ: $t = 1$ мин.

Решение. Груз соскользнет с платформы, когда она достигнет угловой скорости ω_m, при которой сила трения будет равна центростремительной силе $\mu mg = m\omega_m^2 R$, $\omega_m = \sqrt{\dfrac{\mu g}{R}}$.

Для определения этой скорости найдем угловое ускорение, учитывая, что вращение начинается из положения покоя, т. е. $\omega_0 = 0$ и $\beta = \dfrac{\omega}{t_0}$. Движение равноускоренное $\omega_m = \beta t$, тогда момент времени, когда груз соскользнет с платформы $t = \dfrac{\omega_m}{\beta} = \dfrac{t_0}{\omega}\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}}$; $t = 60\ \text{с} = 1$ мин.

6.4. Гладкий горизонтальный диск вращается вокруг вертикальной оси с частотой $n = 480\ \text{мин}^{-1}$. На поверхности диска лежит шар массой $m = 0,10$ кг, прикрепленный к центру диска пружиной, жесткость которой равна $k = 1500$ Н/м. Какую длину будет иметь пружина при вращении диска, если ее длина в недеформированном состоянии $l_0 = 20$ см?

Ответ: $l = 24$ см.

Решение. Сила упругости пружины играет роль центростремительной силы $F_{упр} = m\omega^2 l$. $k(l - l_0) = 4\pi^2 n^2 lm$, откуда длина пружины при вращении $l = \dfrac{kl_0}{k - 4\pi^2 n^2 m} = 0,24$ м.

6.5. На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, лежит монета. Ей сообщили скорость параллельно основанию наклонной плоскости. Определите кривизну траектории, по которой движется монета, в начальный момент.

Ответ: $R = v^2/g\sin\alpha$.

Решение. Как только монета сдвинулась с места, ускорение, с которым она будет двигаться вниз по наклонной плоскости, равно проекции ускорения свободного падения на наклонную плоскость $g\sin\alpha$. Это ускорение играет роль центростремительного ускорения, т.е. радиус кривизны траектории, по которой движется монета в начальный момент, равен $R = v^2/g\sin\alpha$.

6.6. Шар массой m подвешен на нити длиной l. На рис. 6.1 показаны два различных движения шара по окружности: а) в горизонтальной плоскости (равномерное вращение); б) в вертикальной плоскости (неравномерное вращение). Для каждого положения шара найдите силу натяжения нити, модуль и направление ускорения шара, линейную и угловую скорости шара.

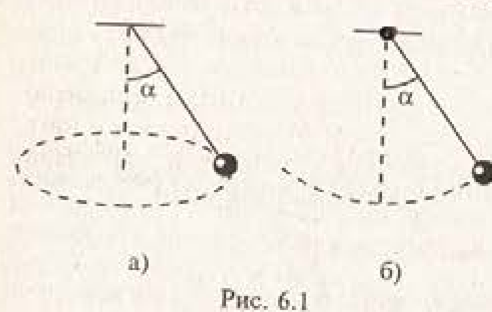


Рис. 6.1

Ответ: $T_1 = mg/\cos\alpha$; $T_2 = mg\cos a$; $a_1 = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $a_2 = g\sin\alpha$; $v_1 = \sqrt{gl\sin a\cdot \mathrm{tg}\,a}$; $v_2 = 0$; $\omega_1 = \sqrt{g/(l\cos a)}$; $\omega_2 = 0$.

Решение. а) В результате действия силы тяжести и силы натяжения нити появляется сила, обеспечивающая центростремительное ускорение $\vec{a}_n$ (рис. 6.2).

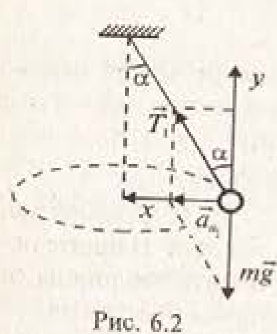


Рис. 6.2

Используем второй закон Ньютона

$m\vec{g} + \vec{T}_1 = m\vec{a}_{n_1}$;

(x): $T_1\sin\alpha = ma_{n_1}$;

(y): $T_1\cos\alpha = mg$, откуда $T_1 = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$;

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a_{n_1}}{g}$; $a_1 = a_{n_1} = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Угловая скорость $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{a_{n_1}}{r}} = \sqrt{\dfrac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{l\sin\alpha}} = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}}$.

Линейная скорость

$$v_1 = \omega_1 r = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}\cdot l\sin\alpha = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} = \sqrt{gl\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Линейная скорость направлена по касательной к траектории.

б) $m\vec{g} + \vec{T}_2 = m\vec{a}_{n_2}$ (рис. 6.3)

(y): $T_2 - mg\cos\alpha = m\dfrac{v_2^2}{l}$.

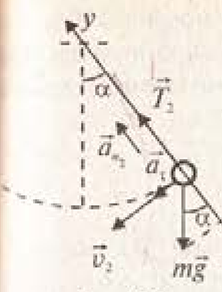


Рис. 6.3

В момент максимального отклонения шарика его линейная и угловая скорости равны нулю ($v_2 = 0$, $\omega = 0$), поэтому его центростремительное ускорение $a_{n_2} = 0$, тогда $T_2 = mg\cos\alpha$.

Но движение неравномерное, скорость изменяется по величине, поэтому существует еще тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории и равное $a_2 = a_\tau = g\sin\alpha$.

6.7. На рис. 6.1а изображен так называемый конический маятник, состоящий из шарика, прикрепленного к нити и описывающего окружность в горизонтальной плоскости. Масса шарика $m = 100$ г, длина нити $l = 40$ см, угол отклонения от вертикали $\alpha = 60°$. Найдите угловую скорость шарика и силу натяжения нити.

Ответ: $\omega = \sqrt{g/l\cos a} = 7$ рад/с, $T = 2$ Н.

Решение самостоятельное. См. задачу 6.6.

6.8. Математический маятник имеет массу m и длину l. В момент, когда он образует угол α с вертикалью, его скорость равна v. Какова в этот момент сила натяжения нити?

Ответ: $T = mg\left(\cos\alpha + v^2/gl\right)$.

Решение. Уравнение движения (рис. 6.3)

$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_n$;

(y): $T - mg\cos\alpha = m\dfrac{v^2}{l}$, откуда сила натяжения нити

$$T = mg\left(\cos\alpha + \frac{v^2}{gl}\right).$$

6.9. Груз, подвешенный на нити длиной $l = 98$ см, равномерно вращается по окружности в горизонтальной плоскости. Найдите период вращения груза, если при его вращении нить отклонена от вертикали на угол $\alpha = 60°$.

Ответ: $T_\tau = 1{,}4$ с.

Решение. Период вращения груза $T_\tau = 2\pi r/v$. Уравнение движения $m\vec{g} + \vec{F}_н = m\vec{a}_n$ (рис. 6.2).

(x): $F_н\sin\alpha = ma_n$; (y): $F_н\cos\alpha = mg$, откуда $v = \sqrt{gl\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}$, тогда период обращения

$$T_\tau = \frac{2\pi\ l\sin\alpha}{\sqrt{gl\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha}.\quad T_\tau = 1{,}4\text{ с}.$$

6.10. На нити длиной 1,0 м подвешено тело массой 100 г. Как относятся ускорения, с которыми будет вращаться тело, в случаях, если нить образует с вертикалью углы $\alpha_1 = 30°$ и $\alpha_2 = 60°$? Каково при этом отношение линейных скоростей тела?

Ответ: $a_1/a_2 = 1/3$; $\upsilon_1/\upsilon_2 = \sqrt{\sin\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_1 / \sin\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_2}$.

Решение самостоятельное. См. задачу 6.6а.

6.11. Шарик, подвешенный на нити, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Нить составляет с вертикалью угол α_1, а период вращения T_1. Найдите период обращения шарика T_2, если маятник находится в лифте, движущемся с постоянным ускорением, направленным вниз. Угол отклонения нити при этом α_2.

Ответ: $T_2 = T_1\sqrt{g\cos\alpha_2/(g-a)\cos\alpha_1}$.

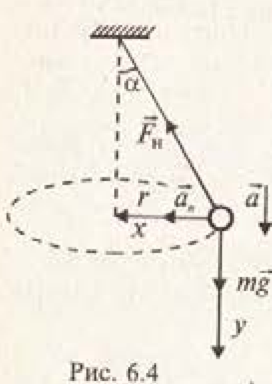


Рис. 6.4

Решение. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $F_н$, результирующая которых обеспечивает центростремительное ускорение $\vec{a}_n$. В этом случае период вращения шарика равен (см. задачу 6.9). $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha}$. Если вся система движется вниз с ускорением $\vec{a}$, то проекции уравнения движения на оси равны (рис. 6.4):

(x): $F_{н_2}\sin\alpha_2 = m\upsilon_2^2/r_2$;

(y): $mg - F_{н_2}\cos\alpha_2 = ma$, откуда

$\upsilon_2 = \sin\alpha_2\sqrt{(g-a)l/\cos\alpha_2}$, тогда

$$T_2 = \frac{2\pi r_2}{\upsilon_2} = 2\pi\frac{l\sin\alpha_2}{\sqrt{(g-a)l/\cos\alpha_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}\cos\alpha_2},$$

$$T_2 = T_1\sqrt{g\cos\alpha_2/(g-a)\cos\alpha_1}.$$

6.12. Найдите силу, с которой мотоциклист массой m, движущийся со скоростью υ, давит на середину моста в случае: 1) горизонтального моста; 2) выпуклого моста радиусом R; 3) вогнутого моста радиусом R.

Ответ: $F_1 = mg$; $F_2 = mg\left(1 - \upsilon^2/Rg\right)$; $F_3 = mg\left(1 + \upsilon^2/Rg\right)$.

Решение. Согласно третьему закону Ньютона сила давления на опору по модулю равна силе нормальной реакции опоры $|\vec{F}_д| = |\vec{N}|$.

1) Согласно второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{N} = 0$, тогда $|\vec{N}| = |\vec{F}_{д_1}| = mg$ (рис. 6.5а).

2) $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$; (рис. 6.5б)

(y): $mg - N = \frac{m\upsilon^2}{R}$;

$$|\vec{F}_{д_2}| = |\vec{N}| = m\left(g - \frac{\upsilon^2}{R}\right).$$

3) $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$; (рис. 6.5в)

(y): $N - mg = \frac{m\upsilon^2}{R}$;

$$|\vec{F}_{д_3}| = |\vec{N}| = m\left(g + \frac{\upsilon^2}{R}\right).$$

Рис. 6.5

6.13. Как относятся друг к другу силы, с которыми автомобиль давит на середину выпуклого и вогнутого мостов? Радиус кривизны моста в обоих случаях равен 40 м. Скорость движения автомобиля 36 км/ч.

Ответ: $F_1/F_2 = 1,7$.

Решение самостоятельное. См. задачу 6.12.

6.14. По выпуклому мосту, радиус кривизны которого $R = 90$ м, со скоростью $\upsilon = 54$ км/ч движется автомобиль массой $m = 2,0$ т. Определите, в какой точке сила давления автомобиля на мост равна $F_д = 5,0$ кН.

Ответ: $\alpha = 60°$ с вертикалью.

Решение. Уравнение движения (рис. 6.6)

$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$; $|\vec{F}_д| = |\vec{N}|$

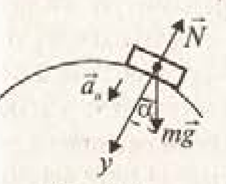


Рис. 6.6

(y): $mg\cos\alpha - F_д = \frac{m\upsilon^2}{R}$;

$\cos\alpha = \frac{F_д R + m\upsilon^2}{mgR}$; $\cos\alpha = 0,5$;

$\alpha = \arccos\frac{F_д R + m\upsilon^2}{mgR}$; $\alpha = 60°$ с вертикалью.

6.15. Трамвай, масса которого $m = 19,6$ т, идет по выпуклому мосту со скоростью $\upsilon = 32,4$ км/ч. Радиус кривизны моста $R = 30$ м. С какой силой давит трамвай на мост на расстоянии $S = 15,7$ м от его середины?

Ответ: $F = mg\left(\cos\alpha - \upsilon^2/Rg\right) = 1,14\cdot 10^5$ Н, $\alpha = 360S/2\pi R = 30°$.

Решение самостоятельное. См. задачу 6.14.

6.16. Автомобиль движется по выпуклому мосту радиусом $R = 40$ м. Какое максимальное горизонтальное ускорение может развить автомобиль в высшей точке, если скорость его в этой точке $\upsilon = 50,4$ км/ч, а коэффициент трения колес автомобиля о мост $\mu = 0,60$?

Ответ: $a_\tau = 2,94$ м/с^2.

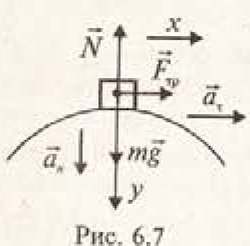


Рис. 6.7

Решение. При вращении колес покрышки ведущих колес отталкиваются от поверхности дороги, действуя на нее в сторону, противоположную движению машины. По третьему закону Ньютона поверхность действует на автомобиль в направлении движения.

Сцепление колес с поверхностью дороги осуществляется за счет трения, поэтому при качении автомобиля движущей силой является сила трения, направленная по касательной в сторону движения (рис. 6.7).

По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$; $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.

(x): $F_{тр} = ma_\tau$;

(y): $mg - N = ma_n = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$;

$F_{тр} = \mu N = ma_\tau$; $N = m\left(g - \dfrac{\upsilon^2}{R}\right)$; $\mu m\left(g - \dfrac{\upsilon^2}{R}\right) = ma_\tau$;

Максимальное горизонтальное (тангенциальное) ускорение равно $a_\tau = \mu g\left(1 - \dfrac{\upsilon^2}{gR}\right)$; $a_\tau = 2,94$ м/с^2.

6.17. Через реку шириной $S = 60$ м переброшен выпуклый мост в форме дуги окружности. Верхняя точка моста поднимается над берегом на высоту $h = 5$ м. Мост может выдержать максимальную силу давления $F_д = 24,5$ кН. При какой скорости грузовик массой $m = 3,5$ т может переехать через мост?

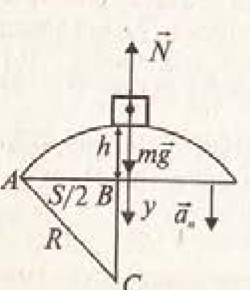


Рис. 6.8

Ответ: $\upsilon \geq 58$ км/ч.

Решение. Уравнение движения

(y): $mg - N = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$, где $|\vec{N}| = |\vec{F}_д|$;

тогда $\upsilon \geq \sqrt{R(g - F_д/m)}$.

Радиус кривизны определим из ΔABC (рис. 6.8) $R^2 = (S/2)^2 + (R-h)^2$, откуда

$R = \dfrac{S^2 + 4h^2}{8h}$; $R = 92,5$ м; тогда максимальная скорость равна $\upsilon \geq 16$ м/с $= 58$ км/ч.

6.18. Самолет описывает «мертвую петлю» радиусом $R = 200$ м в вертикальной плоскости со скоростью $\upsilon = 360$ км/ч. С какой силой прижимается летчик к сиденью в наивысшей и наинизшей точках петли, если его масса $m = 70$ кг?

Ответ: $F_1 = 2800$ Н, $F_2 = 4200$ Н.

Решение. На летчика действуют сила тяжести и сила реакции опоры, обеспечивающие центростремительное ускорение, направленное к центру окружности (рис. 6.9),

$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$.

Рис. 6.9

В верхней точке $mg + N_1 = \dfrac{m\upsilon^2}{R}$;

$N_1 = m\left(\dfrac{\upsilon^2}{R} - g\right)$.

Сила реакции опоры равна силе давления летчика на сиденье

$|\vec{F}_д| = |\vec{N}_1| = 2800$ Н.

В нижней точке $N_2 - mg = \dfrac{m\upsilon^2}{R}$

$|\vec{F}_{д_2}| = |\vec{N}_2| = m\left(\dfrac{\upsilon^2}{R} + g\right) = 4200$ Н.

6.19. Самолет описывает «мертвую петлю», имеющую радиус $R = 255$ м. Какую минимальную скорость υ должен иметь самолет в верхней точке петли, чтобы летчик не повис на ремнях, которыми он пристегнут к креслу?

Ответ: $\upsilon \approx 180$ км/ч.

Решение. В верхней точке траектории минимальная скорость, при которой летчик не повиснет на ремнях, это та — при которой он только перестал давить на кресло, т. е. когда $|\vec{F}_д| = |\vec{N}_1| = 0$.

Тогда (см. задачу 6.18) $mg + N = \dfrac{m\upsilon^2}{R}$; $N = 0$;

$mg = \dfrac{m\upsilon^2}{R}$; $\upsilon = \sqrt{Rg} = 50$ м/с ≈ 180 км/ч.

6.20. Самолет с реактивным двигателем летит со скоростью $\upsilon = 1440$ км/ч. Считая, что человек может переносить пятикратное

увеличение веса, определите радиус окружности, по которой может двигаться самолет в вертикальной плоскости.

Ответ: $R = 4081$ м.

Решение. Сила давления, равная силе нормальной реакции опоры, равна $|\vec{F}_д| = |\vec{N}_1| = 5mg$.

В нижней точке траектории $N - mg = \frac{mv^2}{R}$; $mg + \frac{mv^2}{R} = 5mg$;

$R = \frac{v^2}{4g}$; $R = 4081$ м.

6.21. Самолет движется по окружности с постоянной скоростью $v = 500$ км/ч. Определите радиус R этой окружности, если корпус самолета повернут вокруг направления полета на угол $\alpha = 15°$.

Ответ: $R = 7346$ м.

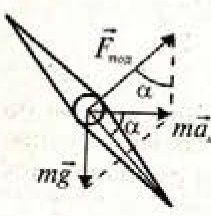


Рис. 6.10

Решение. Центростремительная сила является результирующей подъемной силы $\vec{F}_{под}$ и силы тяжести $m\vec{g}$ (подъемная сила перпендикулярна плоскости крыльев) (рис. 6.10).

По второму закону Ньютона $mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = m\frac{v^2}{R}$,

откуда $R = \frac{v^2}{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}$; $R = 7346$ м.

6.22. Тело массой $m = 0{,}1$ кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной $l = 1$ м. Ось вращения расположена над полом на высоте $H = 2$ м. При прохождении нижнего положения нить обрывается и тело падает на пол на расстоянии $\Delta L = 4$ м (по горизонтали) от точки обрыва. Определите силу натяжения нити в момент ее обрыва.

Ответ: $T = 9$ Н.

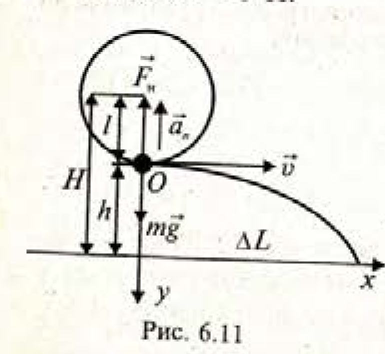


Рис. 6.11

Решение. После обрыва нити в точке O тело движется как брошенное горизонтально под действием силы тяжести по параболе (рис. 6.11).

В этом случае $x = \Delta L = vt$;

$y = h = H - l = \frac{gt^2}{2}$, откуда

$v = \sqrt{\frac{g\Delta L^2}{2(H-l)}}$. По второму закону Ньютона в момент обрыва нити $mg - F_н = -\frac{mv^2}{l}$. Тогда сила натяжения нити в момент ее обрыва $F_н = mg + \frac{mv^2}{l} = mg\left(1 + \frac{\Delta L^2}{2(H-l)l}\right)$, $F_н = 9$ Н.

6.23. С каким максимальным периодом T можно равномерно вращать в вертикальной плоскости шарик, привязанный к нити, имеющей длину $l = 1{,}96$ м?

Ответ: $T = 2{,}8$ с.

Решение. Чтобы период вращения был максимальным, скорость шарика при вращении должна быть минимальной, что возможно при минимальном натяжении нити в верхней точке, т. е. при $F_н = 0$.

В верхней точке траектории $F_н + mg = \frac{mv^2}{l}$; $mg = \frac{mv^2}{l}$; $v = \sqrt{gl}$.

Период вращения $T = \frac{2\pi l}{v} = \frac{2\pi l}{\sqrt{gl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; $T = 2{,}8$ с.

6.24. С какой силой, направленной горизонтально, давит вагон трамвая массой 24 т на рельсы, если он движется по закруглению радиусом 100 м со скоростью 18 км/ч? Во сколько раз изменится эта сила, если скорость движения увеличится вдвое?

Ответ: $F_{д_1} = 6$ кН; $F_{д_2} = 24$ кН.

Решение. При движении трамвая по закруглению радиусом R со скоростью v, у него, благодаря силе трения, появляется центростремительное ускорение $a_н = \frac{v^2}{R}$.

Согласно третьему закону Ньютона трамвай действует на рельсы с такой же силой $F_д$, направленной горизонтально, $\vec{F}_{тр} = -\vec{F}_д$; $F_{тр} = F_д$. $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}_н$.

Направим ось x по радиусу к центру кривизны закругления (по направлению центростремительного ускорения).

Тогда $F_{тр} = F_{д_1} = m\frac{v^2}{R}$; $F_{д_1} = 6$ кН.

$F_{д_2} = m\left(\frac{2v}{R}\right)^2 = 4F_{д_1}$; $F_{д_2} = 24$ кН.

6.25. Поезд движется по закруглению радиусом $R = 765$ м со скоростью $v = 72$ км/ч. Определите, на сколько внешний рельс должен быть выше внутреннего. Расстояние между рельсами принять $b = 1{,}5$ м.

Ответ: $h = 0{,}08$ м.

Решение. Внешний рельс на закруглениях поднимают над внутренним, чтобы исключить боковое давление на реборды колес (выступающая часть обода колеса, предохраняющая его от схода с рельса). Тогда на вагон действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции рельсов $\vec{N}$, равнодействующая которых обеспечивает центростремительное ускорение (рис. 6.12).

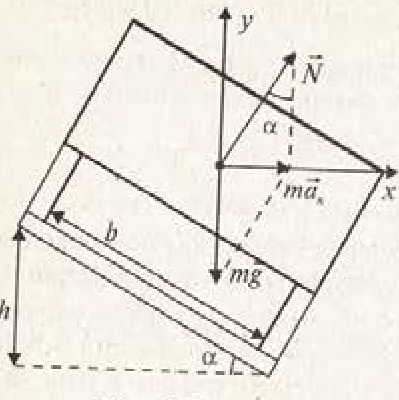


Рис. 6.12

Уравнение движения $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$;

$$(x):\quad N\sin\alpha = \frac{mv^2}{R};$$

$$(y):\quad N\cos\alpha - mg = 0;$$

откуда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v^2}{Rg}$.

Из рис. 6.12 видно, что $h = b\sin\alpha$, но т. к. угол α достаточно мал, то $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$, следовательно, $h = \dfrac{bv^2}{Rg}$; $h = 0{,}08$ м.

6.26. Какую скорость v должен иметь вагон, движущийся по закруглению радиусом $R = 98$ м, чтобы шар массой $m = 10$ кг, подвешенный на нити к потолку вагона, отклонился от вертикали на угол $\alpha = 45°$? Какова при этом будет сила натяжения $F_н$ нити?

Ответ: $v = 112$ км/ч; $F_н = 137$ Н.

Решение самостоятельное.

6.27. С какой максимальной скоростью может ехать по горизонтальной плоскости мотоциклист, описывая дугу радиусом $R = 90$ м, если коэффициент трения резины о дорогу $\mu = 0{,}40$. На какой угол от вертикали он должен при этом отклониться?

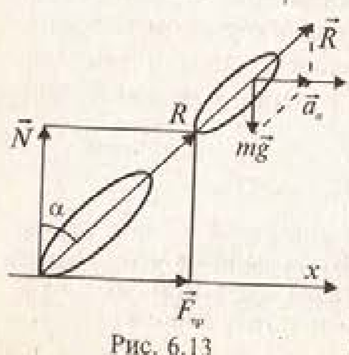


Рис. 6.13

Ответ: $\alpha = 22°$; $v_{max} = 68{,}4$ км/ч.

Решение. На систему тел (велосипедист и велосипед) действуют три силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ (рис. 6.13).

Результирующая сил трения и нормальной реакции опоры — сила реакции опоры $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$ направлена по оси велосипеда и проходит через центр тяжести велосипедиста. Уравнение движения велосипедиста: $m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}_n$.

Проекция на ось x дает: $F_{тр} = \dfrac{mv^2}{R}$. Сила трения $F_{тр} = \mu mg$, тогда $\mu mg = \dfrac{mv_{max}^2}{R}$, $v_{max} = \sqrt{\mu gR}$, $v_{max} = 19$ м/с $= 68{,}4$ км/ч.

С другой стороны $mg\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{mv^2}{R}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v^2}{gR} = \mu$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4$, $\alpha = 22°$.

6.28. Какова должна быть наименьшая скорость мотоцикла для того, чтобы он мог ехать по внутренней поверхности вертикального кругового цилиндра радиусом $R = 6$ м по горизонтальной окружности, если известно, что коэффициент трения скольжения между шинами и поверхностью цилиндра $\mu = 0{,}4$. Определите угол наклона корпуса мотоцикла к вертикали.

Ответ: $\alpha = 68°12'$, $v = 12{,}1$ м/с.

Решение. На мотоциклиста действует три силы: сила реакции $\vec{N}$, перпендикулярная поверхности цилиндра, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ (рис. 6.14). По второму закону Ньютона: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$. Спроецируем уравнение на оси Ox и Oy.

$$N = \frac{mv^2}{R};\quad F_{тр} - mg = 0.$$

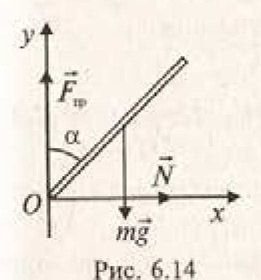


Рис. 6.14

При движении с минимальной скоростью $F_{тр}$ равна силе трения покоя:

$F_{тр} = \mu N$. Тогда $\mu N - mg = 0$; $N = \dfrac{mg}{\mu}$, следовательно,

$$\frac{mg}{\mu} = \frac{mv^2}{R};\quad v = \sqrt{\frac{gR}{\mu}};\quad v = 12{,}1\ \text{м/с}.$$

Угол α, образуемый корпусом мотоцикла с вертикалью, найдем, записав равенство нулю моментов сил трения и реакции относительно центра тяжести мотоцикла:

$$F_{тр}\sin\alpha - N\cos\alpha = 0;\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mu} = \frac{5}{2};\quad \alpha = 68°12'.$$

6.29. С какой скоростью должен двигаться мотоциклист по гладкому треку с углом наклона $\alpha = 40°$ и радиусом закругления $R = 40$ м? Учесть, что велосипед перпендикулярен полотну дороги.

Ответ: $v = 18$ м/с.

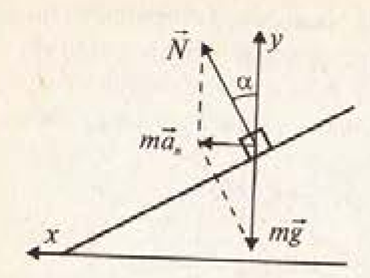


Рис. 6.15

Решение. Согласно второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$ (рис. 6.15).

(x): $N\sin\alpha = m\dfrac{v^2}{R}$;

(y): $N\cos\alpha - mg = 0$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v^2}{Rg}$. Такой наклон рассчитан на скорость $v = \sqrt{Rg\operatorname{tg}\alpha} = 18\,м/с$.

6.30. С какой максимальной скоростью может двигаться мотоциклист по треку с углом наклона $\alpha = 30°$ и радиусом закругления $R = 90\,м$, если коэффициент трения $\mu = 0,4$? Велосипед перпендикулярен полотну дороги.

Ответ: $v_{max} = 33\,м/с$.

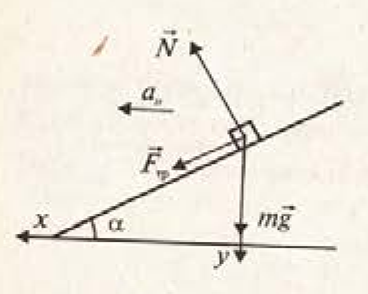


Рис. 6.16

Решение. Согласно второму закону Ньютона (рис. 6.16) $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}_n$;

(x): $N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha = \dfrac{mv^2}{R}$; (1)

(y): $-N\cos\alpha + mg + \mu N\sin\alpha = 0$. (2)

Из (2) $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$; $F_{тр} = \mu N$.

Подставим (2) в (1):

$$\frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{mv^2}{R},$$

откуда максимальная скорость равна $v_{max} = \sqrt{Rg\dfrac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha}} = 33\,м/с$.

6.31. На вертикальной оси вращается горизонтальный стержень, по которому свободно перемещаются два груза $m_1 = 0,1\,кг$ и $m_2 = 0,15\,кг$, связанные нитью длиной $l = 0,6\,м$ (рис. 6.17). Стержень вращается с частотой $n = 5\,c^{-1}$. Найдите натяжение нити.

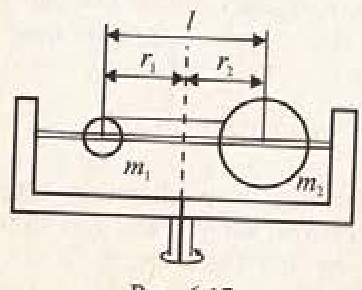


Рис. 6.17

Ответ: $F_н = 35,5\,Н$.

Решение. На оба груза действуют одинаковые силы натяжения нити, сообщая грузам центростремительные ускорения $a_{n_1} = \omega^2 r_1$ и $a_{n_2} = \omega^2 r_2$. Сила натяжения нити

$F_н = m_1\omega^2 r_1 = m_2\omega^2 r_2$. (1)

Учтем, что $r_1 + r_2 = l$ (2)

и $\omega = 2\pi n$.

Из (1) $r_2 = \dfrac{m_1 r_1}{m_2}$, подставим в (2) и получим $r_1 + \dfrac{m_1 r_1}{m_2} = l$, откуда

$r_1 = \dfrac{m_2 l}{m_1 + m_2}$; $r_2 = \dfrac{m_1 l}{m_1 + m_2}$. Сила натяжения нити $F_н = \dfrac{4\pi^2 n^2 m_1 m_2 l}{m_1 + m_2} = 35,5\,Н$.

6.32. Санки скользят по ледяной горке, имеющей форму дуги окружности (рис. 6.18а). В некоторой точке A, определяемой углом α, сила нормального давления $F_д$ санок на горку численно равна силе тяжести санок. Определите ускорение санок в точке A. Трением и размерами санок пренебречь.

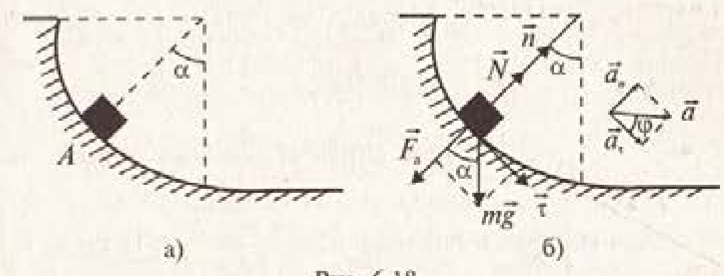


Рис. 6.18

Решение. По условию $F_д = mg$, по третьему закону Ньютона сила нормальной реакции поверхности по величине равна силе давления тела на эту поверхность, т. е. $|\vec{N}| = |\vec{F}_д| = mg$ (рис. 6.18б). Полное ускорение санок равно сумме тангенциального и нормального ускорений $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$.

Проекции на взаимоперпендикулярные направления $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$

$mg\sin\alpha = ma_\tau$; $N - mg\cos\alpha = ma_n$.

С учетом того, что $N = mg$,

$a_\tau = g\sin\alpha$; $a_n = g(1 - \cos\alpha)$.

Тогда модуль ускорения санок равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = g\sqrt{\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2} = g\sqrt{2(1-\cos\alpha)}.$$

Направление вектора $\vec{a}$ определяем с помощью угла φ, который вектор $\vec{a}$ составляет с направлением $\vec{\tau}$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

6.33. Груз вращается на подвесе из резинового шнура вокруг вертикальной оси. Начальная длина подвеса $l_0 = 1$ м, а при вращении подвес упруго растягивается до длины $l = 1,15$ м. Найдите угловую скорость вращения груза, если в неподвижном состоянии груз растягивает подвес до длины nl_0, где $n = 1,05$.

Ответ: $\omega = 5$ рад/с.

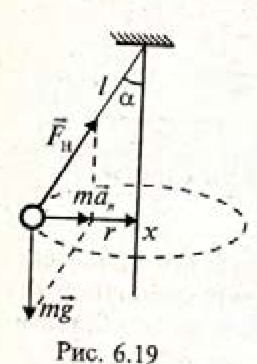


Рис. 6.19

Решение. Уравнение движения

$m\vec{g} + \vec{F}_н = m\vec{a}_n$; (рис. 6.19), $F_н$ — сила натяжения шнура.

(x): $F_н \sin\alpha = m\omega^2 r$, $r = l\sin\alpha$, $F_н = m\omega^2 l$.

Деформация шнура $\Delta l = l - l_0$, по закону Гука $F_н = k\Delta l = k(l - l_0)$, где k — коэффициент упругости шнура.

По условию $mg = k(nl_0 - l_0) = kl_0(n-1)$, откуда $k = \dfrac{mg}{l_0(n-1)}$.

Таким образом $\dfrac{mg(l - l_0)}{l_0(n-1)} = m\omega^2 l$, откуда угловая скорость вращения равна $\omega = \sqrt{\dfrac{g(l - l_0)}{ll_0(n-1)}} = 5$ рад/с.

6.34. На доске AB (рис. 6.20а), которая равномерно вращается вокруг вертикальной оси OO', к вертикальной стойке, расположенной от оси вращения на расстоянии $d = 5$ см, прикреплена нить с шариком. Какова частота вращения доски, если нить с шариком отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 40°$? Длина нити $l = 8$ см.

Ответ: $\nu = 1,4\ с^{-1}$.

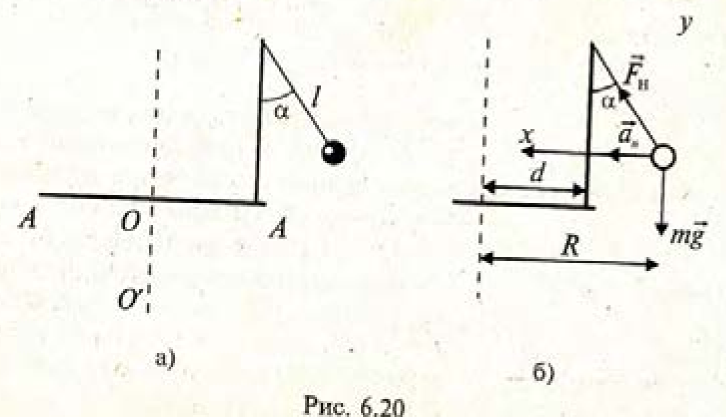


Рис. 6.20

Решение. Результирующая силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{F}_н$ обеспечивает центростремительное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 4\pi^2\nu^2 R.$$

По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_n$ (рис. 6.20, б).

(x): $F_н \sin\alpha = ma_n$; (y): $F_н\cos\alpha = mg$,

откуда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a_n}{g} = \dfrac{4\pi^2\nu^2 R}{g}$; откуда $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g\operatorname{tg}\alpha}{R}}$.

Учитывая, что $R = d + l\sin\alpha$, получим $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g\operatorname{tg}\alpha}{d + l\sin\alpha}}$.

$\nu = 1,4\ с^{-1}$.

6.35. Жесткий стержень длиной l закреплен под углом φ_0 на вертикальной оси и вращается вместе с ней с угловой скоростью ω. К нижнему концу стержня прикреплен шарик массой m. Найдите силу, с которой стержень действует на шарик (рис. 6.21).

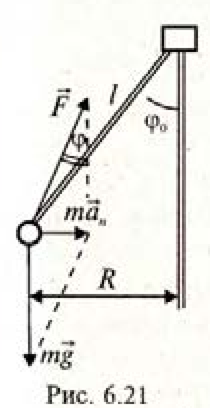


Рис. 6.21

Решение. В общем случае сила F, с которой стержень действует на шарик, направлена не вдоль стержня, а в некотором другом направлении, т. к. стержень жестко скреплен с осью под углом φ_0 и не меняет своего положения ни при вращении, ни при остановке. Равнодействующая силы тяжести и силы F равна центростремительной силе:

$F^2 - (mg)^2 = \left(m\omega^2 R\right)^2$, учтем, что $R = l\sin\varphi_0$,

тогда $F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2\varphi_0}$.

Направление этой силы найдем из

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega^2 l\sin\varphi_0}{g}.$$

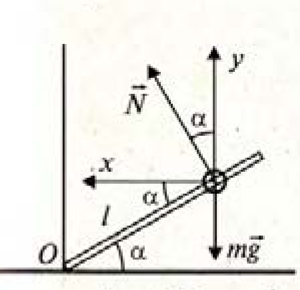


Рис. 6.22

6.36. Гладкий стержень наклонен под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (рис. 6.22) и может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через нижний конец стержня O. На стержень надета бусинка, которая упирается в ограничитель на расстоянии $l = 6,0$ см от точки O. С какой угловой скоростью надо вращать стержень, чтобы бусинка слетела с него?

Ответ: $\omega > 11$ рад/с.

Решение. При движении бусинки по гладкому стержню на неё действуют сила тяжести и сила реакции стержня, сумма которых обеспечивает центростремительную силу (рис. 6.22) $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$.

Проекции на оси: $N\sin\alpha = m\omega^2 l\cos\alpha$; $N\cos\alpha = mg$.

Бусинка слетит со стержня, если $N\cos\alpha > mg$,

тогда $\omega > \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{l\cos\alpha}}$, $\omega > 11$ рад/с.

6.37. По вертикально расположенному обручу радиусом R может без трения скользить колечко. Обруч вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Колечко находится в равновесии на высоте h от нижней точки обруча. (рис. 6.23). Найдите угловую скорость вращения обруча.

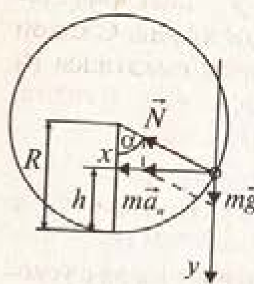


Рис. 6.23

Ответ: $\omega = \sqrt{g/(R-h)}$.

Решение. Уравнение движения колечка (рис. 6.23):

$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$;

(x): $N\sin\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha$;

(y): $N\cos\alpha = mg$.

Угловая скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{R-h}}.$$

6.38. Шарик массой 100 г, подвешенный на легкой нити, образующей угол $\alpha = 30^\circ$ с вертикалью, лежит на гладкой полусфере радиусом $R = 10$ см (рис. 6.24). Радиус, проведенный к точке касания шарика и полусферы, образует с нитью угол 90°. Шарику сообщили скорость $\upsilon = 0{,}50$ м/с перпендикулярно плоскости чертежа, и он стал скользить по полусфере, описывая окружность. Чему равна сила давления шарика на полусферу во время движения? При каком значении скорости она станет равной нулю?

Ответ: $F_д = 0{,}24$ Н, $\upsilon = 0{,}7$ м/с.

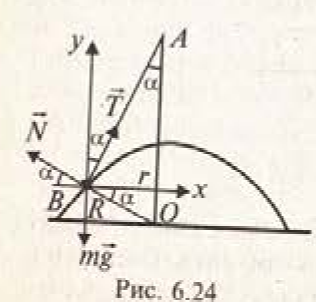


Рис. 6.24

Решение. Уравнение движения шарика (рис. 6.24) $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}_n$,

T — сила натяжения нити, N — сила реакции полусферы.

(x): $T\sin\alpha - N\cos\alpha = \frac{m\upsilon^2}{r} = \frac{m\upsilon^2}{R\cos\alpha}$; (1)

(y): $T\cos\alpha + N\sin\alpha = mg$. (2)

Из (2) $T = \frac{mg - N\sin\alpha}{\cos\alpha}$, подставим в (1)

$$\frac{mg - N\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha - N\cos\alpha = \frac{m\upsilon^2}{R\cos\alpha}, \text{ откуда}$$

$$N = \frac{m\left(Rg\sin\alpha - \upsilon^2\right)}{R} = 0{,}24\text{ Н}.$$

Учтем, что по третьему закону Ньютона $N = F_д = 0{,}24$ Н.

Сила давления шарика на полусферу равна нулю при $\upsilon = \sqrt{Rg\sin\alpha} = 0{,}7$ м/с.

6.39. Сосуд имеет форму расширяющегося вверх усеченного конуса с диаметром нижнего основания $d = 24$ см. Угол наклона стенок конуса к горизонтали равен 45°. На дне лежит шарик. С какой скоростью должен вращаться сосуд, чтобы шарик выкатился из него. Трение не учитывать.

Ответ: $\omega > \sqrt{\frac{2g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{d}}$; $\omega > 9$ рад/с.

Решение самостоятельное. См. задачу 6.36.

6.40. Внутри конической поверхности, движущейся вверх с ускорением a_0, вращается шарик по окружности радиусом R. Определите период движения шарика по окружности. Угол при вершине конуса 2α.

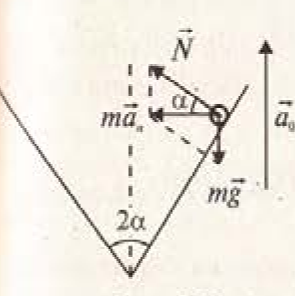


Рис. 6.25

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{R\,\mathrm{tg}\,\alpha/(a_0 + g)}$.

Решение. Уравнение движения

$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$,

$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_n$ — полное ускорение.

$N\cos\alpha = m\omega^2 R$;

$N\sin\alpha - mg = ma_0$;

откуда $\omega = \sqrt{\frac{(a_0 + g)}{R\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$.

Период обращения $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{R\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(a_0 + g)}}$.

6.41. На краю наклонной плоскости с углом наклона α лежит тело. Плоскость равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Расстояние от тела до оси вращения плос-

кости равно R. Найдите наименьший коэффициент трения μ, при котором тело удержится на вращающейся наклонной плоскости α.

Ответ: $\mu = \left(g\sin\alpha - \omega^2 R\cos\alpha\right)/\left(g\cos\alpha + \omega^2 R\sin\alpha\right)$.

Решение. Коэффициент трения минимален, если скорость вращения минимальна, при этом сила трения направлена вверх по наклонной плоскости (рис. 6.26). По второму закону Ньютона

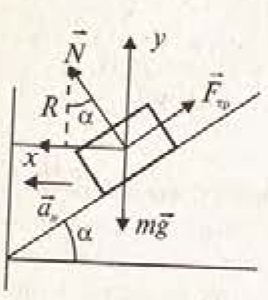


Рис. 6.26

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}_n;$$

(x): $N\sin\alpha - F_{тр}\cos\alpha = m\omega^2 R;$ (1)

(y): $N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha = mg.$ (2)

Учтем, что $F_{тр} = \mu N$, тогда

$\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \dfrac{\omega^2 R}{g}$, следовательно,

$$\mu = \frac{g\sin\alpha - \omega^2 R\cos\alpha}{g\cos\alpha + \omega^2 R\sin\alpha} = \frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha - \omega^2 R}{g + \omega^2 R\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Коэффициент трения μ будет больше нуля при условии $g\,\mathrm{tg}\,\alpha - \omega^2 R > 0$, т. е. $\omega < \sqrt{g\,\mathrm{tg}\,\alpha/R}$.

6.42. На внутренней стороне полого шара радиусом R (рис. 6.27), вращающегося вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω, находится маленькая шайба A. Считая угол α известным, найти минимальный коэффициент трения, при котором шайба не сорвется вниз.

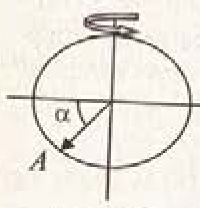


Рис. 6.27

Ответ:
$\mu = \cos\alpha\left(g - \omega^2 R\sin\alpha\right)/\left(g\sin\alpha + \omega^2 R\cos^2\alpha\right)$.

Решение самостоятельное. См. задачу 6.41.

7. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

7.1. Определите ускорение свободного падения тел на высоте $h = R_З$ от поверхности Земли, если на Земле ускорение свободного падения $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$.

Ответ: $g_h = 2{,}45\,\text{м/с}^2$.

Решение. Сила гравитационного притяжения тела массой m к Земле равна силе тяжести тела на расстоянии $r = (R_З + h)$ от центра Земли. $mg_h = G\dfrac{mM_З}{(R_З + h)^2}$, где g_h — ускорение свободного падения тела на высоте h от поверхности Земли, $M_З$, $R_З$ — масса и радиус Земли, соответственно.

По условию $h = R_З$, тогда $mg_h = G\dfrac{mM_З}{4R_З^2}$, учитывая, что для тела на Земле $g = G\dfrac{M_З}{R_З^2}$, получим $g_h = G\dfrac{M_З}{4R_З^2} = \dfrac{g}{4} = 2{,}45\,\text{м/с}^2$.

7.2. Зная среднее значение ускорения свободного падения, определите массу Земли.

Ответ: $M_З = 6\cdot 10^{24}$ кг.

Решение. Из закона всемирного тяготения следует: $mg = G\dfrac{mM_З}{R_З^2}$, откуда $M_З = \dfrac{gR_З^2}{G} = 6\cdot 10^{24}$ кг.

7.3. Ускорение свободного падения у поверхности Луны в 6 раз меньше ускорения свободного падения у поверхности Земли. Во сколько раз выше и дальше может прыгнуть человек на Луне, чем на Земле?

Решение. Так как ускорение свободного падения на Луне меньше, чем на Земле в 6 раз, то и сила тяжести на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле. С учетом того, что усилие человека на Земле и Луне одинаково, человек на Луне может прыгнуть в 6 раз выше и дальше, чем на Земле.

7.4. На какой высоте от поверхности Земли сила тяжести уменьшится в $n = 25$ раз?

Ответ: $h = 25{,}5\cdot 10^6$ м.

Решение. На поверхности Земли $mg = G\dfrac{mM_З}{R_З^2}$. На высоте h $\dfrac{mg}{n} = G\dfrac{mM_З}{(R_З + h)^2}$. Разделим первое выражение на второе: $n = \dfrac{(R_З + h)^2}{R_З^2} = 25$, откуда $\dfrac{R_З + h}{R_З} = \sqrt{25} = 5$, $h = 4R_З = 25{,}5\cdot 10^6$ м.

7.5. Радиус Луны $R_Л$ примерно в 3,7 раза меньше радиуса Земли $R_З$, а масса Луны $M_Л$ в 81 раз меньше массы Земли $M_З$. Найдите ускорение свободного падения $g_Л$ у поверхности Луны.

Ответ: $g_Л = 1{,}65\,\text{м/с}^2$.

Решение. Для Земли $mg_З = G\frac{mM_З}{R_З^2}$. (1)

Для Луны $mg_Л = G\frac{mM_Л}{R_Л^2}$. (2)

Разделим (2) на (1) $\frac{g_Л}{g_З} = \frac{M_Л R_З^2}{R_Л^2 M_З}$. (3)

Учтем, что $M_З = 81M_Л$ и $R_З = 3,7R_Л$, тогда из (3)

$g_Л = g_З \frac{M_Л(3,7R_Л)^2}{R_Л^2(81M_Л)} = 1,65$ м/с^2.

7.6. С какой силой будет притягиваться к Луне гиря массой $m = 1,0$ кг? Масса Луны $M_Л = 7,3\cdot10^{22}$ кг.

Ответ: $F = 1,7$ Н.

Решение самостоятельное. См. задачу 7.5.

7.7. Среднее расстояние между центрами Земли и Луны равно 60 земным радиусам $r = 60R_З$, и масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. В какой точке отрезка, соединяющего центры Земли и Луны, тело будет притягиваться ими с одинаковой силой?

Ответ: $54R_З$ от центра Земли и $6R_З$ от центра Луны.

Решение. Сила, с которой тело массой m притягивается Землей, $F_1 = G\frac{mM_З}{r_1^2}$, r_1 — расстояние от тела до центра Земли. Сила, с которой тело притягивается Луной, $F_2 = G\frac{mM_Л}{(r-r_1)^2}$. По условию

$F_1 = F_2$, т. е. $G\frac{mM_З}{r_1^2} = G\frac{mM_Л}{(r-r_1)^2}$; $\frac{M_З}{M_Л} = \frac{r_1^2}{(r-r_1)^2} = 81$; $\frac{r_1}{r-r_1} = 9$;

$10r_1 = 9r = 540R_З$; $r_1 = 54R_З$ — расстояние от тела до центра Земли и $60R_З - 54R_З = 6R_З$ до центра Луны. В этой точке тело одинаково притягивается Землей и Луной.

7.8. Сверхгигантский Антарес (α Скорпиона) имеет массу в 50 раз больше массы Солнца, а диаметр этой звезды больше диаметра Солнца в 328 раз. Белый карлик «40 Эридана А» имеет массу, составляющую 0,31 массы Солнца, и диаметр, равный 0,016 диаметра Солнца. Найдите ускорение свободного падения на этих звездах.

Ответ: $g_А = 0,13$ м/с^2; $g_К = 330$ км/с^2.

Решение. Исходя из закона всемирного тяготения, ускорение свободного падения $g_А = G\frac{M_А}{(0,5d_А)^2} = G\frac{50M_С}{(0,5\cdot328d_С)^2}$. Масса Солнца $M_С = 1,99\cdot10^{30}$ кг, радиус Солнца $R_С = \frac{d_С}{2} = 6,96\cdot10^8$ м, тогда $g_А = 0,13$ м/с^2. Ускорение свободного падения на белом карлике $g_К = G\frac{0,31M_С}{(0,5\cdot0,016d_С)^2}$; $g_К = 330$ км/с^2.

7.9. Средняя плотность Венеры 5200 кг/м^3, а радиус планеты 6100 км. Найдите ускорение свободного падения на поверхности Венеры.

Ответ: $g_В = 8,86$ м/с^2.

Решение. Масса Венеры $M_В = \rho_В V = \rho_В\frac{4}{3}\pi R_В^3$. Ускорение свободного падения на поверхности Венеры $g_В = G\frac{M_В}{R_В^2} = G\frac{\rho_В 4\pi R_В^3}{3R_В^2} = \frac{4}{3}G\rho_В\pi R_В$; $g_В = 8,86$ м/с^2.

7.10. Спутник движется вокруг Земли на расстоянии h от ее поверхности. Радиус Земли $R_З$. Считая орбиту спутника круговой, выразите скорость движения и период обращения спутника через h, $R_З$ и ускорение силы тяжести g на поверхности Земли.

Ответ: $\upsilon = R_З\sqrt{\frac{g}{R_З+h}}$; $T = 2\pi\frac{R_З+h}{R}\sqrt{\frac{R_З+h}{g}}$.

Решение. Сила гравитационного притяжения играет роль центростремительной силы $G\frac{mM_З}{(R_З+h)^2} = \frac{m\upsilon^2}{R_З+h}$. С учетом, что $g = G\frac{M_З}{R_З^2}$, получим $\upsilon = R_З\sqrt{\frac{g}{R_З+h}}$.

Период обращения спутника $T = \frac{2\pi(R_З+h)}{\upsilon} = 2\pi\frac{R_З+h}{R_З}\sqrt{\frac{R_З+h}{g}}$.

7.11. Считая орбиту Земли круговой, определите линейную скорость движения Земли вокруг Солнца.

Ответ: $\upsilon = 29,8$ км/с.

Решение. $G\frac{M_З M_С}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, откуда $v = \sqrt{\frac{GM_С}{r}} = 29,8$ км/с,

где $r = 1,49\cdot10^{11}$ м — расстояние от Земли до Солнца;

$M_С = 1,98\cdot10^{30}$ кг — масса Солнца.

7.12. Определите массу Солнца, зная, что средняя линейная скорость Земли на орбите $v = 30$ км/с, а радиус орбиты Земли $r = 1,5\cdot10^8$ км.

Ответ: $M_С = rv^2/G = 2\cdot10^{30}$ кг.

Решение самостоятельное.

7.13. Покажите, что квадраты периодов вращения различных планет вокруг Солнца относятся, как кубы радиусов орбит вращения.

Решение. Для первой и второй планет

$$m_1\omega_1^2 r_1 = G\frac{m_1 M_С}{r_1^2};\quad m_1\frac{4\pi^2}{T_1^2}r_1 = G\frac{m_1 M_С}{r_1^2}; \qquad (1)$$

$$m_2\omega_2^2 r_2 = G\frac{m_2 M_С}{r_2^2};\quad m_2\frac{4\pi^2}{T_2^2}r_2 = G\frac{m_2 M_С}{r_2^2}. \qquad (2)$$

Разделив (2) на (1), получим $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$.

7.14. Радиус орбиты Нептуна в $n = 30$ раз больше радиуса орбиты Земли. Какова продолжительность года на Нептуне?

Ответ: $T_{Непт} = 164$ земных года.

Решение самостоятельное. См. задачу 7.13.

7.15. С какой горизонтальной скоростью надо бросить тело, чтобы оно стало искусственным спутником Земли?

Ответ: $v = 7,9$ км/с.

Решение. Если тело — искусственный спутник Земли, то сила притяжения между ними, равная силе тяжести, играет роль центростремительной силы $mg = \frac{mv^2}{R_З}$, откуда $v = \sqrt{gR_З} = 7,9$ км/с.

7.16. Найдите радиус $r_с$ круговой орбиты искусственного спутника Земли, имеющего период обращения $T = 1$ сут.

Ответ: $r_с = 42260$ км.

Решение. Сила гравитационного притяжения спутника и Земли играет роль центростремительной силы $\frac{mv^2}{r_с} = G\frac{M_З m}{r_с^2}$. (1)

Учтем, что период обращения спутника $T = \frac{2\pi r_с}{v}$, тогда $v = \frac{2\pi r_с}{T}$.

Подставим в (1) и получим $r_с = \sqrt[3]{\frac{GM_З T^2}{4\pi^2}}$. (2)

Используя выражения для ускорения свободного падения на Земле $g = G\frac{M_З}{R_З^2}$, преобразуем (2) $r_с = \sqrt[3]{\frac{GM_З R_З^2 T^2}{R_З^2 4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{gR_З^2 T^2}{4\pi^2}}$; $r_с = 42260$ км.

7.17. Рассчитайте радиус орбиты $r_с$ геостационарного спутника Земли (спутник находится над одной и той же точкой Земли).

Ответ: $r_с = 4,22\cdot10^7$ м.

Решение. Для выполнения условия задачи спутник должен быть запущен в плоскости экватора. Если спутник находится над одной и той же точкой экватора, то это означает, что угловые скорости спутника и вращения Земли вокруг своей оси одинаковые: $\omega_с = \omega_З$. Если $T_З = 24$ ч — период вращения Земли вокруг своей оси, то

$$\frac{v}{r_с} = \frac{2\pi}{T_З}. \qquad (1)$$

Определим линейную скорость спутника из соотношения

$G\frac{mM_З}{r_с^2} = \frac{mv^2}{r_с}$, откуда $v = \sqrt{G\frac{M_З}{r_с}}$. Учитывая, что $g = G\frac{M_З}{R_З^2}$, получим $v = \sqrt{\frac{gR_З^2}{r_с}}$.

Из (1) $\frac{1}{r_с}\sqrt{\frac{gR_З^2}{r_с}} = \frac{2\pi}{T_З}$, откуда $r_с = \sqrt[3]{\frac{gR_З^2 T_З^2}{4\pi^2}} = 4,22\cdot10^7$ м.

7.18. Когда искусственный спутник двигался вокруг планеты A, период его обращения был равен T. Как изменится этот период, если спутник будет двигаться вокруг планеты B, имеющей такую же плотность ρ, как планета A, но вдвое больший радиус? (в обоих случаях спутник движется по круговой орбите вблизи поверхности планеты).

Ответ: Не изменится.

Решение. Согласно второму закону Ньютона $G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$, где m — масса спутника; $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ — масса планеты.

Тогда $G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{m}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$; $v = 2R\sqrt{\pi\rho G/3}$. (1)

Период обращения спутника $T = 2\pi R/v$, с учетом (1) получаем $T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$, т. е. период зависит только от плотности планеты, следовательно, период обращения вокруг планеты B будет такой же, как и вокруг планеты A.

7.19. Период обращения искусственного спутника Земли составляет $T = 2$ ч. На какой высоте над поверхностью Земли находится спутник, если он движется по круговой орбите?

Ответ: $h = 1{,}68 \cdot 10^6$ м.

Решение. $G\frac{mM_З}{(R_З + h)^2} = m\omega^2 (R_З + h)$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — угловая скорость вращения спутника вокруг Земли.

Тогда $G\frac{M_З}{(R_З + h)^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}(R_З + h)$, откуда

$h = \sqrt[3]{\frac{GM_З T^2}{4\pi^2}} - R_З = 1{,}68 \cdot 10^6$ м.

7.20. Определите среднюю плотность Земли, считая известными гравитационную постоянную $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2), радиус Земли $R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м и ускорение свободного падения $g = 9{,}80$ м/с^2.

Ответ: $\rho_З = 5{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. $\rho_З = \frac{M_З}{V}$; $mg = G\frac{mM_З}{R_З^2}$; $M_З = \frac{gR_З^2}{G}$.

Объем Земли $V = \frac{4}{3}\pi R_З^3$, тогда средняя плотность Земли равна

$\rho_З = \frac{3gR_З^2}{4G\pi R_З^3} = \frac{3g}{4\pi G R_З} = 5{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

7.21. Известно, что искусственный спутник Земли можно запустить так, чтобы он был неподвижен относительно какого-то пункта на Земле. (см. задачу 7.17). Можно ли запустить спутник так, чтобы он казался неподвижным относительно звезд?

Решение. Движение спутника рассматривается в инерциальной системе отсчета, связанной со звездами. Если спутник относительно звезд неподвижен, то это означает, что в инерциальной системе отсчета его скорость равна нулю, т. е. он не может вращаться относительно какой-либо точки пространства, в том числе и вокруг Земли. Это означает, что это тело не может быть спутником Земли.

7.22. Угол, под которым видно Солнце с Земли (угловой диаметр) равен приблизительно $\alpha = 10^{-2}$ рад. Радиус Земли считать равным 6400 км. Определите отношение средних плотностей Земли и Солнца, принимая во внимание, что 1 год $\approx 3 \cdot 10^7$ с.

Ответ: $\rho_З/\rho_С \approx 4{,}4$.

Рис. 7.1

Решение. Сила гравитационного взаимодействия Земли и Солнца играет роль центростремительной силы $G\frac{M_З M_С}{r^2} = M_З \omega^2 r$, где r — расстояние от Земли до Солнца (радиус орбиты), $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — угловая скорость движения Земли вокруг Солнца, T — период обращения Земли вокруг Солнца.

Учитывая, что $G\frac{M_З}{R_З^2} = g$, получим $M_С g \frac{R_З^2}{r^2} = M_З \frac{4\pi^2}{T^2} r$; откуда $\frac{M_З}{M_С} = \frac{gR_З^2 T^2}{4\pi^2 r^3}$. Так как $M_З = \rho_З \frac{4}{3}\pi R_З^3$ и $M_С = \rho_С \frac{4}{3}\pi R_С^3$, где $\rho_З$ и $\rho_С$ — плотности Земли и Солнца соответственно, имеем $\frac{\rho_З}{\rho_С} = \frac{gT^2 R_С^3}{4\pi^2 r^3 R_З}$.

По условию $\frac{R_С}{r} = \frac{\alpha}{2}$ (рис. 7.1), тогда $\frac{\rho_З}{\rho_С} = \frac{g\alpha^3 T^2}{32\pi^2 R_З} \approx 4{,}4$.

7.23. Спутник движется вокруг некоторой планеты по круговой орбите радиусом $r_с = 4{,}7 \cdot 10^9$ м со скоростью $v = 10^4$ м/с. Какова средняя плотность планеты, если ее радиус $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ м?

Ответ: $\rho = 500$ кг/м^3.

Решение. $G\frac{mM}{r_с^2} = \frac{mv^2}{r_с}$, откуда массы планеты $M = \frac{r_с v^2}{G}$, ее объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Плотность планеты $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3r_с v^2}{4\pi G R^3} = 500$ кг/м^3.

7.24. Определите плотность шарообразной планеты, если вес тела на полюсе в $n = 2$ раза больше, чем на экваторе. Период вращения планеты вокруг своей оси $T = 2$ ч 40 мин.

Ответ: $\rho = 3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Вес тела P численно равен силе давления на Землю $F_д$; учитывая, что по третьему закону Ньютона $|\vec{F}_д| = |\vec{N}|$, где $\vec{N}$ — сила реакции опоры, получим, что $P = N$. На полюсе $mg - N_п = 0$, т. е. $P_п = N_п = mg$. На экваторе $mg - N_э = \frac{mv^2}{R}$ (R — радиус планеты); по условию $P_э = N_э = \frac{P_п}{n} = \frac{mg}{n}$, с учетом, что $v = \frac{2\pi R}{T}$, получим

$$mg - \frac{mg}{n} = \frac{4\pi^2 R^2}{RT^2}; \quad g(n-1) = \frac{4\pi^2 nR}{T^2}.$$

Ускорение свободного падения на планете $g = G\frac{M}{R^2}$, где $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ — масса планеты, тогда $G\frac{4\pi R^3\rho}{3R^2}(n-1) = \frac{4\pi^2 nR}{T}$, следовательно, плотность планеты равна $\rho = \frac{3n\pi}{(n-1)GT^2} = 3\cdot 10^3$ кг/м³.

7.25. Сравните силы притяжения, действующие на Луну со стороны Солнца и Земли. Масса Земли $M_З = 5,88\cdot 10^{24}$ кг, масса Солнца $M_С = 1,98\cdot 10^{30}$ кг, расстояние от Земли до Луны $r_{ЗЛ} = 3,8\cdot 10^5$ км, расстояние между Солнцем и Луной $r_{СЛ} = 1,5\cdot 10^8$ км.

Ответ: $F_{ЛС}/F_{ЛЗ} = 2$.

Решение. Используем закон всемирного тяготения:

$$F_{ЛС} = G\frac{M_Л M_С}{r_{СЛ}^2}, \quad F_{ЛЗ} = G\frac{M_Л M_З}{r_{ЗЛ}^2}; \text{ следовательно, } \frac{F_{ЛС}}{F_{ЛЗ}} = \frac{M_С}{M_З}\left(\frac{r_{ЗЛ}}{r_{СЛ}}\right)^2 = 2,$$

т. е. Солнце притягивает Луну в два раза сильнее, чем Земля.

7.26. Притяжение Луны Солнцем примерно в два раза больше, чем притяжение ее Землей. Почему же Луна является спутником Земли, а не самостоятельной планетой?

Решение. Ускорения, сообщаемые Земле и Луне Солнцем, примерно одинаковые. Поэтому Земля и Луна образуют единую систему двух небесных тел, вращающихся вокруг общего центра масс, а центр масс системы Земля—Луна обращается вокруг Солнца.

7.27. Найдите угловую и линейную скорости орбитального движения искусственного спутника Земли, если период его вращения вокруг Земли $T = 4$ ч.

Ответ: $\omega = 5\cdot 10^{-4}$ рад/с, $v = 5,8$ км/с.

Решение. Угловая скорость орбитального движения спутника ω равна сумме скоростей: скорости спутника относительно поверхности Земли $\omega_С$ и скорости вращения Земли вокруг своей оси $\omega_З$: $\omega = \omega_С + \omega_З$. Учтем, что $\omega_С = \frac{2\pi}{T}$; $\omega_З = \frac{2\pi}{T_З}$, $T_З = 24$ ч — время обращения Земли вокруг своей оси.

Тогда $\omega = 2\pi\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_З}\right) = 5\cdot 10^{-4}$ рад/с.

Линейная скорость спутника $v = \omega r_с$, где $r_с$ — радиус орбиты спутника, который можно найти исходя из соображений, что сила гравитационного притяжения играет роль центростремительной силы $G\frac{mM_З}{r_с^2} = \frac{mv^2}{r_с}$; $r_с = \frac{GM_З}{v^2} = \frac{gR_З^2}{v^2}$, ($g = G\frac{M_З}{R_З^2}$ — ускорение свободного падения на Земле). $v = \omega\frac{gR_З^2}{v^2}$; откуда $v = \sqrt[3]{gR_З^2\omega} =$

$$= \sqrt[3]{2\pi g R_З^2\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_З}\right)} = 5,8 \text{ км/с}.$$

7.28. Какова траектория движения спутника?

Решение. Если спутник вокруг Земли движется по круговой траектории, а Земля вращается вокруг Солнца, то относительно Солнца спутник будет двигаться по спирали, закручивающейся вокруг Земли.

7.29. Представим, что к центру Земли, прорыли шахту. Определите, как будет изменяться сила тяжести в зависимости от расстояния r до центра Земли, если тело массой m передвигать вдоль шахты.

Ответ: $g = mg_З r/R_З$.

Решение. Тело, находящееся в глубине Земли не испытывает со стороны вышележащего слоя никакого влияния, а взаимодействует только с внутренним шаром радиусом r и массой $M_1 = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$, где ρ — плотность Земли. По закону всемирного тяготения

$$mg = G\frac{mM_1}{r^2}; \quad mg = G\frac{4\pi r^3\rho m}{3r^2}; \qquad (1)$$

на поверхности Земли $mg_З = G\frac{4\pi R_З^3\rho m}{3R_З^2}$, (2)

тогда из (1) и (2) ускорение силы тяжести на расстоянии r от

центра Земли $g = g_З \dfrac{r}{R_З}$, а сила тяжести меняется в зависимости от расстояния до центра Земли линейно $F = mg = \dfrac{mg_З r}{R_З}$.

7.30. Две звезды с массами m_1 и m_2 равномерно вращаются по концентрическим окружностям вокруг центра, причем расстояние между ними всегда постоянно и равно l (рис. 7.2). Найдите радиусы орбит и периоды обращения звезд.

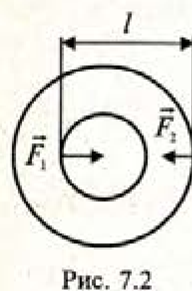


Рис. 7.2

Решение. При равномерном движении по окружности сила взаимного притяжения звезд является центростремительной силой. По третьему закону Ньютона $F_1 = F_2$; $m_1\omega_1^2 r_1 = m_2\omega_2^2 r_2$; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; $\dfrac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2} = \dfrac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2}$. Расстояние l между звездами постоянно, т. е. их периоды обращения одинаковы: $T_1 = T_2$ и $m_1 r_1 = m_2 r_2$; $r_1 + r_2 = l$, отсюда $r_1 = \dfrac{m_2 l}{m_1 + m_2}$; $r_2 = \dfrac{m_1 l}{m_1 + m_2}$. Если $m_1 >> m_2$, то $r_2 >> r_1$, т. е. малая звезда вращается вокруг большой. Учитывая, что $F_1 = F_2 = G\dfrac{m_1 m_2}{l^2}$ и $G\dfrac{m_1 m_2}{l^2} = \dfrac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2}$ получим $T_1 = T_2 = 2\pi l\sqrt{\dfrac{l}{G(m_1 + m_2)}}$.

7.31. Может ли спутник устойчиво обращаться в плоскости, не проходящей через центр Земли?

Решение. Для устойчивого движения тела в плоскости необходимо, чтобы все силы, действующие на тело, лежали в этой же плоскости. Движение спутника в плоскости, не проходящей через центр Земли, не будет устойчивым.

7.32. Два спутника с одинаковыми массами m, соединенные невесомым канатом длиной l, движутся по круговым орбитам вокруг Земли и при этом в любой момент находятся на прямой, проходящей через центр Земли. Расстояние между серединой каната и центром Земли равно r. Найдите силу натяжения каната $F_н$.

Решение. На каждый спутник действуют силы притяжения Земли и силы натяжения каната $\vec{F}_{н_1}$ и $\vec{F}_{н_2}$, причем $F_{н_1} = F_{н_2} = F_н$ (рис. 7.3). Сила гравитационного взаимодействия спутников мала, поэтому

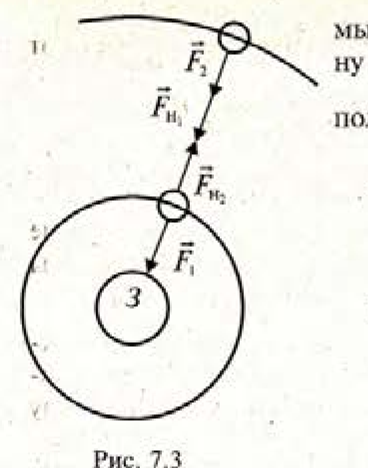


Рис. 7.3

мы ею пренебрегаем. Согласно второму закону Ньютона для первого и второго спутников получим $G\dfrac{mM_З}{(r - l/2)^2} - F_н = m\omega^2(r - l/2)$;

$$G\frac{mM_З}{(r + l/2)^2} + F_н = m\omega^2(r + l/2);$$

откуда находим $\omega^2 = \dfrac{GM_З\left[r^2 + (l/2)^2\right]}{r\left[r^2 - (l/2)^2\right]^2}$;

$$F_н = G\frac{mM_З l\left[3r^2 + (l/2)^2\right]}{2r\left[r^2 - (l/2)^2\right]^2}.$$

Из последнего выражения видно, что канат будет натянут. Предполагая, что $l << r$, получим $F_н = \dfrac{3}{2}G\dfrac{mM_З}{r^2}\left(\dfrac{l}{r}\right)$.

7.33. В воде имеется пузырек воздуха и железный шарик, имеющие одинаковый объем $V = 1\,см^3$. Какова сила взаимодействия между ними, если расстояние между центрами шариков равно $r = 10\,см$?

Ответ: $F = -45{,}4\cdot10^{-15}$ Н.

Решение. Применим формальный метод, который позволяет рассматривать пузырек воздуха как шарик с «отрицательной» массой $m_в$, с плотностью, равной плотности воды $\rho_в$, а шарик из железа — как тело с положительной массой $m_ж$, с плотностью, равной разности плотностей железа $\rho_ж$ и воды $\rho_в$. Тогда $m_в = -\rho_в V$; $m_ж = (\rho_ж - \rho_в)V$; $F = G\dfrac{m_в m_ж}{r^2} = -G\dfrac{\rho_в(\rho_ж - \rho_в)V^2}{r^2} = -45{,}4\cdot10^{-15}$ Н.

Знак минус означает, что F — сила отталкивания.

7.34. В воде имеются два пузырька воздуха радиусом $R = 0{,}1\,см$. Притягиваются или отталкиваются пузырьки? Какова сила взаимодействия? Расстояние между пузырьками равно $r = 3\,см$.

Ответ: $F = 1{,}3\cdot10^{-18}$ Н.

Решение самостоятельное. См. задачу 7.33.

7.35. В безграничной среде плотностью $\rho_0 = 1{,}0\cdot10^3\,кг/м^3$ находятся на расстоянии $r = 20\,см$ от центров друг друга два шара объемами $V_1 = 30\,см^3$ и $V_2 = 40\,см^3$, плотностью $\rho = 2{,}0\cdot10^3\,кг/м^3$. Определите силу взаимодействия между шарами.

Ответ: $F = 2\cdot10^{-12}$ Н.

Решение самостоятельное.

7.36. В свинцовом шаре радиусом R сделана сферическая полость, поверхность которой касается поверхности шара и проходит через его центр. Масса шара M. С какой силой свинцовый шар будет притягивать шар массой m, находящийся на расстоянии $d > R$ от центра свинцового шара на прямой, соединяющей центры шара и полости, со стороны полости?

Ответ: $F = GMm\left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8(d - R/2)^2}\right]$.

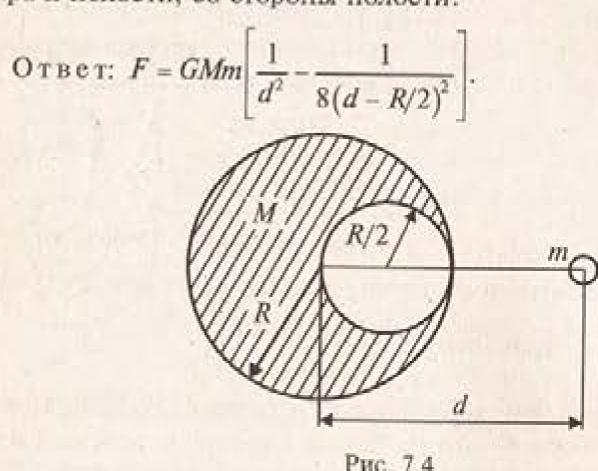


Рис. 7.4

Решение. Если бы большой шар был сплошным, сила притяжения между шарами была бы $F_0 = G\frac{mM}{d^2}$. В данном случае сила притяжения будет меньше на величину F_1 — силу, с которой действовал бы свинцовый шар того же объема, что и полость. (Формально полость можно заменить телом с «отрицательной» массой $M_n = -\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3\rho = -\frac{M}{8}$.)

$F_1 = G\frac{Mm}{8(d - R/2)^2}$. Тогда сила притяжения шаров равна

$$F = F_0 - F_1 = G\frac{Mm}{d^2} - G\frac{Mm}{8(d - R/2)^2} = GMm\left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8(d - R/2)^2}\right].$$

7.37. Найдите зависимость веса тела от географической широты.

Ответ: $P = m(g_0 - \omega^2 R_3 \cos^2\varphi)$.

Решение. На тело у поверхности Земли действуют две силы: сила тяготения $\vec{F}_т$, направленная к центру Земли, и сила реакции опоры $\vec{N}$, численно равная весу тела P.

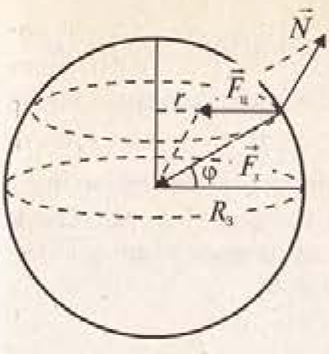


Рис. 7.5

Равнодействующая этих сил $\vec{F}_ц = \vec{N} + \vec{F}_т$ придает телу центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 r$, где $r = R_3\cos\varphi$ (φ — географическая широта), $F_ц = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi$ (m — масса тела). По теореме косинусов из треугольника сил получаем

$$N = P = \sqrt{F_ц^2 + F_т^2 - 2F_ц F_т\cos\varphi} =$$

$$= m\sqrt{\omega^4 R_3^2\cos^2\varphi + G^2\frac{M_3^2}{R_3^4} - 2\omega^2 R_3 G\frac{M_3}{R_3^2}\cos^2\varphi}.$$ Учитывая, что $G\frac{M_3}{R_3^2} = g$ и $F_ц \ll F_т$, получим: $P = mg\left(1 - \frac{2\omega^2 R_3}{g}\cos^2\varphi\right)^{1/2}$.

Второе слагаемое в скобке <<1, тогда после разложения в ряд имеем: $P = m(g - \omega^2 R_3\cos^2\varphi)$.

8. ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

8.1. Футболист, ударяя мяч массой $m = 700$ г, сообщает ему скорость $v = 15$ м/с. Считая длительность удара равной $t = 0,020$ с, определите среднюю силу удара.

Ответ: $F = 525$ Н.

Решение. Система не замкнута. Импульс силы равен изменению импульса тела $F\Delta t = m(v - v_0)$. Учтем, что $v_0 = 0$, тогда $F = \frac{mv}{\Delta t} = 525$ Н.

8.2. Пожарный направляет струю воды из брандспойта на огонь. Скорость истечения воды $v = 16$ м/с. Площадь отверстия брандспойта $s = 5,0\text{ см}^2$. Найдите силу, с которой пожарный удерживает брандспойт.

Ответ: $F = 0,13$ кН.

Решение. $F\Delta t = m(v - v_0)$; $v_0 = 0$. Масса воды $m = \rho V = \rho ls$, где ρ — плотность воды, l — длина струи, s — площадь поперечного

сечения струи. Тогда $F = \frac{\rho l s v}{\Delta t} = \rho s v^2$, с учетом того, что скорость истечения воды $v = \frac{l}{\Delta t}$, $F = 0{,}13$ кН.

8.3. Движение материальной точки описывается уравнением $x = 5 - 8t + 4t^2$. Найдите импульс через 2 с и через 4 с после начала отсчета времени, а также силу, которая привела к такому изменению импульса, если масса точки равна 2 кг.

Ответ: $p_1 = 16$ кг · м/с; $p_2 = 48$ кг · м/с, $F = 16$ Н.

Решение. Уравнение движения в общем виде $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Сравнение этого выражения с условием задачи $x = 5 - 8t + 4t^2$ позволяет получить $v_0 = -8$ м/с; $a = 8$ м/с^2. Тогда скорость точки $v = v_0 + at$; $v = -8 + 8t$. Импульс материальной точки $\vec{p} = m\vec{v}$, $p = mv$;

$p_1 = mv_1 = 16$ кг · м/с; $(t_1 = 2$ с$)$;

$p_2 = mv_2 = 48$ кг · м/с; $(t_2 = 4$ с$)$.

Импульс силы равен изменению импульса тела

$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$; $F\Delta t = \Delta p$, откуда $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = 16$ Н.

8.4. Две тележки массами m_1 и $m_2 = 3m_1$ соединены между собой сжатой, связанной нитью пружиной. Нить пережигают, пружина распрямляется, и тележки разъезжаются в разные стороны. Считая коэффициент трения для обоих тележек одинаковым, определите

1) v_1/v_2 — отношение скоростей движения тележек;

2) t_1/t_2 — отношение времени, в течение которого тележки движутся;

3) S_1/S_2 — отношение путей, пройденных тележками.

Ответ: $v_1/v_2 = 3$; $t_1/t_2 = 3$; $S_1/S_2 = 9$.

Решение. 1) По закону сохранения импульса

$m_1v_1 = m_2v_2$; $v_1/v_2 = m_2/m_1 = 3$.

2) Согласно второму закону Ньютона

$F_{тр_1} = m_1a_1 = m_1\frac{v_1}{t_1}$; $F_{тр_1} = \mu m_1 g$;

$F_{тр_2} = m_2a_2 = m_2\frac{v_2}{t_2}$; $F_{тр_2} = \mu m_2 g$; откуда

$\frac{t_1}{t_2} = \frac{m_1v_1}{F_{тр_1}}\frac{F_{тр_2}}{m_2v_2} = \frac{m_1v_1m_2}{m_2v_2m_1} = \frac{v_1}{v_2} = 3$.

3) $S_1 = v_{1ср}t_1 = \frac{v_1t_1}{2}$, $S_2 = v_{2ср}t_2 = \frac{v_2t_2}{2}$; где $v_{ср} = \frac{v}{2}$ — среднее значение соответствующей скорости на пути S.

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_1t_1}{v_2t_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = 9$.

8.5. Мяч массой $m = 150$ г ударяется о гладкую стенку под углом $\alpha = 30°$ к ней и отскакивает без потери скорости. Найдите среднюю силу F, действующую на мяч со стороны стенки, если скорость мяча $v = 10$ м/с, а продолжительность удара $t = 0{,}1$ с.

Ответ: $F = 15$ Н.

Рис. 8.1

Решение. $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$. Изменение импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = m(\vec{v} - \vec{v}_0)$, проекция на ось x (рис. 8.1) равна

$\Delta p = m(v\sin\alpha + v_0\sin\alpha) = 2mv\sin\alpha$ (учтено, что удар абсолютно упругий, $v = v_0$). Тогда $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv\sin\alpha}{\Delta t} = 15$ Н.

8.6. Падающий вертикально шарик массой $m = 200$ г ударился об пол со скоростью $v = 5$ м/с и подпрыгнул на высоту $h = 46$ см. Найдите изменение импульса шарика при ударе.

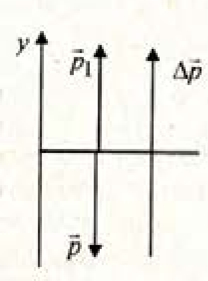


Рис. 8.2

Ответ: $\Delta p = 1{,}6$ кг · м/с.

Решение. Изменение импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}$. Проецируя на ось y (рис. 8.2), получим

$\Delta p = p_1 + p = m(v_1 + v)$, $v_1 = \sqrt{2gh}$,

тогда $\Delta p = m(\sqrt{2gh} + v) = 1{,}6$ кг · м/с.

8.7. Тело массой $m = 1$ кг равномерно движется по окружности со скоростью $v = 10$ м/с. Найдите изменение количества движения тела при повороте на 60°, 90°, 180° и 360°.

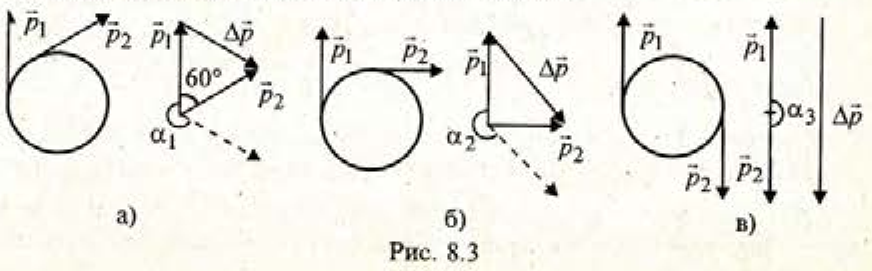


Рис. 8.3

Ответ: 1) $\Delta p = 10$ кг·м/с под углом 240° к первоначальному направлению; 2) $\Delta p = 14$ кг·м/с под углом 225° к первоначальному направлению; 3) $\Delta p = 20$ кг·м/с под углом 180° к первоначальному направлению; 4) $\Delta p = 0$.

Решение. Импульс тела $\vec{p} = m\vec{v}$ по модулю не изменяется $p_1 = p_2 = p$.

1) $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (рис. 8.3а); $\Delta p = p = mv = 10$ кг·м/с (треугольник импульсов равносторонний). Угол $\alpha_1 = 240°$ к первоначальному направлению.

2) Изменение импульса за четверть периода (рис. 8.3б). Из прямоугольного треугольника импульсов получим модуль Δp:

$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = p\sqrt{2} = mv\sqrt{2} = 14$ кг·м/с. Угол $\alpha_2 = 225°$.

3) За половину периода изменение импульса $\Delta p = p_1 + p_2 = 2p = 2mv = 20$ кг·м/с, т. к. импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ имеют противоположные направления (рис. 8.3 в). Угол $\alpha_3 = 180°$.

4) Через период изменение импульса равно нулю, т. к. $\vec{p}_1$ совпадает с $\vec{p}_2$, а по модулю они одинаковы $\Delta p = p_2 - p_1 = 0$.

8.8. Тело массой $m = 2$ кг двигалось по окружности, причем в некоторой точке A имело скорость $v_A = 4$ м/с, а пройдя четверть окружности, в точке B $v_B = 3$ м/с. Определите модуль вектора изменения импульса тела.

Ответ: $\Delta p = 10$ кг·м/с.

Решение самостоятельное. См. задачу 8.7.

8.9. Пучок молекул падает на стенку и отражается от нее по закону абсолютно упругого удара. Найдите давление P этого пучка на стенку, если направление скорости движения молекул составляет угол θ с нормалью к ней. Известны масса m, скорость v и концентрация n молекул в пучке. Рассмотреть случаи: а) стенка неподвижна; б) стенка движется в направлении нормали к ней со скоростью u.

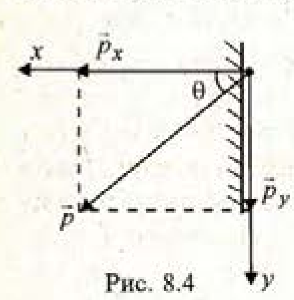


Рис. 8.4

Ответ: а) $P = 2mnv^2\cos^2\theta$;

б) $P = 2mn(u + v\cos\theta)^2$, стенка движется навстречу молекулам; $P = 2mn(v\cos\theta - u)^2$, стенка перемещается в ту же сторону, что и молекулы.

Решение. Изменение импульса стенки, связанное с ударом N молекул за время Δt, равно импульсу действующей на стенку силы: $\vec{F}\Delta t = N\Delta\vec{p}$, где $\Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{v})$ — изменение импульса одной молекулы. Давление, оказываемое пучком молекул N на стенку площадью s: $P = \dfrac{F}{s} = \dfrac{N\Delta(mv)}{\Delta t \cdot s}$. Число молекул N можно найти, если учесть, что за 1 с на стенку попадут только молекулы, которые находятся от нее на расстоянии $l = v_x = v\cos\theta$, т. е. $N = ns\Delta tv\cos\theta$.

а) Стенка неподвижна (рис. 8.4) $\Delta(mv_x) = 2mv_x = 2mv\cos\theta$, тогда давление на стенку $P = \dfrac{2mv\cos\theta \cdot ns\Delta tv\cos\theta}{\Delta t \cdot s} = 2mnv^2\cos^2\theta$.

б) Стенка движется навстречу потоку молекул со скоростью $\vec{u}$, при этом $\Delta(mv_x) = 2m(v\cos\theta + u)$; $l = v\cos\theta + u$; $P = 2mn(v\cos\theta + u)^2$.

Стенка перемещается в ту же сторону, что и молекулы, тогда $P = 2mn(v\cos\theta - u)^2$.

8.10. В заднюю стенку башни танка, идущего со скоростью $v_1 = 72$ км/ч, ударяется горизонтально летящая со скоростью $v_0 = 750$ м/с пуля и упруго отскакивает от нее (рис. 8.5). С какой скоростью полетит отскочившая пуля? Стенка наклонена к вертикали под углом $\alpha = 30°$.

Ответ: $v = 720$ м/с.

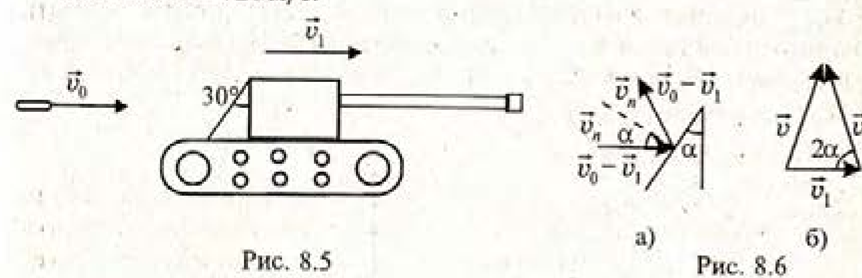


Рис. 8.5 Рис. 8.6

Решение. Скорость пули относительно танка равна $v_п = v_0 - v_1$. Удар абсолютно упругий, поэтому скорость отскочившей пули относительно танка такая же $v_п$ (рис. 8.6 а). Скорость отскочившей пули относительно земли по закону сложения скоростей равна векторной сумме скоростей: скорости отскочившей пули относительно танка $\vec{v}_п$ и скорости танка относительно земли $\vec{v}_1$ (рис. 8.6 б) $\vec{v} = \vec{v}_п + \vec{v}_1$; $v_п = v_0 - v_1$.

По теореме косинусов $v = \sqrt{(v_0 - v_1)^2 + v_1^2 - 2v_1(v_0 - v_1)\cos 2\alpha} = 720$ м/с.

8.11. Два свинцовых шара катятся без трения по горизонтальному столу во взаимно перпендикулярных направлениях и неупруго сталкиваются. Определите значение и направление скорости шаров

после ударов, если их скорости до ударов $\upsilon_1 = 4$ м/с и $\upsilon_2 = 1,5$ м/с, а отношение масс $m_2/m_1 = n = 2$.

а) б)

Рис. 8.7

Ответ: $u \approx 1,7$ м/с, $\alpha = 37°$.

Решение. Закон сохранения импульса для системы шаров при абсолютно неупругом ударе: рис 8.7а — до взаимодействия; б — после удара

$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$;

(x): $m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)u\cos\alpha$; (1)

(y): $m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u\sin\alpha$. (2)

Разделим (2) на (1), тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m_2\upsilon_2}{m_1\upsilon_1}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\left(n\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right) = 37°$. Оба уравнения — (1) и (2) — возведем в квадрат и сложим

$$m_1^2\upsilon_1^2 + m_2^2\upsilon_2^2 = (m_1 + m_2)^2 u^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha);$$

$$u = \frac{\sqrt{m_1^2\upsilon_1^2 + m_2^2\upsilon_2^2}}{m_1 + m_2} = \frac{\sqrt{\upsilon_1^2 + n^2\upsilon_2^2}}{1+n} = 1,7 \text{ м/с}.$$

8.12. Биллиардный шар 1, движущийся со скоростью $\upsilon_1 = 10$ м/с, соударяется с таким же покоящимся шаром 2 ($m_1 = m_2 = m$). После удара шары разлетелись так, как показано на рис. 8.8. Найдите скорости шаров после удара.

Ответ: $\upsilon_1' = \upsilon_2' = 7,1$ м/с.

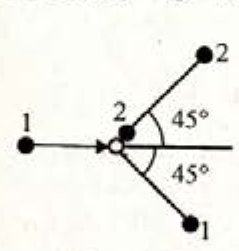


Рис. 8.8

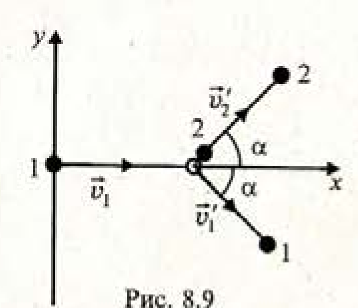


Рис. 8.9

Решение. Система из двух шаров замкнута. Закон сохранения импульса (рис. 8.9): $m\vec{\upsilon}_1 = m\vec{\upsilon}_1' + m\vec{\upsilon}_2'$;

(x): $m\upsilon_1 = m\upsilon_1'\cos\alpha + m\upsilon_2'\cos\alpha$; (1)

(y): $0 = -m\upsilon_1'\sin\alpha + m\upsilon_2'\sin\alpha$; $\upsilon_1' = \upsilon_2'$.

Из (1) $\upsilon_1 = 2\upsilon_1'\cos\alpha = \sqrt{2}\upsilon_1'$; откуда $\upsilon_1' = \upsilon_2' = \upsilon_1/\sqrt{2} = 7,1$ м/с.

8.13. Два одинаковых шарика массами $m = 2,0$ г движутся в горизонтальной плоскости с одинаковыми скоростями $\upsilon = 4,0$ м/с:

1) вдоль одной прямой навстречу друг другу; 2) вдоль одной прямой один за другим; 3) под углом $\alpha = 120°$ друг к другу. Чему равно суммарное количество движения этих шариков во всех случаях?

Ответ: 1) $p = 0$; 2) $p = 0,16$ кг · м/с; 3) $p = 0,08$ кг · м/с.

Решение самостоятельное.

8.14. Ракета, имеющая вместе с зарядом массу $M = 250$ г, взлетает вертикально вверх и достигает высоты $h = 150$ м. Масса заряда $m = 50$ г. Найдите скорость υ истечения газов из ракеты в результате сгорания заряда, считая, что сгорание заряда происходит мгновенно.

Ответ: $\upsilon = 217$ м/с.

Решение. Закон сохранения импульса для системы ракета—газы, имеет вид $(M - m)\upsilon_1 = m\upsilon$, где $\upsilon_1 = \sqrt{2gh}$ — скорость ракеты, отсюда

$$\upsilon = \frac{(M - m)\sqrt{2gh}}{m} = 217 \text{ м/с}.$$

8.15. Тележка с песком катится со скоростью $\upsilon_1 = 1$ м/с по горизонтальной плоскости без трения. Навстречу тележке летит шар массой $m = 3$ кг со скоростью $\upsilon_2 = 8$ м/с, направленной под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. После встречи с тележкой шар застревает в песке. С какой скоростью и в какую сторону покатится тележка после встречи с шаром? Масса тележки с песком $M = 10$ кг.

Решение. Систему тележка—снаряд можно считать замкнутой. Координатную ось x направим горизонтально (рис. 8.10). Вдоль этой оси внешние силы не действуют, то есть выполняется закон сохранения импульса вдоль этого направления.

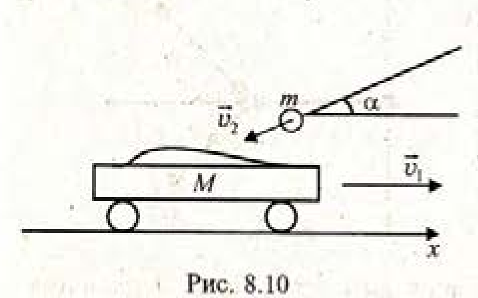


Рис. 8.10

$M\upsilon_{1x} + m\upsilon_{2x} = (M + m)u_x$;

$\upsilon_{1x} = \upsilon_1$, $\upsilon_{2x} = -\upsilon_2\cos\alpha$;

$M\upsilon_1 - m\upsilon_2\cos\alpha = (M + m)u_x$.

Тогда $u_x = (M\upsilon_1 - m\upsilon_2\cos\alpha)/(M + m) = -0,9$ м/с.

Минус указывает на то, что тележка покатится противоположно первоначальному направлению.

8.16. По абсолютно гладкой поверхности движется со скоростью $\upsilon = 6,0$ м/с ящик с песком массой $M = 9,0$ кг. В песок попадает гиря массой $m = 1,0$ кг, отпущенная без начальной скорости с

10-метровой высоты. Определите скорость ящика после попадания в него гири.

Ответ: $u = 5,4$ м/с.

Решение. Выполняется закон сохранения импульса в направлении оси x, совпадающей с направлением движения ящика. В этом направлении на систему внешние силы не действуют.

$$Mv = (m+M)u; \quad u = \frac{Mv}{(m+M)} = 5,4 \text{ м/с}.$$

8.17. С какой скоростью v после горизонтального выстрела из винтовки стал двигаться стрелок, стоящий на гладком льду? Масса стрелка с винтовкой составляет $M = 70$ кг, а масса пули $m = 10$ г и ее начальная скорость $v_0 = 700$ м/с.

Ответ: $v = 0,1$ м/с.

Решение. Система стрелок—ружье—пуля в направлении оси x может считаться замкнутой (в этом направлении внешние силы не действуют). Закон сохранения импульса для этого направления

$$Mv = mv_0; \quad v = \frac{mv_0}{M} = 0,1 \text{ м/с}.$$

8.18. Используя условие задачи 8.17, определите, с какой скоростью стал двигаться стрелок, если он сделал два выстрела: 1) в одном и том же направлении; 2) второй выстрел в направлении, перпендикулярном первому.

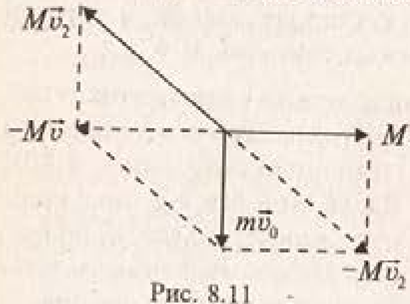


Рис. 8.11

Ответ: 1) $v_1 = 0,2$ м/с;
2) $v_2 = 0,14$ м/с.

Решение. 1) После первого выстрела (см. задачу 8.17)

$$Mv = mv_0; \quad v = \frac{mv_0}{M}.$$

После второго выстрела $Mv = Mv_1 - mv_0$, откуда скорость стрелка после второго выстрела $v_1 = \dfrac{Mv + mv_0}{M} = \dfrac{2mv_0}{M} = 0,2$ м/с.

2) Второй выстрел перпендикулярен первому (рис. 8.11).

$$M\vec{v} = m\vec{v}_0 + M\vec{v}_2; \quad v_2 = \frac{\sqrt{2}mv_0}{M} = 0,14 \text{ м/с}.$$

8.19. Человек, стоящий на коньках на гладком льду, бросает камень массой $m = 0,5$ кг. Спустя время $t = 2$ с, камень достигает берега, пройдя расстояние $S = 20$ м. С какой скоростью u начинает скользить конькобежец, если его масса $M = 60$ кг? Трением пренебречь.

Ответ: $u = 0,083$ м/с.

Решение. Закон сохранения импульса выполняется для направления вдоль земли: $Mu = mv$, где $v = \dfrac{S}{t}$; тогда $u = \dfrac{mS}{Mt} = 0,083$ м/с.

8.20. Тело массой $M = 990$ г лежит на горизонтальной поверхности. В тело попадает пуля массой $m = 10$ г и застряет в нем. Скорость пули $v = 700$ м/с и направлена горизонтально. Какой путь S пройдет тело до остановки? Коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu = 0,05$.

Ответ: $S = 50$ м.

Решение. Удар абсолютно неупругий. По закону сохранения импульса $mv = (m+M)u$, откуда $u = \dfrac{mv}{m+M}$ — скорость, с которой начало двигаться тело с застрявшей в нем пулей. Уравнение движения тела $\vec{F}_{тр} = m\vec{a}$; $-\mu mg = ma$; $a = -\mu g$; $S = -\dfrac{u^2}{2a} = \dfrac{u^2}{2\mu g} = \dfrac{m^2v^2}{2\mu g(m+M)^2}$; $S = 50$ м.

8.21. Железнодорожная платформа массой $M = 20$ т движется со скоростью $v_1 = 9,0$ км/ч. Из орудия, установленного на платформе, горизонтально выпущен снаряд массой $m = 25$ кг со скоростью $v_2 = 700$ м/с относительно орудия. Определите скорость платформы u после выстрела: 1) когда выстрел произведен в направлении движения платформы; 2) когда выстрел произведен в противоположном направлении.

Ответ: 1) $u = 1,6$ м/с; 2) $u = 3,4$ м/с.

Решение. Закон сохранения импульса для горизонтального направления:

1) $(M+m)v_1 = m(v_1 + v_2) + Mu$; $u = \dfrac{(m+M)v_1 - m(v_1+v_2)}{M}$.

С учетом того, что $m << M$; $v_1 = 2,5$ м/с $<< v_2$, получим

$$u = \frac{Mv_1 - mv_2}{M} = 1,4 \text{ м/с}.$$

2) Выстрел в противоположном направлении.

$(M+m)v_1 = m(v_1 - v_2) + Mu$;

$$u = \frac{(m+M)v_1 - m(v_1 - v_2)}{M} \approx \frac{Mv_1 + mv_2}{M} = 3,4 \text{ м/с}.$$

8.22. Из старинной пушки, не имеющей противооткатного устройства, стреляют ядром под углом $\alpha = 40^\circ$ к горизонту. Масса ядра $m = 10$ кг, начальная скорость $v_0 = 200$ м/с. Какова будет скорость отката пушки, если ее масса $M = 500$ кг? Трение не учитывать.

Ответ: $v = 3{,}1$ м/с.

Решение. В горизонтальном направлении

$$mv_0 \cos\alpha - Mv = 0; \quad v = \frac{mv_0 \cos\alpha}{M} = 3{,}1 \text{ м/с}.$$

Направление движения пушки противоположно направлению движения снаряда.

8.23. Орудие, имеющее массу ствола $M = 500$ кг, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда $m = 5$ кг, его начальная скорость $v = 460$ м/с. При выстреле ствол откатывается на расстояние $S = 40$ см. Найдите среднюю силу торможения F, возникающую в механизме, тормозящем ствол.

Ответ: $F = 13{,}225$ кН.

Решение. Средняя сила торможения $F = ma$, где $a = \dfrac{u^2}{2S}$, u — начальная скорость движения ствола при откате. $mv = Mu$; $u = \dfrac{mv}{M}$;

тогда $F = M\dfrac{m^2v^2}{2M^2S} = \dfrac{m^2v^2}{2MS} = 13{,}225$ кН.

8.24. Навстречу платформе с песком, движущейся со скоростью v, по гладкому наклонному желобу соскальзывает без начальной скорости тело массой m и застревает в песке. Желоб длиной l образует с горизонтом угол α. Найдите скорость u платформы после попадания в нее тела, если масса платформы равна M.

Ответ: $u = \left(Mv - m\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha\right)/(m + M)$.

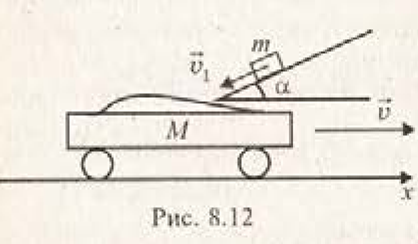


Рис. 8.12

Решение. В горизонтальном направлении никакие силы на тела не действуют, выполняется закон сохранения импульса по направлению (рис. 8.12).

$$Mv_x + mv_{1x} = (M + m)u_x \qquad (1)$$

Скорость платформы $v_x = v$; скорость тела в момент соскальзывания с наклонной плоскости можно найти, учитывая, что его ускорение равно $a = g\sin\alpha$; а расстояние, которое оно проходит, равно l, тогда скорость тела $v_1 = \sqrt{2al} = \sqrt{2gl\sin\alpha}$;

$v_{1x} = -v_1\cos\alpha = -\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha$. Из (1) получаем

$Mv - mv_1\cos\alpha = (M + m)u$, откуда $u = \dfrac{Mv - m\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha}{m + M}$.

8.25. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, начинает соскальзывать без трения ящик с песком массой M. В тот момент, когда ящик прошел путь l, в него попал камень массой m, скорость которого направлена под углом β к горизонту (рис. 8.13). Ящик при этом остановился. С какой скоростью двигался камень?

Ответ: $v = \dfrac{M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{m\cos(\alpha \pm \beta)}$.

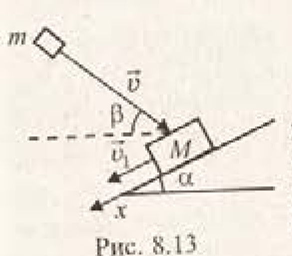


Рис. 8.13

Решение. Чтобы ящик остановился, сумма проекций импульсов ящика и камня на наклонную плоскость должна быть равна нулю. Считаем, что время взаимодействия камня и ящика очень мало

$$Mv_1 - mv\cos(\alpha \pm \beta) = 0.$$

Знак перед углом β выбирается в зависимости от направления скорости камня по отношению к горизонту. Скорость ящика $v_1 = \sqrt{2al}$, где $a = g\sin\alpha$. Тогда скорость камня $v = \dfrac{M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{m\cos(\alpha \pm \beta)}$.

8.26. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, начинает скользить без трения ящик с песком массой M. В тот момент, когда ящик прошел путь l, в него попало тело массой m, двигавшееся горизонтально. Ящик при этом остановился. С какой скоростью двигалось тело?

Ответ: $v = M\sqrt{2gl\sin\alpha}/m\cos\alpha$.

Решение самостоятельное. См. задачу 8.25.

8.27. Охотник в движущейся лодке стреляет из ружья в направлении движения лодки. Какую скорость имела лодка, если она остановилась после двух, следующих один за другим, выстрелов? Масса охотника с лодкой $M = 200$ кг, масса заряда $m = 20$ г. Скорость вылета дроби и пороховых газов $v_1 = 500$ м/с.

Ответ: $v_0 = 0{,}1$ м/с.

Решение. Если пренебречь трением лодки о воду, то данную систему можно считать замкнутой в горизонтальном направлении, для нее выполняется закон сохранения импульсов. Учтем, что выстрелы происходят быстро один за другим, тогда скорость лодки за промежуток времени между двумя выстрелами не изменяется,

тогда $(M+m)\vec{v}_0 = M\vec{v} + 2m\vec{v}_1$. $m \ll M$, поэтому в сумме масс массой m можно пренебречь, $\vec{v} = 0$ (лодка остановилась), тогда проекция уравнения на ось x, совпадающую с направлением движения лодки, имеет вид $Mv_0 = 2mv_1$; $v_0 = \dfrac{2mv_1}{M} = 0{,}1$ м/с.

8.28. С катера массой 750 т выстрелили из пушки в сторону, противоположную движению катера, под углом 60° к горизонту. На сколько изменилась скорость катера, если снаряд массой 30 кг вылетел со скоростью $v_2 = 1$ км/с относительно катера?

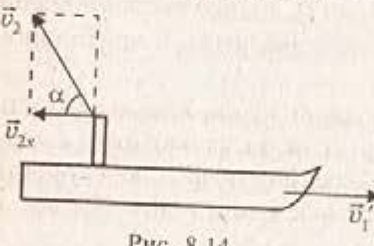


Рис. 8.14

Ответ: $\Delta v = 0{,}02$ м/с.

Решение. Направим ось x по направлению движения катера. В этом направлении для системы выполняется закон сохранения импульса. До выстрела проекция импульса системы на ось x равна $p_1 = (M+m)v_1$. После выстрела скорость снаряда относительно судна v_2, а относительно земли $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 + \vec{v}_1'$, проекция на ось x: $v_{2x}' = v_{1x}' - v_{2x} = v_{1x}' - v_2\cos\alpha$, где $v_{1x}' = v_1'$ — скорость катера после выстрела пушки (рис. 8.14). Проекция на ось x импульса $\vec{p}_2$ системы после выстрела пушки:

$$p_2 = Mv_1' + mv_{2x}' = Mv_1' + m(v_1' - v_2\cos\alpha).$$

По закону сохранения импульса $p_1 = p_2$.

$$(M+m)v_1 = Mv_1' + m(v_1' - v_2\cos\alpha);$$

$$(M+m)v_1 = (M+m)v_1' - mv_2\cos\alpha.$$

Изменение скорости катера $\Delta v = v_1' - v_1$, тогда

$$mv_2\cos\alpha = (M+m)(v_1' - v_1) = (M+m)\Delta v, \text{ откуда}$$

$$\Delta v = \frac{mv_2\cos\alpha}{m+M}; \quad m \ll M; \quad \Delta v = \frac{mv_2\cos\alpha}{M} = 0{,}02 \text{ м/с}.$$

8.29. С лодки массой $M = 200$ кг, которая движется со скоростью $v_0 = 1$ м/с, ныряет мальчик массой $m = 50$ кг, двигаясь в горизонтальном направлении. Какой будет скорость лодки v_1 после прыжка мальчика, если он прыгает: а) с кормы со скоростью $v_2 = 5$ м/с; б) с носа со скоростью $v_3 = 3$ м/с; в) с носа со скоростью $v_4 = 7$ м/с.

Ответ: а) $v_1 = 2{,}5$ м/с; б) $v_1 = 0{,}5$ м/с; в) $v_1 = -0{,}5$ м/с.

Решение. Трением лодки о воду пренебрегаем, тогда систему лодка—мальчик можно считать замкнутой, для нее выполняется закон сохранения импульса $(M+m)\vec{v}_0 = M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$. (1)

Ось координат по направлению движения лодки.

а) Проекция уравнения (1) на ось x (мальчик прыгает с кормы в сторону, противоположную движению лодки):

$$(M+m)v_0 = Mv_1 - mv_2; \text{ откуда } v_1 = \frac{(M+m)v_0 + mv_2}{M} = 2{,}5 \text{ м/с}.$$

б) Мальчик прыгает в направлении движения лодки:

$$(M+m)v_0 = Mv_1 + mv_3; \quad (2)$$

$$v_1 = \frac{(M+m)v_0 - mv_3}{M} = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

в) Уравнение совпадает с уравнением (2), только скорость мальчика v_4, тогда $v_1 = -0{,}5$ м/с. Лодка будет двигаться в противоположном направлении.

8.30. Охотник стреляет с легкой надувной лодки. Какую скорость приобретает лодка в момент выстрела, если масса охотника с лодкой $M = 80$ кг, масса дроби $m = 35$ г, средняя начальная скорость дроби $v_1 = 320$ м/с? Ствол ружья направлен под углом $\alpha = 60°$ к горизонту.

Ответ: $v = 0{,}07$ м/с.

Решение самостоятельное.

8.31. Лодка массой $m_1 = 150$ кг отплывает от берега со скоростью $v_1 = 5$ м/с, направленной под углом $\alpha = 30°$ к линии берега. С берега на лодку с разгона прыгает мальчик массой $m_2 = 50$ кг, приобретая во время прыжка скорость $v_2 = 3$ м/с, направленную перпендикулярно линии берега. Найти скорость лодки с мальчиком v.

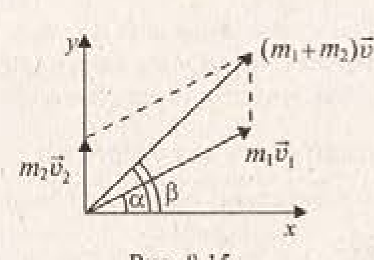


Рис. 8.15

Ответ: $v = 4{,}2$ м/с, $\beta = 39°$.

Решение. Закон сохранения импульса имеет вид $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}$;

(x): $m_1v_1\cos\alpha = (m_1+m_2)v\cos\beta$;

(y): $m_1v_1\sin\alpha + m_2v_2 = (m_1+m_2)v\sin\beta$.

Оба уравнения возведем в квадрат и сложим.

$$m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2\sin\alpha = (m_1+m_2)^2v^2,$$

$$v = \frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2\sin\alpha}, \quad v = 4{,}2 \text{ м/с}.$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{m_1v_1\sin\alpha + m_2v_2}{m_1v_1\cos\alpha} = 0{,}81; \quad \beta = 39°.$$

8.32. На покоящейся тележке массой $m_1 = 20$ кг стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Какой будет скорость тележки относительно

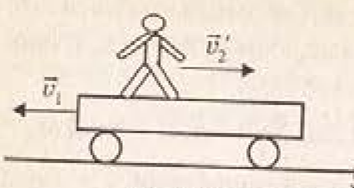


Рис. 8.16

земли v_1, если человек пойдет по тележке со скоростью $v_2' = 1$ м/с относительно тележки?

Ответ: $v_1 = 0,75$ м/с.

Решение. Тележка с человеком — замкнутая система, для которой выполняется закон сохранения импульса, $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$; $p_1 = 0$. Скорость человека относительно земли $\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_1$; (x): $v_2 = v_2' - v_1$ (рис. 8.16).

$\vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$; (x): $p_2 = -m_1v_1 + m_2v_2' - m_2v_1 = 0$, тогда скорость тележки $v_1 = \dfrac{m_2v_2'}{m_1 + m_2} = 0,75$ м/с.

8.33. Человек массой $m = 70$ кг стоит на корме лодки, находящейся в озере. Длина лодки $l = 5,0$ м, масса ее $M = 280$ кг. Человек переходит на нос лодки. На какое расстояние переместится человек относительно дна? Сопротивлением воды пренебречь.

Ответ: $x = 4$ м.

Решение. Без учета трения лодки о воду систему лодка—человек можно считать изолированной по горизонтальному направлению (силы по этому направлению на систему не действуют). Тогда

$m(v - u) - Mu = 0$, (1)

где $v - u$ — скорость движения человека относительно дна озера, u — скорость движения лодки. Учитывая, что время движения лодки и человека одинаково, скорость движения человека относительно лодки $v = \dfrac{l}{t}$; а $u = \dfrac{S}{t}$, где S — расстояние, на которое переместится лодка относительно дна. Следовательно из (1) получим $m\left(\dfrac{l}{t} - \dfrac{S}{t}\right) = M\dfrac{S}{t}$, $m(l - S) = MS$, откуда $S = \dfrac{ml}{M + m}$. Расстояние, на которое сместится человек относительно дна, $x = l - S$,

$$x = l - \frac{ml}{M + m} = \frac{Ml}{M + m} = 4 \text{ м}.$$

8.34. Лодка длиной l и массой M стоит в спокойной воде. На ее концах сидят два рыбака, массы которых m_1 и m_2. На сколько сместится центр тяжести лодки, если рыбаки поменяются местами?

Ответ: $x = l(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + M)$.

Решение. Согласно закону сохранения импульса в горизонтальном направлении, импульс системы равен нулю в любой момент времени. Пусть движется первый рыбак, а второй сидит в лодке.

Скорость лодки относительно берега $\vec{u}_1$, скорость рыбака относительно лодки $\vec{v}_1$, а его скорость относительно берега $(\vec{v}_1 + \vec{u}_1)$. В проекциях закон сохранения импульса имеет вид

$m_1(v_1 - u_1) - (M + m_2)u_1 = 0$, (1)

где $v_1 = \dfrac{l}{t}$, $u_1 = \dfrac{S_1}{t}$, t и S_1 — время движения рыбака и перемещение лодки за это время. Тогда (1) преобразуется:

$m_1(l - S_1) - (M + m_2)S_1 = 0$. (2)

Аналогичное уравнение составим для второго рыбака (S_2 — смещение лодки при переходе второго рыбака).

$m_2(l - S_2) - (M + m_1)S_2 = 0$. (3)

Результирующее смещение лодки (смещение центра масс) равно $x = S_1 - S_2$. (4)

Из (2), (3) и (4) получим $x = \dfrac{(m_1 - m_2)l}{m_1 + m_2 + M}$.

8.35. С вершины клина с углом $\alpha = 45°$ при основании с высоты $H = 20$ см начинает скользить тело массой $m = 0,50$ кг. Клин лежит на абсолютно гладкой поверхности. Определить, на какое расстояние переместится клин, когда тело окажется у его основания. Масса клина $M = 1,5$ кг.

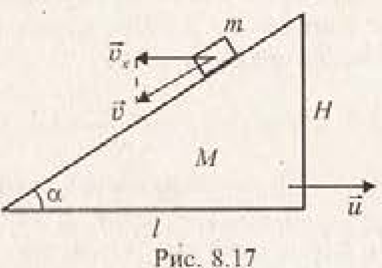


Рис. 8.17

Ответ: $S = mH\,\text{ctg}\,\alpha/(M + m)$.

Решение. Согласно закону сохранения импульса в горизонтальном направлении (рис. 8.17) $(M + m)u = mv_x$. За время t тело m соскользнет с наклонной плоскости, при этом по горизонтали оно переместится на $l = H\,\text{ctg}\,\alpha = v_x \cdot t$. Клин с телом за это время переместится на $S = ut$. Тогда $(M + m)ut = mv_xt$;

$$(M + m)S = mH\,\text{ctg}\,\alpha, \quad S = \frac{mH\,\text{ctg}\,\alpha}{M + m}.$$

8.36. Однородный стрежень длиной l нижним концом касается гладкой горизонтальной поверхности. Верхний конец стержня подвешен на нити так, что стержень образует с горизонтальной плоскостью угол α. Нить пережигают. В какую сторону и на сколько сместится нижний конец стержня, когда он упадет?

Ответ: $x = l\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

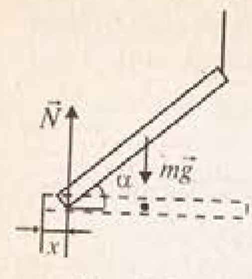


Рис. 8.18

Решение. Если нить пережечь, то центр тяжести стержня будет двигаться вертикально вниз (никакого смещения по горизонтали не будет, т. к. и сила тяжести, и сила реакции опоры направлены вертикально, т. е. горизонтальная проекция скорости центра масс стержня равна нулю). Тогда нижний конец стержня сместится влево на расстояние x (рис. 8.18):

$$x = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha = l\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

8.37. По внутренней поверхности полусферической чашки радиусом $R = 0,3$ м соскальзывает без трения кубик массой $m = 0,2$ кг, начинающий движение на одном краю и оканчивающий на другом (рис. 8.19). Масса чашки $M = 0,8$ кг. На сколько сместится чашка (трение не учитывать)?

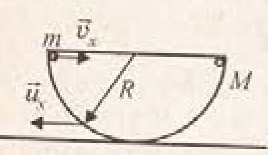


Рис. 8.19

Ответ: $S = 0,12$ м.

Решение. В горизонтальном направлении скорость кубика v_x, его импульс mv_x, импульс чашки Mu_x. По закону сохранения импульса в горизонтальном направлении $mv_x = Mu_x$. По горизонтали кубик прошел расстояние $2R$, а чашка сместилась на S. Пройденные расстояния пропорциональны скоростям, поэтому

$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{m}{M} = \frac{S}{2R - S}; \quad S = \frac{2mR}{m + M} = 0,12\text{ м}.$$

8.38. С гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, соскальзывает с высоты h небольшое тело. Как будет двигаться тело, если оно в конце наклонной плоскости встречает: 1) вполне упругую горизонтальную плоскость; 2) горизонтальную плоскость неупругую, но гладкую?

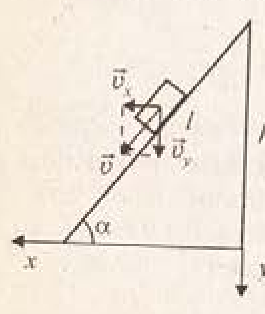


Рис. 8.20

Решение. Скорость тела при соскальзывании с наклонной плоскости (рис. 8.20) равна $v = \sqrt{2al}$, где l — длина наклонной плоскости, $a = g\sin\alpha$. Учтем, что $\sin\alpha = \frac{h}{l}$, тогда $v = \sqrt{2gh}$. Горизонтальная составляющая $v_x = \sqrt{2gh}\cos\alpha$; вертикальная составляющая $v_y = \sqrt{2gh}\sin\alpha$. 1) При попадании тела на упругую плоскость горизонтальная составляющая скорости не изменится, а вертикальная при столкновении поменяет знак на противоположный, т. е. тело будет двигаться по параболе, максимальная высота которой будет равна

$$h_1 = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{2gh\sin^2\alpha}{2g} = \frac{h}{2}.$$

2) По горизонтальной гладкой неупругой плоскости тело будет двигаться равномерно со скоростью равной горизонтальной составляющей $v_1 = v_x = \sqrt{2gh}\cos\alpha = \sqrt{gh}$.

При этом вертикальная составляющая скорости будет равна нулю.

8.39. Два человека с массами $m_1 = 65$ кг и $m_2 = 75$ кг стоят на коньках на льду друг против друга. Первый кидает другому груз массой $m = 8$ кг со скоростью, горизонтальная составляющая которой $v = 6$ м/с относительно земли. Найти скорость v_1 первого человека после бросания груза и скорость второго v_2, после того, как он поймает груз. Трением пренебречь.

Ответ: $v_1 = 0,74$ м/с; $v_2 = 0,59$ м/с.

Решение. Закон сохранения импульса для первого человека и груза $mv - m_1v_1 = 0$; $v_1 = \frac{mv}{m_1} = 0,74$ м/с — скорость первого человека. Для второго человека и груза $mv = (m + m_2)v_2$;

$$v_2 = \frac{mv}{m + m_2} = 0,59\text{ м/с — скорость второго человека с грузом.}$$

8.40. Три лодки одинаковой массой M идут в кильватере (друг за другом) с одинаковой скоростью v. Из средней одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью u относительно лодки грузы массой m. Каковы будут скорости лодок после переброски грузов?

Ответ: $v_1 = \frac{mv + m_1(v + u)}{m + m_1}$; $v_2 = v$; $v_3 = \frac{mv + m_1(v - u)}{m + m_1}$.

Решение. Согласно закону сохранения импульса для первой лодки $Mv + m(v + u) = (m + M)v_1$; $v_1 = \frac{Mv + m(v + u)}{m + M}$ — скорость первой лодки с грузом. Для второй лодки

$$(M + 2m)v = m(v + u) + m(v - u) + Mv_2;$$

Скорость второй лодки не изменилась, $v_2 = v_1$. $(v \pm u)$ — скорость груза относительно воды, в зависимости от его направления движения.

Для третьей лодки

$$Mv + m(v-u) = (m+M)v_3; \quad v_3 = \frac{Mv + m(v-u)}{m+M}.$$

8.41. Две лодки движутся по инерции параллельными курсами навстречу друг другу. Когда лодки поравнялись, с одной из них на другую осторожно переложили груз массой $m = 25$ кг. После этого лодка с грузом остановилась, а лодка без груза продолжала двигаться со скоростью $v = 8$ м/с. С какими скоростями v_1 и v_2 двигались лодки до встречи, если масса лодки, в которую переложили груз, $M = 1$ т?

Ответ: $v_1 = 0{,}2$ м/с; $v_2 = 8$ м/с.

Решение. По закону сохранения импульса для второй лодки, в которую переложили груз, $Mv_1 - mv_2 = 0$; $v_1 = \frac{mv_2}{M} = 0{,}2$ м/с. Для первой лодки, из которой забрали груз, $Mv_2 = (M-m)v$. Учитывая, что $m \ll M$, можно приближенно считать $v_2 = v = 8$ м/с.

8.42. Две лодки массой M, на каждой из которых находилось по одному человеку массой m, двигались равномерно навстречу друг другу параллельными курсами. В тот момент, когда лодки поравнялись, из каждой из них в другую перешел человек. После этого лодки двигались в прежних направлениях со скоростями u_1 и u_2. Чему были равны начальные скорости лодок?

Ответ: $v_1 = \frac{mu_2 + Mu_1}{M-m}$; $v_2 = \frac{mu_1 + Mu_2}{M-m}$.

Решение. Закон сохранения импульса для первой лодки и человека, переходящего из второй лодки на первую,

$$Mv_1 - mv_2 = (M+m)u_1, \qquad (1)$$

аналогично для второй лодки и человека, переходящего из первой лодки во вторую,

$$Mv_2 - mv_1 = (M+m)u_2. \qquad (2)$$

Из (1) получим $v_1 = \frac{(M+m)u_1 + mv_2}{M}$ и подставим в (2).

$$Mv_2 - \frac{m}{M}\left[(M+m)u_1 + mv_2\right] = (M+m)u_2, \text{ откуда}$$

$$v_2 = \frac{(M+m)(mu_1 + Mu_2)}{M^2 - m^2} = \frac{mu_1 + Mu_2}{M-m}, \quad v_1 = \frac{mu_2 + Mu_1}{M-m}.$$

8.43. Два пассажира одинаковой массы $m = 70$ кг находятся на платформе, стоящей неподвижно на рельсах. Масса платформы $M = 280$ кг. Каждый пассажир начинает бежать со скоростью

$u = 6$ м/с. Какую скорость $\vec{v}$ приобретает платформа, если они спрыгнут: а) в одну сторону одновременно; б) в разные стороны одновременно; в) в одну сторону последовательно; г) в разные стороны последовательно?

Ответ: а) $v = 2$ м/с; б) $v = 0$; в) $v = 2{,}2$ м/с; г) $v = -0{,}2$ м/с.

Решение. При одновременном прыжке закон сохранения импульса для системы имеет вид $M\vec{v} + 2m(\vec{v} + \vec{u}) = 0$, $\vec{v} + \vec{u}$ — скорость человека относительно земли;

а) $Mv + 2m(v-u) = 0$; $v = \frac{2mu}{M+2m} = 2$ м/с.

б) $Mv + m(v-u) + m(v+u) = 0$; $(M+2m)v = 0$; $v = 0$.

Если пассажиры прыгают последовательно, то после первого прыжка $(M+m)\vec{v}_1 + m(\vec{v}_1 + \vec{u}) = 0$, (1)

где v_1 — скорость платформы с оставшимися пассажирами. После прыжка второго человека $(M+m)\vec{v}_1 = M\vec{v} + m(\vec{v} + \vec{u})$. (2)

в) Из (1) получаем $(M+m)v_1 + m(v_1 - u) = 0$; $v_1 = \frac{mu}{M+2m}$ — скорость платформы с оставшимся с пассажиром. Из (2):

$$(M+m)\frac{mu}{M+2m} = Mv + m(v-u);$$

$$(M+m)\frac{mu}{M+2m} = (M+m)v - mu; \quad v = \frac{mu}{M+2m} + \frac{mu}{M+m} = 2{,}2 \text{ м/с}.$$

г) После прыжка первого человека $(M+m)v_1 + m(v_1 - u) = 0$;

$$v_1 = \frac{mu}{M+2m}.$$

Второй пассажир прыгает в противоположную сторону, т. е. по ходу платформы. Используем уравнение (2):

$$(M+m)v_1 = Mv + m(v+u); \quad (M+m)\frac{mu}{M+2m} = (M+m)v + mu;$$

$$v = \frac{mu}{M+2m} - \frac{mu}{M+m} = -0{,}2 \text{ м/с}.$$

8.44. На подставке высотой $h = 4$ м лежит кубик массой $m_1 = 100$ г. Пуля массой $m_2 = 0{,}01$ кг, летящая горизонтально со скоростью $v_2 = 400$ м/с, пробивает шар по диаметру. На каком расстоянии S_2 упадет на землю пуля, если кубик падает на расстоянии $S_1 = 18$ м от основания подставки?

Ответ: $S_2 = 180$ м.

Решение. По закону сохранения импульса в горизонтальном направлении $m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$, (1)

где v'_1 и v'_2 — скорости кубика и пули после взаимодействия. Время падения кубика и пули можно найти из соотношения $h = \frac{gt^2}{2}$,

тогда $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}9$ с. Учтем, что $S_1 = v'_1 t$, откуда $v'_1 = \frac{S_1}{t} = 20$ м/с.

Из уравнения (1) найдем скорость пули v'_2:

$$v'_2 = \frac{m_1 v_2 - m_1 v'_1}{m_2} = 200 \text{ м/с}.$$

Тогда расстояние, которое пролетит пуля по горизонтали, $S_2 = v'_2 \cdot t = 180$ м.

8.45. Граната, летящая со скоростью 15 м/с, разорвалась на два осколка массами 6 и 14 кг. Скорость большего осколка возросла до 24 м/с по направлению движения. Найти скорость и направление движения меньшего осколка.

Ответ: $u_1 = -6$ м/с.

Решение. Проведем ось x в направлении движения гранаты и запишем закон сохранения импульса в проекции на эту ось:

$(m_1 + m_2)v = m_1 u_1 + m_2 u_2$, где $m_1 + m_2$ — масса всей гранаты. Отсюда: $u_1 = \frac{(m_1 + m_2)v - m_2 u_2}{m_1}$; $u_1 = -6$ м/с.

Знак минус означает, что меньший осколок полетит в направлении, противоположном направлению движения гранаты.

8.46. Взрыв разрывает камень на три части. Два куска летят под прямым углом друг к другу: кусок массой $m_1 = 1$ кг со скоростью $v_1 = 12$ м/с и $m_2 = 2$ кг со скоростью $v_2 = 8$ м/с. Третий кусок отлетает со скоростью $v_3 = 40$ м/с. Какова масса третьего осколка и в каком направлении он летит?

Ответ: $m_3 = 0{,}5$ кг; $\alpha = 53°$.

Решение. Взрыв происходит практически мгновенно, за время взрыва внешние силы не успевают подействовать на тело, а внутренние силы очень велики, поэтому систему можно считать замкнутой и применить закон сохранения импульса (рис. 8.21). $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$;

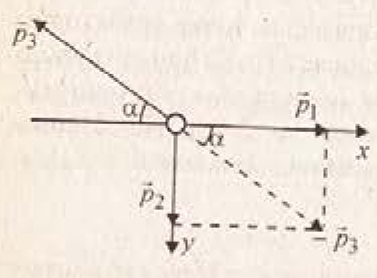


Рис. 8.21

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = -m_3\vec{v}_3;$$

(x): $m_1 v_1 = m_3 v_3 \cos\alpha$;

(y): $m_2 v_2 = m_3 v_3 \sin\alpha$.

$$(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 = (m_3 v_3)^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha);$$

$$m_3 = \frac{1}{v_3}\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2} = 0{,}5 \text{ кг}, \quad \sin\alpha = \frac{m_2 v_2}{m_3 v_3};$$

$$\alpha = \arcsin\frac{m_2 v_2}{m_3 v_3} = 53°.$$

8.47. Тело массой $M = 300$ г падает свободно с высоты $H = 10$ м. На высоте $H/2$ в тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летевшая горизонтально со скоростью $v_0 = 400$ м/с. Найдите скорость тела и угол, который образует вектор скорости с горизонталью в момент после соударения.

Ответ: $u = 16$ м/с; $\alpha = 37°$.

Решение. Время взаимодействия пули и тела при ударе очень мало, поэтому можно использовать закон сохранения импульса (рис. 8.22) $M\vec{v}_1 + m\vec{v}_0 = (M + m)\vec{v}$;

(x): $mv_0 = (M + m)v\cos\alpha$; (1)

(y): $Mv_1 = (M + m)v\sin\alpha$. (2)

Рис. 8.22

Скорость падающего тела на половине высоты можно найти из соотношения $\frac{H}{2} = \frac{v_1^2}{2g}$; $v_1 = \sqrt{gH}$. Возведем уравнения (1) и (2) в квадрат и сложим правые и левые части $(Mv_1)^2 + (mv_0)^2 = (M + m)^2 v^2$,

откуда скорость тела после соударения $v = \frac{\sqrt{M^2 gH + m^2 v_0^2}}{M + m} = 16$ м/с.

Угол, образованный вектором скорости с горизонталью после соударения, найдем, разделив второе уравнение на первое:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Mv_1}{mv_0} = \frac{M\sqrt{gH}}{mv_0}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{M\sqrt{gH}}{mv_0} = 37°.$$

8.48. Гимнаст массой $M = 60$ кг прыгает, держа в руках груз массой $m = 6$ кг под углом 45° к горизонту со скоростью $v_0 = 5$ м/с. В наивысшей точке траектории он бросает груз горизонтально назад со скоростью относительно земли $v = 3$ м/с. На сколько увеличится дальность прыжка гимнаста?

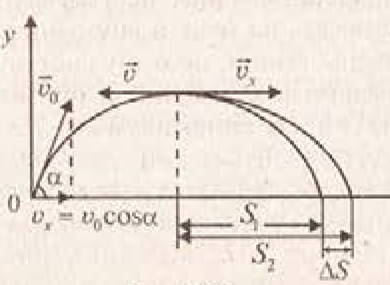


Рис. 8.23

Ответ: $\Delta S = 0{,}11$ м.

Решение. Если бы гимнаст не бросил груз, то расстояние по

горизонтали, которое он бы пролетел на спуске, $S_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$. Время подъема равно времени спуска и равно: $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{2g}$. В верхней точке траектории, когда скорости гимнаста и груза горизонтальны, а время бросания груза очень мало, в горизонтальном направлении можно использовать закон сохранения импульса

$(M+m)v_x = Mv_1 - mv$, где $v_x = v_0 \cos\alpha$, откуда

$v_1 = \frac{(M+m)v_0 \cos\alpha + mv}{M}$. $\Delta S = S_2 - S_1 = (v_1 - v_x)t$ (рис. 8.23);

$$\Delta S = \left[\frac{(M+m)v_0 \cos\alpha + mv}{M} - v_0 \cos\alpha\right] \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{2g} = 0{,}11 \text{ м}.$$

8.49. Снаряд в верхней точке траектории разрывается на два осколка равной массы. Один осколок после взрыва возвращается к орудию по прежней траектории. Где упадет второй осколок? Упадут ли оба снаряда на землю одновременно? Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: На расстоянии вдвое большем расстояния от орудия до точки, где упал бы снаряд.

Решение. Время взрыва очень мало, поэтому импульсом силы тяжести можно пренебречь и использовать закон сохранения импульса. Согласно закону сохранения импульса в горизонтальном направлении в верхней точке траектории $2mv = mv_1 - mv$, откуда $v_1 = 3v$. Т. е. осколок, возвратившийся к начальному положению, получил при взрыве скорость, равную скорости снаряда в верхней точке траектории, а второй осколок после взрыва получает скорость v_1 в три раза большую, чем скорость снаряда в высшей точке. Время падения осколков не зависит от горизонтальной скорости, т. е. для обоих осколков время падения на землю одинаково. Второй осколок упадет на землю вдвое дальше, чем упал бы снаряд.

8.50. Снаряд разрывается в верхней части траектории на два осколка равной массы. Скорость снаряда непосредственно перед разрывом равна v, а скорость одного из осколков сразу же после разрыва $v_1 = 2v$ и направлена вертикально вверх. Определить модуль и направление вектора скорости v_2 другого осколка в момент разрыва.

Ответ: $v_2 = 2\sqrt{2}v$; $\alpha = 40°$.

Решение. Закон сохранения импульса (рис. 8.24)

$m\bar{v} = \frac{m}{2}\bar{v}_1 + \frac{m}{2}\bar{v}_2$;

(x): $2mv = mv_{2x}$; $v_{1x} = 0$; $v_{2x} = 2v$;

(y): $\frac{m}{2}v_{1y} = -\frac{m}{2}v_{2y}$; $v_{2y} = -v_{1y} = -2v$;

$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 2\sqrt{2}v$;

Рис. 8.24

$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{v_{2y}}{v_{2x}}\right| = 1$; $\alpha = 45°$ — угол между горизонтальным направлением и направлением скорости второго осколка.

8.51. Снаряд в верхней точке траектории на высоте $h = 150$ м разорвался на две части: $m_1 = 0{,}7$ кг и $m_2 = 1{,}0$ кг. Скорость снаряда в этой точке $v_0 = 150$ м/с. Скорость большего осколка v_2 оказалась горизонтальной, совпадающей по направлению с v_0 и равной 350 м/с. Определить расстояние между точками падения обоих осколков. Сопротивление воздуха не учитывать.

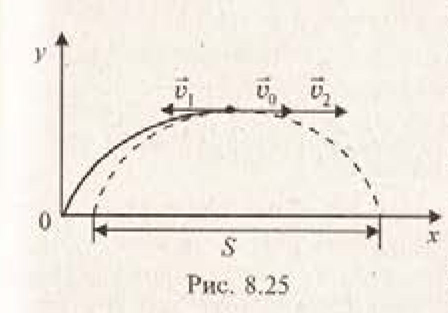


Рис. 8.25

Ответ: $S = 1582$ м.

Решение. Используя закон сохранения импульса (влиянием силы тяжести при взрыве можно пренебречь), получаем

$(m_1 + m_2)v_0 = m_1v_1 + m_2v_2$; $v_1 = \frac{(m_1 + m_2)v_0 - m_2v_2}{m_1} = -136$ м/с, т. е. первый осколок полетит в сторону орудия. Время падения осколков одинаково $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, тогда расстояние между точками падения осколков (рис. 8.25) равно $S = (|v_1| + v_2)\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1582$ м. Здесь учтено, что движение осколков в горизонтальном направлении равномерно.

8.52. Снаряд вылетает из орудия со скоростью v_0 под углом α к горизонту. В верхней точке траектории снаряд разрывается на два равных осколка, причем скорости осколков непосредственно после взрыва горизонтальны и лежат в плоскости траектории. Первый осколок упал на расстоянии S от орудия в направлении выстрела.

Найдите место падения второго осколка, если известно, что он упал дальше первого?

Ответ: $L = (2v_0^2 \sin 2\alpha)/g - S$.

Решение. Расстояние до точки, где произошел взрыв, $S_1 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$, тогда $S - S_1 = v_1 t$ (рис. 8.26), где v_1 — скорость первого осколка после взрыва, а $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ — время полета первого осколка. Отсюда $v_1 = \dfrac{S - S_1}{t} = \dfrac{gS}{v_0 \sin\alpha} - v_0 \cos\alpha$. Скорость второго осколка после взрыва можно найти по закону сохранения импульса, учитывая, что скорость снаряда в верхней точке $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$. Тогда

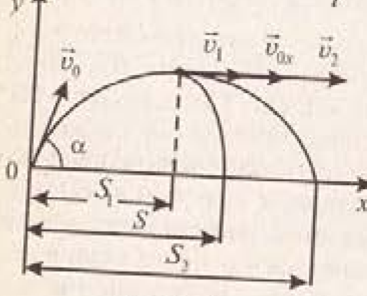


Рис. 8.26

$$mv_0 \cos\alpha = \frac{m}{2} v_1 + \frac{m}{2} v_2;$$

$$v_2 = 2v_0 \cos\alpha - v_1 = 3v_0 \cos\alpha - \frac{gS}{v_0 \sin\alpha}.$$

Расстояние, на которое улетит второй осколок,

$$S_2 = S_1 + v_2 t = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \left(3v_0 \cos\alpha - \frac{gS}{v_0 \sin\alpha}\right) \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - S.$$

8.53. Снаряд разрывается в верхней точке траектории на высоте $h = 24{,}5$ м на две одинаковые части. Через время $t_1 = 1{,}5$ с после взрыва одна часть падает на землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии S_2 от места выстрела упадет вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии $S_1 = 800$ м?

Ответ: $S_2 = 3220$ м.

Решение. Время взрыва мало, поэтому импульсом силы тяжести можно пренебречь и использовать закон сохранения импульса (рис. 8.27). $m\vec{v} = \dfrac{m}{2}\vec{v}_1 + \dfrac{m}{2}\vec{v}_2$. Скорость снаряда в верхней точке траектории горизонтальна, т. е. $v_x = v$, тогда

Рис. 8.27

$$(x):\ mv = \frac{m}{2} v_{2x}; \quad v_{2x} = 2v;$$

$$(y):\ \frac{m}{2} v_{2y} - \frac{m}{2} v_{1y} = 0; \quad v_{1y} = v_1,$$

т. е. $v_{2y} = v_{1y} = v_1$. Время движения снаряда до разрыва $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, расстояние, которое он пролетел, $S_1 = vt$, откуда скорость снаряда перед взрывом в верхней точке траектории $v = \dfrac{S_1}{t} = S_1\sqrt{\dfrac{g}{2h}} \approx 360$ м/с.

Уравнения движения осколков в момент падения на землю:

$$x_1 = S_1; \quad y_1 = h - v_{1y} t_1 + \frac{g t_1^2}{2} = 0; \qquad (1)$$

$$x_2 = S_2 = S_1 + v_{2x} t_2; \qquad (2)$$

$$y_2 = h + v_{2y} t_2 - \frac{g t_2^2}{2} = 0; \qquad (3)$$

здесь $v_{1y} = v_{2y} = v_1$; $v_{2x} = 2v$; t_2 — время падения второго осколка.

Из (1) находим $v_1 = \dfrac{2h + g t_1^2}{2 t_1} \approx 24$ м/с.

Из (3) найдем $t_2 = \dfrac{v_{2y} + \sqrt{v_{2y}^2 + 2gh}}{g} = 5{,}76$ с, тогда из (2) $S_2 = S_1 + 2v \cdot t_2 = 3220$ м.

9. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

9.1. Под действием постоянной горизонтальной силы $F = 10$ Н движется тело массой $m = 5$ кг. Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}1$. Какую работу совершит сила трения и сила F, когда тело пройдет путь $S = 10$ м?

Ответ: $A_{тр} = -49$ Дж; $A_F = 100$ Дж.

Решение. Работа силы трения отрицательна: $A_{тр} = F_{тр} S \cos\alpha = -\mu m g S$, (угол $\alpha = 180°$); $A_{тр} = -49$ Дж. Работа силы F: $A_F = FS\cos 0° = 100$ Дж.

9.2. Какую работу совершает автомобиль «Жигули» массой 1,3 т после начала движения с места на расстоянии $S = 75$ м пути, если это расстояние автомобиль проходит за 10 с, а коэффициент сопротивления движению равен 0,05?

Ответ: $A = 195$ Дж.

Решение. Работа силы тяги автомобиля $A = F_т S$.

Уравнение движения: $\vec{F}_т + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$. Направляем ось x по ходу движения, получаем проекцию уравнения движения на ось x.

$F_т - F_{тр} = ma$, $F_{тр} = \mu m g$, $F_т = ma + \mu m g$, $A = m(a + \mu g)S$.

Движение равноускоренное без начальной скорости, тогда $a = 2S/t^2$.

$A = m(2S/t^2 + \mu g)S$, $A = 195$ Дж.

9.3. Моторная лодка движется против течения горной реки. Сила тяги мотора $F_т = 2$ кН. Лодка относительно берега остается неподвижной. Скорость течения реки равна 5 м/с. Совершает ли работу сила тяги мотора? Если совершает, то чему она равна за 5 с? Какова мощность мотора?

Ответ: Относительно берега $A = 0$, $P = 0$; относительно реки $A = 50$ кДж, $P = 10$ кВт.

Решение. Работа и мощность силы тяги мотора относительно берега равны нулю $A = 0$, $P = 0$, т. к. перемещение равно нулю.

Относительно течения реки работа силы тяги мотора равна $A = \vec{F}_т \cdot \vec{v} \cdot t$; $A = 50$ кДж; $P = \vec{F}_т \cdot \vec{v} = 10$ кВт — мощность мотора.

9.4. Мощность гидроэлектростанции $P = 73{,}5$ МВт, а КПД $\eta = 0{,}75$. Определить, на какой уровень плотина поднимает воду, если расход воды $Q = 1000\ м^3/с$.

Ответ: $h = 10$ м.

Решение. Работа по подъему воды за 1 с равна ρQgh, где ρ — плотность воды. КПД равен $\eta = \dfrac{P}{\rho Qgh}$, откуда высота, на которую плотина поднимет воду, $h = \dfrac{P}{\eta\rho Qg} = 10$ м.

9.5. Человек перемещает ящик массой $m = 100$ кг по горизонтальной поверхности на расстояние $S = 20$ м с постоянной скоростью, прикладывая силу под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. С какой силой должен действовать человек на ящик и какую он выполняет работу по перемещению ящика, если коэффициент трения ящика о плоскость $\mu = 0{,}15$? Рассмотрите случаи: а) человек толкает ящик; б) человек тянет ящик, прикладывая силу под тем же углом.

Ответ: а) $F_1 = 186$ Н, $A_1 = 3220$ Дж; б) $F_2 = 156$ Н, $A_2 = 2700$ Дж.

Решение. а) Силу, с которой человек толкает ящик, находим, исходя из второго закона Ньютона (см. задачу 5.14):

$\vec{F}_1 + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$, $\vec{a} = 0$, т. к. движение ящика равномерное.

(x): $F_1 \cos\alpha - F_{тр} = 0$;

(y): $N - F_1 \sin\alpha - mg = 0$;

$F_{тр} = \mu N = \mu(F_1 \sin\alpha + mg)$; тогда $F_1 \cos\alpha - \mu(F_1 \sin\alpha + mg) = 0$;

$F_1 = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$; $F_1 = 186$ Н. Работа этой силы на пути S равна $A_1 = F_1 S\cos\alpha = \dfrac{\mu mgS\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \dfrac{\mu mgS}{1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}$; $A_1 = 3220$ Дж.

б) Если человек тянет ящик, то уравнения движения в проекциях имеют вид:

(x): $F_2 \cos\alpha - F_{тр} = 0$;

(y): $N + F_2 \sin\alpha - mg = 0$;

$F_{тр} = \mu N = \mu(mg - F_2 \sin\alpha)$, откуда $F_2 = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$; $F_2 = 156$ Н.

Работа в этом случае равна

$A_2 = F_2 S\cos\alpha = \dfrac{\mu mgS\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \dfrac{\mu mgS}{1 + \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}$; $A_1 = 2700$ Дж.

9.6. Автомобиль массой $M = 1$ т трогается с места и, двигаясь равноускоренно, проходит путь $S = 20$ м за $t = 2$ с. Какую мощность развивает автомобиль?

Ответ: $P = 200$ кВт.

Решение. Мощность двигателя автомобиля $P = \vec{F}_т \cdot \vec{v}$.

$F_т = ma$; $S = \dfrac{at^2}{2}$; $a = \dfrac{2S}{t^2}$; $F_т = m\dfrac{2S}{t^2}$; $v = at = \dfrac{2S}{t^2}t$; тогда

$P = m\dfrac{2S}{t^2}\dfrac{2S}{t^2}t = \dfrac{4mS^2}{t^3} = 200$ кВт.

9.7. Трактор массой $m = 10$ т, развивающий мощность $N = 150$ кВт, поднимается в гору со скоростью $v = 5$ м/с. Найдите угол α наклона горы к горизонту.

Ответ: $\alpha = 18°$.

Решение. Мощность трактора $P = \vec{F}_т \cdot \vec{v}$, $F_т = mg\sin\alpha$;

$P = mgv\sin\alpha$; $\alpha = \arcsin\dfrac{P}{mgv}$; $\alpha = 18°$.

9.8. Транспортер поднимает массу $m = 200$ кг песка на автомашину за время $t = 1$ с. Длина его ленты $l = 3$ м, угол наклона ее к горизонту $\alpha = 30°$. КПД транспортера $\eta = 0{,}85$. Найдите мощность P, развиваемую его электродвигателем.

Ответ: $P = 3{,}46$ кВт.

Решение. Полезная работа, выполненная двигателем транспортера, $A_п = mgh = mgl\sin\alpha$. При этом полная работа электродвигателя $A_{полн} = P \cdot t$. Тогда $\eta = \dfrac{A_п}{A_{полн}} = \dfrac{mgl\sin\alpha}{Pt}$, откуда мощность, развиваемая электродвигателем, $P = \dfrac{mgl\sin\alpha}{\eta t}$; $P = 3{,}46$ кВт.

9.9. Моторы электровоза при движении его со скоростью $v = 72$ км/ч потребляют мощность $P = 800$ кВт. КПД силовой установки $\eta = 0,8$. Определите силу тяги моторов.

Ответ: $F_т = 32$ кН.

Решение. $\eta = \frac{F_т v}{P}$; $F_т = \frac{\eta P}{v}$; $F_т = 32$ кН.

9.10. По канатной железной дороге, идущей с углом наклона $\alpha = 45°$ к горизонту, поднимается вагонетка массой $m = 500$ кг. Найдите работу, которую совершает мотор подъемника, при подъятии вагонетки на высоту $h = 10$ м, если коэффициент трения равен $\mu = 0,1$.

Ответ: $A = 54$ кДж.

Решение. Уравнение движения вагонетки $F_т - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0$, где $F_т = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ — сила тяги мотора подъемника, $\mu mg\cos\alpha$ — сила трения.

Работа равна $A = F_т \cdot l$, где $l = \frac{h}{\sin\alpha}$ — длина пути, пройденного вагонеткой. $A = mgh(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)/\sin\alpha = mgh(1 + \mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)$; $A = 54$ кДж.

9.11. Доска массой $m = 3$ кг и длиной $l = 1$ м лежит на расстоянии x от двух соприкасающихся полуплоскостей из разных материалов (рис. 9.1). Какую работу надо совершить, чтобы передвинуть доску на вторую полуплоскость, в случаях:

1) $x = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 0,1$; 2) $x = 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0,1$; 3) $x = 10$ см, $\mu_1 = 0,1$, $\mu_2 = 0,2$?

Ответ: 1) $A = 2,94$ Дж; 2) $A = 1,47$ Дж; 3) $A = 4,7$ Дж.

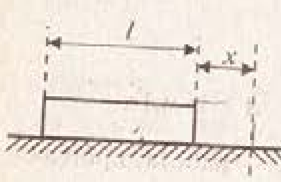


Рис. 9.1

Решение. 1) Если коэффициент трения постоянная величина, то сила трения также постоянная величина: $F_{тр} = \mu mg$ и работа этой силы $A = 2,94$ Дж.

2) Когда доска передвигается на полуплоскость с $\mu_2 = 0,1$, происходит постепенное увеличение силы давления доски от нуля до максимального значения, равного силе тяжести mg доски. Тогда на доску действует средняя сила трения $F_{тр} = \frac{1}{2}\mu_2 mg$. Работа этой силы $A = \frac{1}{2}\mu_2 mg$; $A = 1,47$ Дж.

3) При передвижении по первой полуплоскости $F_{1тр} = \mu_1 mg$, по второй полуплоскости $F_{2тр} = \frac{1}{2}\mu_1 mg + \frac{1}{2}\mu_2 mg = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)mg$.

Тогда работа по передвижению доски на вторую полуплоскость равна $A = A_1 + A_2 = \mu_1 mgx + \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)mgl$; $A = 4,7$ Дж.

9.12. Какая работа произведена при сжатии буферной пружины железнодорожного вагона на $l_1 = 5$ см, если для сжатия пружины на $l_2 = 1$ см требуется сила $F = 30$ кН?

Ответ: $A = 3,75$ кДж.

Решение. По закону Гука $F = kl_2$; $k = \frac{F}{l_2}$.

Работа по сжатию пружины $A = \frac{kl_1^2}{2} = \frac{Fl_1^2}{2l_2}$; $A = 3,75$ кДж.

9.13. На горизонтальной плоскости лежит груз массой $m = 100$ г на расстоянии x от пружины жесткостью $k = 100$ Н/м (рис. 9.2). Коэффициент трения μ между телом и плоскостью. Какую работу надо совершить, чтобы передвинуть груз на $x_0 = 3$ см, в случаях: 1) $x = 0$, $\mu = 0$; 2) $x = 1$ см, $\mu = 0,1$?

Ответ: 1) $A = 45$ мДж;
2) $A = 23$ мДж.

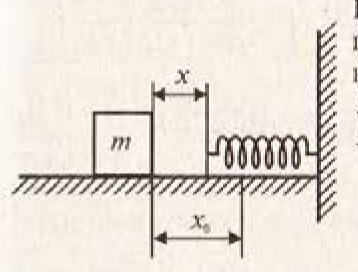


Рис. 9.2

Решение. $A = FS\cos\alpha$; $\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$. $F = k\Delta x$, где Δx — величина деформации, $\Delta x = x_0 - x$, сила изменяется в зависимости от величины смещения пропорционально смещению от $F = 0$ до $F = k\Delta x$, поэтому следует брать среднее значение силы $F_{ср} = \frac{k\Delta x}{2}$.

1) $x = 0$, $\mu = 0$ (рис. 9.2); $A = F_{ср}x_0 = \frac{kx_0^2}{2}$; $A = 45$ мДж.

2) $x = 1$ см, $\mu = 0,1$, $A = A_1 + A_2$; $A_1 = \mu mgx_0$ — работа, произведенная против силы трения;

$$A_2 = \frac{k(x_0 - x)^2}{2}$$ — работа по сжатию пружины.

$$A = \mu mgx_0 + \frac{k(x_0 - x)^2}{2}; \quad A = 23 \text{ мДж}.$$

9.14. К лежащему на горизонтальной поверхности бруску массой $m = 12$ кг прикреплена пружина жесткостью $k = 300$ Н/м (рис. 9.3). Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0,4$. Вна-

чале пружина не деформирована. Затем, приложив к свободному концу пружины силу, направленную под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, медленно переместили брусок на расстояние $S = 0,4$ м. Какая работа при этом была совершена? (Колебаний не происходит.)

Ответ: $A = 19$ Дж.

Решение. $A = A_1 + A_2$; A_1 — работа по растяжению пружины.

$$A_1 = \frac{kx^2}{2};\ F = kx;\ x = \frac{F}{k};\ A_1 = \frac{F^2}{2k}.$$

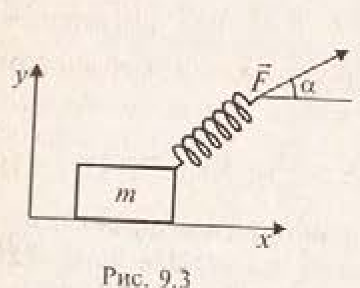


Рис. 9.3

$A_2 = FS\cos\alpha$ — работа по передвижению груза. Брусок движется равномерно: $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0$;

(x): $F\cos\alpha - F_{тр} = 0$;

(y): $N + F\sin\alpha - mg = 0$;

$F_{тр} = \mu N$; $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$.

$$A = A_1 + A_2 = \frac{F^2}{2k} + FS\cos\alpha = \frac{(\mu mg)^2}{2k(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2} + \frac{\mu mgS}{1 + \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha};\ A = 19\text{ Дж}.$$

9.15. Какую работу нужно совершить, чтобы пружину жесткостью $k = 600$ Н/м, растянутую на $x = 4$ см, дополнительно растянуть на $\Delta x = 10$ см?

Ответ: $A = 5,4$ Дж.

Решение. Работа внешних сил, совершенная при растяжении пружины, равна изменению ее потенциальной энергии:

$$A = W_{п_2} - W_{п_1} = \frac{k(x+\Delta x)^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{k(2x+\Delta x)\Delta x}{2};\ A = 5,4\text{ Дж}.$$

9.16.* На горизонтальном участке пути локомотив развивает постоянную силу тяги $F = 350$ кН. На участке пути длиной $l = 600$ м скорость поезда возрастает с $\upsilon_1 = 10$ м/с до $\upsilon_2 = 20$ м/с. Определите коэффициент трения, если масса поезда $m = 10^6$ кг.

Ответ: $\mu = 0,01$.

Решение. Согласно теореме о кинетической энергии

$\dfrac{m\upsilon_2^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_1^2}{2} = A + A_{тр}$, где $A = Fl$ — работа силы тяги,

$A_{тр} = F_{тр} l\cos 180° = -\mu mgl$.

Тогда $\dfrac{m\upsilon_2^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_1^2}{2} = Fl - \mu mgl$, откуда $\mu = \dfrac{F}{mg} - \dfrac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2gl}$; $\mu = 0,01$.

9.17. Тормозной путь автомобиля, двигавшегося со скоростью $u_1 = 10$ м/с, равен $S_1 = 7,2$ м. Чему будет равен тормозной путь, если скорость автомобиля возрастет до $u_2 = 20$ м/с?

Ответ: $S_2 = 20$ м.

Решение. По теореме о кинетической энергии $\dfrac{m\upsilon_2^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_1^2}{2} = A_{тр}$, где в первом случае $\upsilon_2 = 0$, $\upsilon_1 = u_1$, $A_{тр_1} = -F_{тр}S_1$. Во втором случае $\upsilon_2 = 0$, $\upsilon_1 = u_2$, $A_{тр_2} = -F_{тр}S_2$. Сила трения в первом и во втором случаях одинакова $F_{тр} = \mu mg$.

$$-\frac{mu_1^2}{2} = -F_{тр}S_1; \qquad (1)$$

$$-\frac{mu_2^2}{2} = -F_{тр}S_2; \qquad (2)$$

Разделим (1) на (2). В результате получим $S_2 = S_1\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)^2$; $S_2 = 20$ м.

9.18. Шофер автомобиля, едущего со скоростью υ, внезапно увидел перед собой на расстоянии l широкую стену. Что ему выгоднее: затормозить или повернуть?

Ответ: Выгоднее тормозить, чем поворачивать.

Решение. Если шофер затормозит, автомобиль остановится, когда его кинетическая энергия израсходуется на работу против силы трения. При повороте автомобиля та же сила трения будет играть роль центростремительной силы, заставляющей автомобиль двигаться по дуге окружности.

В случае торможения: $\dfrac{m\upsilon^2}{2} = F_{тр}x$, где $F_{тр}$ — сила трения, x — путь, который пройдет автомобиль после включения тормоза. Отсюда $x = \dfrac{m\upsilon^2}{2F_{тр}}$. Очевидно, чтобы автомобиль не разбился, должно быть: $x = \dfrac{m\upsilon^2}{2F_{тр}} \le l$ или $F_{тр} \ge \dfrac{m\upsilon^2}{2l}$. В случае поворота: $F_{тр} = \dfrac{m\upsilon^2}{R}$, и чтобы автомобиль не разбился, должно быть: $R \le l$, т. е. $F_{тр} \ge \dfrac{m\upsilon^2}{l}$.

Для того, чтобы избежать столкновения со стеной, при торможении нужна сила трения, вдвое меньше, чем при повороте. Очевидно, выгоднее тормозить, чем поворачивать.

9.19. На горизонтальном участке пути $S = 2$ км скорость электровоза возросла с $\upsilon_1 = 54$ км/ч до $\upsilon_2 = 72$ км/ч. Определить выполненную при этом работу и среднюю мощность, развиваемую при этом двигателями, если масса поезда $m = 800$ т, коэффициент трения $\mu = 0,005$.

Ответ: $A = 148$ МДж, $P = 1,3$ МВт.

Решение. По теореме о кинетической энергии $\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A + A_{тр}$, где A — работа, выполненная мотором, $A_{тр} = -\mu mgS$ — работа силы трения. Тогда $A = \frac{m}{2}(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) + \mu mgS = mg\left(\frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2g} + \mu S\right)$; $A = 148$ МДж.

Средняя мощность $P = \frac{A}{t}$.

Найдем $t = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{a}$; $a = \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2S}$; тогда $t = \frac{(\upsilon_2 - \upsilon_1)2S}{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2} = \frac{2S}{\upsilon_2 + \upsilon_1}$; отсюда $P = mg\left(\frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2g} + \mu S\right)\left(\frac{\upsilon_2 + \upsilon_1}{2S}\right)$; $P = 1,3$ МВт.

9.20. Самолет массой $m = 5$ т летел горизонтально с постоянной скоростью $\upsilon_1 = 360$ км/ч. Затем поднялся на 2 км выше, при этом его скорость снизилась до $\upsilon_2 = 200$ км/ч. Найдите работу, затраченную двигателем на подъем самолета.

Ответ: $A = 81$ МДж.

Решение. Изменение полной энергии самолета равно работе силы тяги самолета $A = W_2 - W_1$; $W_2 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh$; $W_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2}$;

$$A = \frac{m}{2}(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 + 2gh);\quad A = 81 \text{ МДж}.$$

9.21. На тело массой $m = 10$ кг действует постоянная сила $F = 5$ Н. Определите кинетическую энергию тела через $t = 2$ с после начала движения. Сопротивлением пренебречь.

Ответ: $W_k = 5$ Дж.

Решение. $W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$; $(p - p_0) = Ft$, $p_0 = 0$ — начальный импульс тела, $p = m\upsilon$ — импульс через время t. $m\upsilon = Ft$; $\upsilon = \frac{Ft}{m}$; откуда $W_k = \frac{F^2t^2}{2m}$; $W_k = 5$ Дж.

9.22. Металлический шарик массой $m = 100$ г равномерно движется в горизонтальной плоскости по окружности радиусом $R = 50$ см с частотой $n_1 = 3\,с^{-1}$. Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить частоту до $n_2 = 5\,с^{-1}$?

Ответ: $A = 7,9$ Дж.

Решение. Изменение кинетической энергии шарика равно работе по увеличению частоты вращения $\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A$; $\upsilon = \omega R = 2\pi nR$; $A = 2\pi^2 R^2 m(n_2^2 - n_1^2) = 7,9$ Дж.

9.23. Определите кинетическую энергию колеса, движущегося без проскальзывания со скоростью $\upsilon = 5$ м/с. Масса колеса $m = 2$ кг сосредоточена в ободе.

Ответ: $W_k = 50$ Дж.

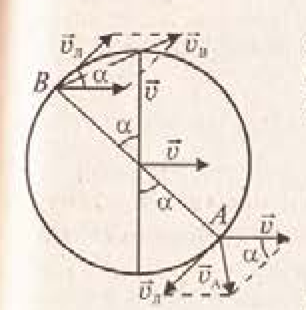


Рис. 9.4

Решение. См. задачу 4.16. Скорости элементов массы обруча Δm, находящихся на противоположных концах диаметра (рис. 9.4), равны:

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_Л^2 + \upsilon^2 - 2\upsilon_Л\upsilon\cos\alpha} = 2\upsilon\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_Л^2 + \upsilon^2 + 2\upsilon_Л\upsilon\cos\alpha} = 2\upsilon\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Суммарная кинетическая энергия этих элементов массы равна

$$\Delta W_k = \frac{\Delta m\upsilon_A^2}{2} + \frac{\Delta m\upsilon_B^2}{2} = 2\Delta m\upsilon^2.$$

Отсюда видно, что ΔW_k не зависит ни от радиуса, ни от угла α, тогда кинетическая энергия всего обруча равна $W_k = m\upsilon^2$; $W_k = 50$ Дж.

9.24. Какую работу надо совершить, чтобы перевернуть вокруг ребра куб массой $m = 200$ кг? Ребро куба $a = 1$ м.

Ответ: $A = 400$ Дж.

Решение. Работа по переворачиванию куба равна изменению потенциальной энергии куба $A = W_{п_2} - W_{п_1} = mg(h_2 - h_1)$ (рис. 9.5).

Здесь уровень нулевой потенциальной энергии совпадает с плоскостью CB. h_1 и h_2 — высоты, на которых находится центр тяжести куба в положении 1 и 2. $h_1 = \frac{a}{2}$; $h_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$; тогда $A = \frac{1}{2}mga(\sqrt{2} - 1) = 400$ Дж.

Рис. 9.5

9.25. Какой минимальной скоростью должна обладать перед ударом о небольшой выступ треугольная призма со стороной $a = 17$ см, чтобы она могла перевернуться на другую грань?

Ответ: $v = 0,98$ м/с.

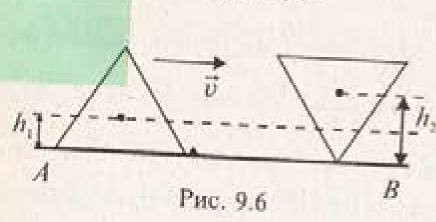


Рис. 9.6

Решение. Внешние силы на призму не действуют, поэтому выполняется закон сохранения полной механической энергии (рис. 9.6): $\frac{mv^2}{2} + mgh_1 = mgh_2$, где $h_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ — начальная высота центра тяжести призмы относительно нулевого уровня потенциальной энергии AB. $h_2 = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ — максимальная высота подъема центра тяжести при переворачивании.

Тогда $v = \sqrt{g(h_2 - h_1)} = \sqrt{ag/\sqrt{3}} = 0,98$ м/с.

9.26. Телеграфный столб длиной $L = 7$ м и массой $M = 140$ кг при установке перемещается из горизонтального положения в вертикальное. Какая при этом совершается работа?

Ответ: $A = 4,8$ кДж.

Решение. Работа внешних сил по подъему столба равна приращению его потенциальной энергии. Нулевой уровень – уровень земли. В начальном положении можно считать, что положение центра тяжести практически совпадает с нулевым уровнем $W_{п_1} = 0$. Когда столб поднят, центр тяжести находится на высоте $L/2$; $W_{п_2} = mgL/2$.

$$A = W_{п_2} - W_{п_1} = mgL/2; \quad A = 4,8 \text{ кДж}.$$

9.27. Камень массой $m = 20$ г, выпущенный вертикально вверх из рогатки, резиновый жгут которой был растянут на $\Delta l = 20$ см, поднялся на высоту $h = 40$ м. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите коэффициент упругости жгута.

Ответ: $k = 392$ Н/м.

Решение. Полная механическая энергия системы сохраняется. Тогда $\frac{k(\Delta l)^2}{2} = mgh$, т. е. потенциальная энергии жгута в растянутом состоянии равна потенциальной энергии камня в верхней точке траектории. $k = \frac{2mgh}{(\Delta l)^2} = 392$ Н/м.

9.28. Тело брошено под углом к горизонту со скоростью v_0. Пользуясь законом сохранения механической энергии, определите скорость тела на высоте h над горизонтом.

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$.

Решение. По закону сохранения полной механической энергии (потенциальная энергия равна нулю на уровне земли):

$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2}$; $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ — скорость камня на высоте h.

9.29. Камень брошен под углом к горизонту с высоты h с начальной скоростью v_0. С какой скоростью камень упадет на поверхность земли? Решите без применения кинематических уравнений.

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

Решение. Нулевой уровень потенциальной энергии на земле. Исходя из закона сохранения энергии, $mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ — скорость, с которой камень упадет на землю.

9.30. Определите кинетическую энергию тела массой 1 кг, брошенного горизонтально со скоростью 20 м/с, в конце четвертой секунды движения.

Ответ: $W_k = 970$ Дж.

Решение. Нулевой уровень потенциальной энергии выбираем на уровне нахождения тела в конце четвертой секунды движения. Тогда, согласно закону сохранения механической энергии, $mgh + \frac{mv_0^2}{2} = W_k$, где $h = \frac{gt^2}{2}$; $t = 4$ с; $v_0 = 20$ м/с.

Кинетическая энергия тела в конце четвертой секунды движения $W_k = \frac{mg^2t^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(g^2t^2 + v_0^2)$; $W_k = 970$ Дж.

9.31. Камень брошен под углом к горизонту со скоростью v_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, на какой высоте скорость камня уменьшится вдвое.

Ответ: $h = 3v_0^2/8g$.

Решение. $W_п = 0$ на уровне земли. Закон сохранения механической энергии имеет вид: $\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2}$; $v = \frac{v_0}{2}$; $\frac{v_0^2}{2} = gh + \frac{v_0^2}{8}$;

$h = \frac{3v_0^2}{8g}$ — высота, на которой скорость камня уменьшится вдвое.

9.32. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 20$ м/с. На какой высоте от точки бросания кинетическая энергия тела равна его потенциальной энергии?

Ответ: $h = 10,2$ м.

Решение. По закону сохранения механической энергии $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh$. По условию $\frac{mv^2}{2} = mgh$, тогда $\frac{mv_0^2}{2} = 2mgh$; $h = \frac{v_0^2}{4g}$; $h = 10,2$ м.

9.33. Тело, брошенное вертикально вверх, упало обратно через 4 с после начала движения. Определите кинетическую энергию в момент падения и потенциальную энергию в верхней точке, если масса тела 200 г.

Ответ: $W_k = W_п = 38$ Дж.

Решение самостоятельное.

9.34. Нить с подвешенным к ней грузом отклонили на угол α и отпустили. На какой угол β отклонится нить с грузом, если при своем движении она будет задержана штифтом, поставленным на вертикали, посредине нити?

Ответ: $\beta = \arccos(2\cos\alpha - 1)$.

Решение. Потенциальная энергия равна нулю на уровне равновесного положения шарика (рис. 9.7).

α, β, h_1, h_2, $W_п = 0$

Рис. 9.7

По закону сохранения энергии $W_{п_1} = W_{п_2}$; $W_{k_1} = W_{k_2} = 0$;

$mgh_1 = mgh_2$; $h_1 = h_2$;

$l(1 - \cos\alpha) = \frac{l}{2}(1 - \cos\beta)$;

$\cos\beta = 2\cos\alpha - 1$; $\beta = \arccos(2\cos\alpha - 1)$.

9.35. Круглая яма, радиус которой $R = 3$ м и глубина $h = 5$ м, наполовину заполнена водой. Насос выкачивает воду через трубу радиусом $r = 5$ см. Какую работу совершил насос, если он выкачал всю воду на поверхность земли за время $\tau = 1$ ч?

Ответ: $A = 800$ МДж.

Решение. Выполненная работа равна изменению полной механической энергии воды $A = \left(W_{k_2} + W_{п_2}\right) - \left(W_{k_1} + W_{п_1}\right)$. (1)

Если потенциальную энергию отсчитывать от дна ямы, то в начальном состоянии центр тяжести воды находится на высоте $h/4$, а в конечном — на высоте h. Тогда потенциальная энергия воды в начальном и конечном состоянии: $W_{п_1} = mg\frac{h}{4}$; $W_{п_2} = mgh$. (2)

Кинетическая энергия, соответственно: $W_{k_1} = 0$, $W_{k_2} = \frac{mv^2}{2}$. (3)

Масса воды $m = \rho\pi R^2\frac{h}{2}$ (ρ — плотность воды). С другой стороны, $m = \rho\pi r^2 v\tau$; $\rho\pi R^2\frac{h}{2} = \rho\pi r^2 v\tau$, откуда $v = \frac{R^2 h}{2r^2\tau}$. (4)

Из (1)—(4) получим $A = \frac{mv^2}{2} + mgh - mg\frac{h}{4} = \frac{1}{8}\rho\pi R^2 h^2\left(\frac{R^4 h}{2r^4\tau^2} + 3g\right)$;

$A = 800$ МДж.

9.36. Однородная цепочка длины l и массы m лежит на абсолютно гладкой доске. Небольшая часть цепочки свешивается с доски. Лежащий на доске конец цепочки придерживают, а затем отпускают, и цепочка соскальзывает со стола под действием силы тяжести. Найдите скорость движения (и ускорение) цепочки, когда длина ее свешивающейся части равна $x\left(x < \frac{l}{2}\right)$.

Ответ: $v = x\sqrt{g/l}$, $a = gx/l$.

Решение. Нулевой уровень потенциальной энергии выбираем на уровне доски. Тогда потенциальная энергия цепочки, лежащей полностью на доске, равна нулю: $W_{п_1} = 0$. Масса свешивающейся части цепочки равна $\frac{mgx}{l}$. Потенциальная энергия свешивающейся части цепочки $W_{п_2} = -\frac{mgx}{l}\cdot\frac{x}{2} = -\frac{mgx^2}{2l}$ (центр тяжести цепочки находится на расстоянии $\frac{x}{2}$ от доски).

На основании закона сохранения энергии $\frac{mv^2}{2}-\frac{mgx^2}{2l}=0$, откуда $v=x\sqrt{g/l}$. Ускорение в этот же момент времени находим из второго закона Ньютона: $ma=\frac{m}{l}gx$, следовательно, $a=\frac{gx}{l}$.

9.37. Пуля, летящая со скоростью 400 м/с, попадает в вал и проходит до остановки 0,5 м. Определите силу сопротивления вала движению пули, если ее масса 24 г.

Ответ: $F_c \approx 3{,}8$ кН.

Решение. Работа силы сопротивления $A_c = F_c S\cos\alpha$. Проведем ось x в направлении движения пули.

Так как $\alpha=\pi$, то $\cos\alpha=-1$, тогда $A_c=-F_cS$.

По закону о кинетической энергии $A=W_{k_2}-W_{k_1}$.

По условию $W_{k_2}=0$ (пуля остановилась), а $W_{k_1}=\frac{mv_0^2}{2}$.

Тогда получаем $-F_cS=-\frac{mv_0^2}{2}$, откуда $F_c=\frac{mv_0^2}{2S}$; $F_c\approx 3{,}8$ кН.

9.38. Пуля массой $m=7$ г подлетает к доске толщиной $d=3$ см со скоростью $v_0=400$ м/с и, пробив доску, вылетает из нее со скоростью $v=200$ м/с. Найдите среднюю силу сопротивления доски F.

Ответ: $F_c=14$ кН.

Решение. По теореме о кинетической энергии изменение кинетической энергии равно работе силы сопротивления:

$W_{k_2}-W_{k_1}=A_c$; $\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-F_c\cdot d$;

$F_c=m\left(v_0^2-v^2\right)/2d=14$ кН.

9.39. Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. В какой по счету доске застрянет пуля, если после прохождения первой доски скорость пули уменьшилась на 20%?

Ответ: В третьей доске.

Решение. Согласно теореме о кинетической энергии, после того как пуля пробила первую доску, $W_{k_1}-W_{k_0}=A_c$; $\frac{m(kv_0)^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A_c$,

где $k=1-0{,}2=0{,}8$; kv_0 — скорость пули после прохождения первой доски.

Когда пуля застряла в n-той доске, за счет кинетической энергии была выполнена работа по преодолению силы сопротивления

$A=-nA_c$. $\frac{mv_0^2}{2}=-nA_c$; $\frac{mv_0^2}{2}=-n\left(\frac{m(0{,}8v_0)^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}\right)$; $n=2{,}7$, пуля застряла в третьей доске.

9.40. Тело массой $m=100$ г, брошенное вертикально вниз с высоты $h=20$ м со скоростью $v_1=10$ м/с, упало на землю со скоростью $v_2=20$ м/с. Найти работу по преодолению сопротивления воздуха.

Ответ: $A=4{,}6$ Дж.

Решение. Изменение полной энергии тела равно работе силы сопротивления $W_2-W_1=A_c$. Работа по преодолению силы сопротивления $A=-A_c$, т. е. $W_1-W_2=A$.

$\left(W_{k_1}+W_{п_1}\right)-\left(W_{k_2}-W_{п_2}\right)=A$;

$W_{k_1}=\frac{mv_1^2}{2}$; $W_{п_1}=mgh$; $W_{k_2}=\frac{mv_2^2}{2}$; $W_{п_2}=0$.

Нулевой уровень потенциальной энергии — уровень земли.

$A=\frac{mv_1^2}{2}+mgh-\frac{mv_2^2}{2}=\frac{m}{2}\left[\left(v_1^2-v_2^2\right)+2gh\right]=4{,}6$ Дж.

9.41. Тело, брошенное с высоты $H=150$ м вертикально вниз со скоростью $v=10$ м/с, погрузилось в грунт на глубину $h=10$ см. Найдите силу сопротивления F грунта, если масса тела $m=1$ кг.

Ответ: $F_c=16{,}2$ кН.

Решение. Изменение полной энергии тела равно работе силы сопротивления. Потенциальная энергия отсчитывается от уровня, на котором остановилось тело в земле.

$\left(W_{k_2}+W_{п_2}\right)-\left(W_{k_1}+W_{п_1}\right)=A_c$;

$W_{k_2}=0$; $W_{п_2}=0$; $W_{k_1}=\frac{mv^2}{2}$; $W_{п_1}=mg(H+h)$.

Тогда: $-\left[\frac{mv^2}{2}+mg(H+h)\right]=-F_ch$, откуда сила сопротивления

$F_c=m\left[v^2+2g(H+h)\right]/2h=16{,}2$ кН.

9.42. Найдите скорость вылета снаряда из пружинного пистолета массой m при выстреле вертикально вверх, если жесткость пружины равна k, а сжатие равно x.

Ответ: $v=\sqrt{x(kx-2mg)/m}$.

Решение. Сжатая пружина обладает потенциальной энергией, которая расходуется на совершение работы по преодолению силы тяжести снаряда и сообщение ему кинетической энергии.

$F_{упр} = -kx$; $W_п = kx^2/2$; $kx^2/2 = mgx + mv^2/2$; $v = \sqrt{x(kx-2mg)/m}$.

9.43. Пружина жесткостью $k = 100$ кН/м и массой $m = 400$ г падает с высоты $h = 5$ м. На сколько сожмется пружина, если при ударе ее ось остается вертикальной?

Ответ: $x = 2$ см.

Решение. По закону сохранения энергии

$$mgh = \frac{kx^2}{2};\ x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}};\ x = 2\text{ см}.$$

9.44. В закрепленную вертикальную трубку вставлена невесомая пружина, верхний конец которой прикреплен к подвижному поршню массой M. Нижний конец пружины упирается в дно трубки. Пружина сжата до длины l и удерживается в сжатом состоянии с помощью защелки. На поршень положили шарик массой m. На какую высоту подскочит шарик, если освободить пружину, сдвинув защелку? Пружина в недеформированном состоянии имеет длину L. Жесткость пружины k. Трением пренебречь (рис. 9.8).

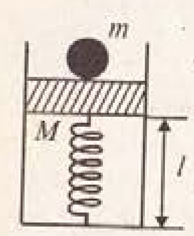


Рис. 9.8

Ответ: $h = k(L-l)^2/2g(M+m)$.

Решение. По закону сохранения энергии $\frac{k(L-l)^2}{2} = \frac{(M+m)u^2}{2}$, $u^2 = \frac{k(L-l)^2}{M+m}$, где $(L-l)$ — величина деформации пружины; u — скорость, которую получили поршень и шарик.

Высота, на которую подскочит шарик, $h = \frac{u^2}{2g} = \frac{k(L-l)^2}{2g(M+m)}$.

9.45. Груз массой $m = 5$ кг падает с высоты $h = 0{,}5$ м на легкую подставку, прикрепленную к пружине жесткостью $k = 700$ Н/м. Определите максимальное смещение пружины x (колебаний нет).

Ответ: $x = 34$ см.

Решение. Нулевой уровень потенциальной энергии отсчитывается от нижнего положения груза (пружина сжата, рис. 9.9). Согласно закону сохранения энергии $mg(h+x) = \frac{kx^2}{2}$;

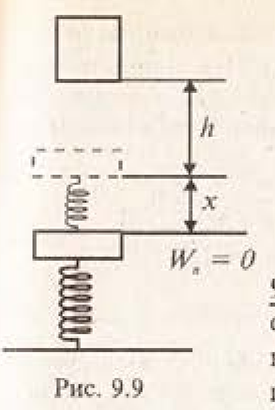


Рис. 9.9

$$\frac{kx^2}{2} - mgx - mgh = 0;$$

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mg}{k}h = 0;$$

$$x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}};\ x = 34\text{ см}.$$

9.46. Тело массой M налетает на две последовательно соединенные пружины, жесткости которых k_1 и k_2. Максимальная энергия деформации пружины 2 оказалась равной E. Определите начальную скорость тела v (рис. 9.10).

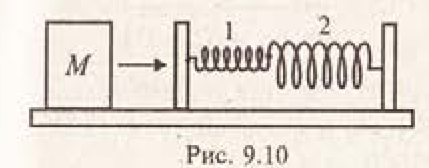


Рис. 9.10

Ответ: $v = \sqrt{2E(k_1+k_2)/k_1M}$.

Решение. По закону сохранения энергии $\frac{Mv^2}{2} = \frac{k_1x_1^2}{2} + E$, (1)

x_1 — деформация первой пружины.

Силы, действующие на каждую пружину, одинаковы:

$F = k_1x_1 = k_2x_2$, тогда $E = \frac{k_2x_2^2}{2} = \frac{k_2^2x_2^2}{2k_2} = \frac{F^2}{2k_2}$; $F = \sqrt{2k_2E} = k_1x_1$;

$x_1 = \frac{\sqrt{2k_2E}}{k_1}$. Из (1) следует $\frac{Mv^2}{2} = \frac{k_1 2k_2E}{2k_1^2} + E$; $v = \sqrt{\frac{2E(k_1+k_2)}{k_1M}}$.

9.47. Деревянный поршень прикреплен к цилиндру с помощью невесомой пружины жесткостью k. При движении поршня между ним и цилиндром возникает сила трения F. Пуля, летящая со скоростью v вдоль оси цилиндра, попадает в поршень и застревает в нем. На сколько при этом сместится поршень? Масса пули m, поршня M. Цилиндр закреплен (рис. 9.11).

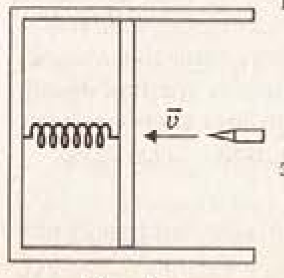


Рис. 9.11

Ответ:

$x = -F/k + \sqrt{(F/k)^2 + m^2v^2/k(m+M)}$.

Решение. Изменение полной механической энергии системы равно работе силы трения: $W_2 - W_1 = A_{тр}$; $W_2 = W_{п_2}$; $W_1 = W_{k_1}$;

$$\frac{kx^2}{2} - \frac{(m+M)u^2}{2} = -Fx; \quad (1)$$

где x — смещение поршня с пулей, u — скорость движения поршня с пулей после абсолютно неупругого удара. Эту скорость найдем, исходя из закона сохранения импульса: $mv = (m+M)u$, $u = \frac{mv}{m+M}$. Тогда (1) имеет вид: $\frac{kx^2}{2} + Fx - \frac{m^2v^2}{2(m+M)} = 0$,

откуда $x = -\frac{F}{k} + \sqrt{\left(\frac{F}{k}\right)^2 + \frac{m^2v^2}{k(m+M)}}$.

9.48. Груз начинает скользить с начальной скоростью v_0 вверх по наклонной плоскости, имеющей длину l и высоту h. Коэффициент трения равен μ. Какой путь S пройдет тело до остановки?

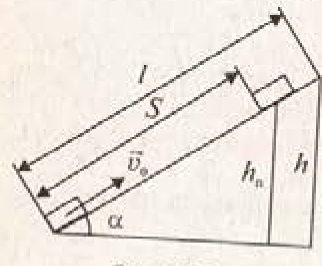


Рис. 9.12

Ответ: $S = \frac{v_0^2 l}{2g\left(h + \mu\sqrt{l^2 - h^2}\right)}$.

Решение. Изменение полной механической энергии груза равно работе силы трения $W_2 - W_1 = A_{тр}$;

$$\left(W_{k_2} + W_{п_2}\right) - \left(W_{k_1} + W_{п_1}\right) = A_{тр}; \qquad (1)$$

$W_{k_2} = 0$; $W_{п_2} = mgh_п$, где $h_п$ — высота максимального подъема тела; $W_{k_1} = mv_0^2/2$; $W_{п_1} = 0$ — нулевой уровень потенциальной энергии выбираем у основания наклонной плоскости.

Тогда из (1) получим $mgh_п - \frac{mv_0^2}{2} = A_{тр}$.

$A_{тр} = F_{тр}S \cdot \cos 180° = -\mu mgS\cos\alpha$; $h_п = S\sin\alpha$ (рис. 9.12).

$\frac{mv_0^2}{2} = mgS\sin\alpha + \mu mgS\cos\alpha$; $S = v_0^2/2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$;

$\sin\alpha = \frac{h}{l}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$; $S = \frac{v_0^2 l}{2g\left(h + \mu\sqrt{l^2 - h^2}\right)}$.

9.49. Тело соскальзывает с наклонной плоскости высотой $h = 2$ м и углом наклона $\alpha = 45°$. Определите коэффициент трения между телом и плоскостью, если известно, что у основания скорость тела была равна $v = 6$ м/с. Чему равен КПД наклонной плоскости?

Ответ: $\mu = 0{,}082$; $\eta = 0{,}92$.

Решение. Изменение полной механической энергии равно работе силы трения: $\left(W_{п_2} + W_{k_2}\right) - \left(W_{п_1} + W_{k_1}\right) = A_{тр}$; (1)

$W_{п_2} = 0$, нулевой уровень потенциальной энергии у основания наклонной плоскости, $W_{k_2} = \frac{mv^2}{2}$; $W_{п_1} = mgh$; $W_{k_1} = 0$;

$A_{тр} = -\mu mgl\cos\alpha$, где $l = \frac{h}{\sin\alpha}$ — длина наклонной плоскости.

Тогда из (1) $\frac{mv^2}{2} - mgh = -\mu mg\frac{l}{\operatorname{tg}\alpha}$; откуда $\mu = \operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{v^2}{2gh}\right)$;

$\mu = 0{,}082$. Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{mgh - F_{тр}l}{mgh} = 1 - \frac{\mu mgl\cos\alpha}{mgh} = 1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{v^2}{2gh}\right)mgl\cos\alpha}{mgh} = \frac{v^2}{2gh};$$

$\eta = 0{,}92$.

9.50. С ледяной горы высотой $h = 1$ м и основанием $b = 5$ м съезжают санки, которые останавливаются, пройдя горизонтальный путь, равный $l = 95$ м (рис. 9.13). Найдите коэффициент трения и КПД.

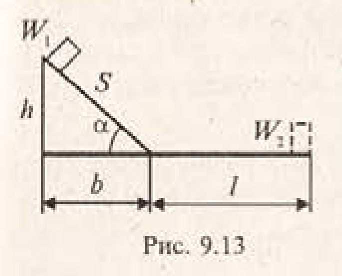


Рис. 9.13

Ответ: $\mu = 0{,}01$; $\eta = 0{,}95$.

Решение. См. задачу 9.49.

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{тр_1} + A_{тр_2}; \qquad (1)$$

$W_2 = 0$; $W_1 = mgh$;

$A_{тр_1} = -F_{тр_1}S = -\mu mgS\cos\alpha$;

$A_{тр_2} = -F_{тр_2}l = -\mu mgl$.

Из (1) $-mgh = -\mu mgS\cos\alpha - \mu mgl$;

$\cos\alpha = \frac{b}{S}$; $h = \mu S\frac{b}{S} + \mu l$; $\mu = \frac{h}{b+l}$; $\mu = 0{,}01$.

КПД равен $\eta = \frac{mgh - F_{тр_1}S}{mgh} = 1 - \frac{\mu mgS\cos\alpha}{mgh} = 1 - \frac{\mu b}{h} = 0{,}95$.

9.51. Санки съезжают с горы высотой h и углом наклона α и движутся дальше по горизонтальному участку. Коэффициент трения на всем пути санок одинаков и равен μ. Определите расстояние S, которое пройдут санки по горизонтальному участку до полной остановки.

Ответ: $S = h(1/\mu - 1/\operatorname{tg}\alpha)$.

Решение самостоятельное.

9.52. Кубик соскальзывает без трения с поверхности, имеющей форму четверти окружности (высота H), а затем подымается по наклонной плоскости (рис. 9.14) с углом наклона α. Коэффициент

трения при движении кубика по наклонной плоскости μ. Определите максимальную высоту h, на которую поднимется кубик.

Ответ: $h = \frac{H}{1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha}$.

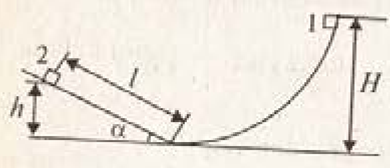


Рис. 9.14

Решение. Изменение полной энергии кубика равно работе силы трения: $W_2 - W_1 = A_{тр}$; (1)

$W_2 = mgh$; $W_1 = mgH$;

$A_{тр} = -\mu mgl \cos\alpha$, где $l = \frac{h}{\sin\alpha}$ — расстояние, которое пройдет кубик по наклонной плоскости.

Тогда из (1) получаем $mgh - mgH = -\mu mgh \operatorname{ctg}\alpha$,

откуда $h = \frac{H}{1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha}$.

9.53. С верхней точки наклонной плоскости длиной $l = 18$ м, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, скользит тело массой $m = 2$ кг. Какое количество теплоты выделяется при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела равна нулю, а у основания $v = 6$ м/с?

Ответ: $Q = 140$ Дж.

Решение. Изменение полной энергии тела равно работе силы трения, которая затрачивается на нагревание наклонной плоскости и тела.

$W_2 - W_1 = A_{тр} = Q$.

$\frac{mv^2}{2} - mgh = -|A_{тр}|$; здесь учтено, что работа силы трения — отрицательная величина $|A_{тр}| = Q$.

Тогда $mgl \sin\alpha - \frac{mv^2}{2} = Q$; $Q = 140$ Дж.

9.54. Сани съезжают с горы высотой $H = 6$ м и углом наклона $\alpha = 40°$. Пройдя путь $S = 5$ м по горизонтальной плоскости, они поднимаются в гору с углом наклона $\beta = 30°$. Определить, на какой высоте h сани остановятся, если коэффициент трения на всем пути равен $\mu = 0,2$.

Ответ: $h = 2,65$ м.

Решение. $W_2 - W_1 = A_{тр}$; (1)

$W_2 = W_{п_2} = mgh$; $W_1 = W_{п_1} = mgH$;

$A_{тр} = A_{тр_1} + A_{тр_2} + A_{тр_3}$;

$A_{тр_1} = -\mu mgl_1 \cos\alpha = -\mu mg \frac{H}{\sin\alpha} \cos\alpha = -\mu mgH \operatorname{ctg}\alpha$ — работа силы трения при спуске тела.

$A_{тр_2} = -\mu mgS$ — работа силы трения на горизонтальном участке.

$A_{тр_3} = -\mu mgl_2 \cos\beta = -\mu mg \frac{h}{\sin\beta} \cos\beta = -\mu mgh \operatorname{ctg}\beta$ — работа силы трения при подъеме.

Из (1) $mgh - mgH = -\mu mgH \operatorname{ctg}\alpha - \mu mgS - \mu mgh \operatorname{ctg}\beta$,

откуда $h = \frac{H(1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha) - \mu S}{1 + \mu \operatorname{ctg}\beta}$; $h = 2,65$ м.

9.55. Санки съезжают с горы высотой $H = 15$ м и углом наклона $\alpha = 30°$. Коэффициент трения санок о поверхность горы линейно увеличивается от $\mu_1 = 0$ у вершины горы до $\mu_2 = 0,4$ у подножия. Какую скорость будут иметь санки у подножия горы?

Ответ: $v = 14$ м/с.

Решение. $W_2 - W_1 = A_{тр}$;

$W_2 = W_{k_2} = \frac{mv^2}{2}$; $W_1 = W_{п_1} = mgH$.

Коэффициент трения, а значит и сила трения, меняются линейно от нуля до $F_{тр\,max} = \mu_2 mg \cos\alpha$, тогда на всем пути можно использовать значение средней силы трения $F_{тр\,ср} = \frac{1}{2}\mu_2 mg \cos\alpha$.

Работа силы трения $A_{тр} = -\frac{1}{2}\mu_2 mgl \cos\alpha$, где $l = \frac{H}{\sin\alpha}$ — длина наклонной плоскости.

Следовательно, $\frac{mv^2}{2} - mgH = -\frac{\mu_2}{2} mg \cos\alpha \frac{H}{\sin\alpha}$, откуда

$v = \sqrt{gH(2 - \mu_2 \operatorname{ctg}\alpha)}$; $v = 14$ м/с.

9.56. Тело соскальзывает с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. В нижней точке тело ударяется о стенку, перпендикулярную плоскости. Определите коэффициент трения при движении тела, если после абсолютно упругого удара оно поднялось до половины первоначальной высоты.

Ответ: $\mu = \operatorname{tg}\alpha/3$.

Решение. Изменение полной механической энергии тела равно работе силы трения $W_2 - W_1 = A_{тр}$. (1)

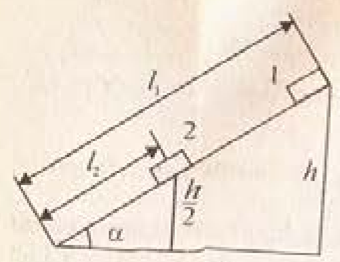


Рис. 9.15

При абсолютно упругом ударе модуль скорости не изменяется, меняется только ее направление на противоположное.

$W_1 = W_{п_1} = mgh;\ W_2 = W_{п_2} = mg\dfrac{h}{2};$

$A_{тр} = -\mu mg\cos\alpha(l_1 + l_2);\ l_1 = \dfrac{h}{\sin\alpha},$

$l_2 = \dfrac{h}{2\sin\alpha}$. Из (1) получаем (рис. 9.15):

$$\frac{mgh}{2} - mgh = -\mu mg\cos\alpha\left(\frac{h}{\sin\alpha} + \frac{h}{2\sin\alpha}\right);$$

$$\frac{mgh}{2} - mgh = -\frac{3\mu mgh}{2\operatorname{tg}\alpha};\ \mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{3}.$$

9.57. С верхней точки наклонной плоскости длиной $l = 16$ см, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, соскальзывает тело. Затем падает на гладкую горизонтальную поверхность, находящуюся на расстоянии $h = 20$ см от нижнего края наклонной плоскости. На какую наибольшую высоту от горизонтальной поверхности поднимется тело после абсолютно упругого удара?

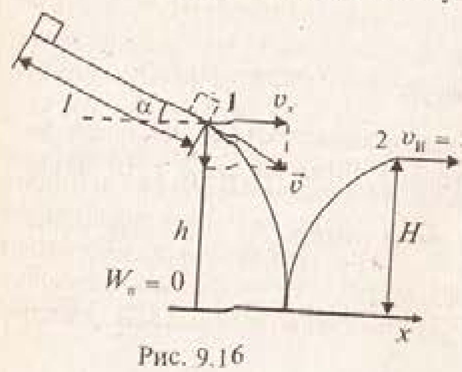


Рис. 9.16

Ответ: $H = 22$ см.

Решение. Потенциальную энергию отсчитываем от горизонтальной поверхности. Используем закон сохранения энергии: $W_1 = W_2;\ W_{k_1} + W_{п_1} = W_{k_2} + W_{п_2};$ (1)

$W_{п_1} = mgh;\ W_{k_1} = \dfrac{mv^2}{2};\ l = \dfrac{v^2}{2a};\ a = g\sin\alpha;\ v = \sqrt{2gl\sin\alpha}$ — скорость тела в момент соскальзывания с наклонной плоскости (рис. 9.16). Горизонтальная составляющая скорости не изменяется. $v_x = v_H = v\cos\alpha = \sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha$ — скорость тела в высшей точке подъема после абсолютно упругого удара.

Тогда $W_{k_2} = \dfrac{mv_H^2}{2};\ W_{п_2} = mgH.$

Из (1), с учетом вышеприведенных соотношений, получим

$$mgh + \frac{mv^2}{2} = mgH + \frac{mv_H^2}{2};\ gh + \frac{2gl\sin\alpha}{2} = gH + \frac{2gl\sin\alpha\cos^2\alpha}{2};$$

откуда $H = h + l\sin^3\alpha = 22$ см.

9.58. Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м. Определите энергию W маятника и скорость v шарика при прохождении положения равновесия, если наибольший угол отклонения маятника от вертикали равен $\alpha = 45°$ (рис. 9.17).

Ответ: $W = 0{,}3$ Дж; $v = 2{,}4$ м/с.

Решение. Потенциальная энергия отсчитывается от положения равновесия. По закону сохранения энергии потенциальная энергия в положении 1:

Рис. 9.17

$$W_{п_1} = mgh = mgl(1 - \cos\alpha) = 0{,}3\ \text{Дж},$$

где $W_{k_1} = 0$, равна кинетической энергии в положении 2:

$$W_{k_2} = \frac{mv^2}{2};\ W_{п_2} = 0,\ W_{п_1} = W_{k_2}.$$

$$mgl(1 - \cos\alpha) = \frac{mv^2}{2},\ \text{откуда}$$

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 2{,}4\ \text{м/с}.$$

9.59. Тело массой 20 кг подвешено на веревке длиной 1 м и площадью поперечного сечения $0{,}75\ см^2$. Веревка выдерживает максимальное напряжение $\sigma_{пр} = 4{,}2\cdot10^6$ Па. На какой максимальный угол ее можно отклонить от вертикали, чтобы она не порвалась после того, как груз будет отпущен? Размеры тела малы по сравнению с длиной веревки.

Ответ: $\alpha = 45{,}8°$.

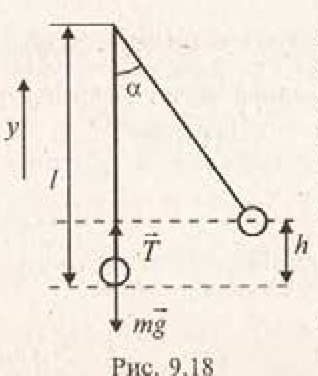


Рис. 9.18

Решение. Наибольшее натяжение веревка испытывает в вертикальном положении. Следовательно, если она не порвется в этом положении, соответствующее натяжение допустимо. Ось y направим вверх (рис. 9.18). Уравнение движения тела в нижнем положении $T - mg = mv^2/l;$

$\cos\alpha = (l - h)/l = 1 - h/l.$

Для нахождения h используем закон сохранения энергии.

$mgh = mv^2/2;\ h = v^2/2g.$

Из уравнения движения $v^2 = (T - mg)l/m$.

Следовательно: $\cos\alpha = 1 - v^2/2gl = 1 - (T - mg)/2mg$.

Максимальная сила натяжения веревки может быть $T = \sigma_{пр}S$.

$\cos\alpha = 1 - (\sigma_{пр}S - mg)/2mg$. $\alpha = \arccos\left(1 - \dfrac{\sigma_{пр}S - mg}{2mg}\right) = 45{,}8°$.

9.60. Маятник массой m отклонен на угол α от вертикали. Какова сила натяжения нити во время прохождения маятником положения равновесия?

Ответ: $T = mg(3 - 2\cos\alpha)$.

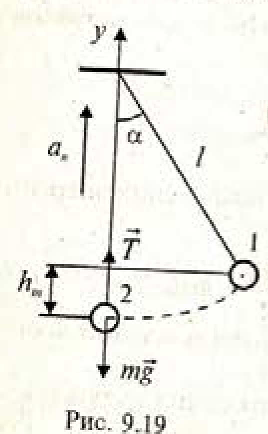


Рис. 9.19

Решение. При прохождении маятником положения равновесия (рис. 9.19):

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_n; \quad (y): \quad T - mg = \frac{mv^2}{l}.$$

Сила натяжения нити $T = m\left(g + \dfrac{v^2}{l}\right)$. (1)

Согласно закону сохранения энергии $W_{k_1} + W_{п_1} = W_{k_2} + W_{п_2}$; $W_{k_1} = 0$; $W_{п_2} = 0$,

тогда $mgh = \dfrac{mv^2}{2}$; $v^2 = 2gh$,

где $h = l(1 - \cos\alpha)$.

Из (1) получим $T = m\left(g + \dfrac{2gl(1 - \cos\alpha)}{l}\right) = mg(3 - 2\cos\alpha)$.

9.61. Тело массой m вращается на нити в вертикальной плоскости. На сколько сила натяжения нити в нижней точке больше, чем в верхней?

Ответ: $T_1 - T_2 = 6mg$.

Решение. Согласно второму закону Ньютона в нижней точке $T_1 = mg + \dfrac{mv_1^2}{R}$. ($R$ — радиус окружности, т. е. длина нити.) В верхней точке $T_2 + mg = \dfrac{mv_2^2}{R}$; $T_2 = \dfrac{mv_2^2}{R} - mg$;

$$T_1 - T_2 = mg + \frac{mv_1^2}{R} - \frac{mv_2^2}{R} + mg = 2mg + \frac{m}{R}(v_1^2 - v_2^2). \quad (1)$$

Согласно закону сохранения энергии для нижнего и верхнего положений тела (рис. 9.20):

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + mg \cdot 2R;$$

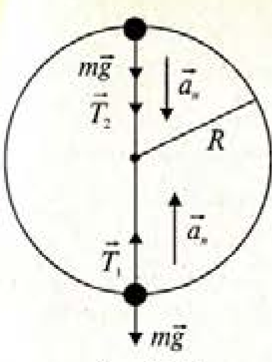


Рис. 9.20

$$m(v_1^2 - v_2^2) = 4mgR. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$T_1 - T_2 = 2mg + \frac{4mgR}{R} = 6mg.$$

9.62. Невесомый стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O и перпендикулярной стержню (рис. 9.21). На концах стержня укреплены грузы равных масс, находящиеся на расстояниях l_1 и l_2 от точки O. В начальный момент стержень расположен горизонтально и отпущен. Определите линейную скорость грузов в момент прохождения положения равновесия.

Ответ: $v_1 = l_1\sqrt{\dfrac{2g(l_2 - l_1)}{l_1^2 + l_2^2}}$; $v_2 = l_2\sqrt{\dfrac{2g(l_2 - l_1)}{l_1^2 + l_2^2}}$.

Рис. 9.21

Решение. По закону сохранения энергии $W_1 = W_2$; $W_1 = 0$;

$$W_2 = \frac{mv_1^2}{2} + mgl_1 + \frac{mv_2^2}{2} - mgl_2 = 0. \quad (1)$$

(Нулевой уровень потенциальной энергии на уровне точки O.)

Угловая скорость вращения грузов одинакова, тогда $v_1 = \omega l_1$; $v_2 = \omega l_2$. (2)

Учитывая (2), из (1) находим

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(l_2 - l_1)}{l_1^2 + l_2^2}}.$$

Следовательно, $v_1 = l_1\sqrt{\dfrac{2g(l_2 - l_1)}{l_1^2 + l_2^2}}$; $v_2 = l_2\sqrt{\dfrac{2g(l_2 - l_1)}{l_1^2 + l_2^2}}$.

9.63. Небольшое тело $m = 0{,}1$ кг скатывается по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиусом R. Какой должна быть наименьшая высота ската, чтобы тело сделало полную петлю? С какой силой тело давит на желоб в точке, радиус-вектор которой составляет угол $\alpha = 45°$ с вертикалью?

Ответ: $h = 50$ см; $F_д = 0{,}86$ Н.

Решение. Уравнение движения тела: $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$.

Учитывая расположение осей координат, указанных на рисунке 9.22, проекция уравнения на ось y: $mg\cos\alpha + N = mv^2/R$.

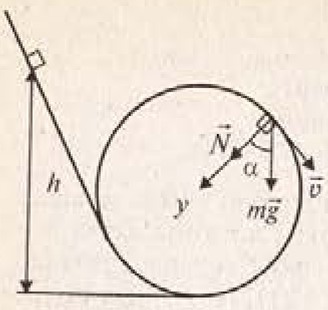


Рис. 9.22

Тело оторвется от петли, если $N = 0$, тогда $v = \sqrt{gR\cos\alpha}$. Для верхней точки петли $\cos\alpha = 1$, поэтому $v = \sqrt{gR}$. Наименьшую высоту ската найдем из закона сохранения энергии: $mgh = mv^2/2 + 2mgR$. Подставив $v = \sqrt{gR}$, получаем $h = 2{,}5R$.

Скорость тела v_1 в точке, радиус-вектор которой составляет угол α с вертикалью, найдем из закона сохранения энергии: $mgh = mv_1^2/2 + mgR(1 + \cos\alpha)$.

Учитывая, что $h = 2{,}5R$, получим $v_1 = \sqrt{gR(3 - 2\cos\alpha)}$.

Силу давления тела на желоб в этой точке, равную по третьему закону динамики силе реакции опоры, определим из уравнения движения тела: $N_1 + mg\cos\alpha = mv_1^2/R$, откуда $N_1 = 3mg(1 - \cos\alpha)$.

9.64. Цирковой артист, разогнавшись по горизонтальному желобу на мотоцикле, выезжает в вертикальную петлю радиусом R. Определите минимальную скорость v_0, с которой он должен въехать в петлю, чтобы благополучно закончить номер. Перед въездом в петлю артист выключает двигатель.

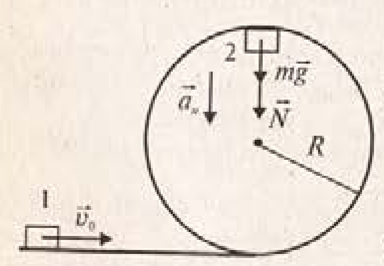


Рис. 9.23

Ответ: $v_0 = \sqrt{5gR}$.

Решение. На основе закона сохранения энергии $W_1 = W_2$;

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg2R + \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Скорость мотоциклиста в верхней точке петли найдем по второму закону Ньютона (рис. 9.23): $mg + N = \dfrac{mv^2}{R}$.

Начальная скорость v_0 будет минимальна, когда в верхней точке сила реакции опоры $N = 0$. Тогда $mg = \dfrac{mv^2}{R}$; $v = \sqrt{gR}$.

Из (1) получим $\dfrac{mv_0^2}{2} = mg2R + \dfrac{mgR}{2}$; $v_0 = \sqrt{5gR}$.

9.65. Небольшое тело без трения соскальзывает вниз с вершины полусферы радиусом $R = 1{,}5$ м (рис. 9.24). На какой высоте h от вершины тело оторвется от поверхности?

Ответ: $h = 0{,}5$ м.

Решение. Нулевой уровень потенциальной энергии выбираем на уровне вершины полусферы. Согласно закону сохранения энергии $W_1 = W_2$, $W_1 = 0$, $W_2 = -mgh + \dfrac{mv^2}{2} = 0$, (1)

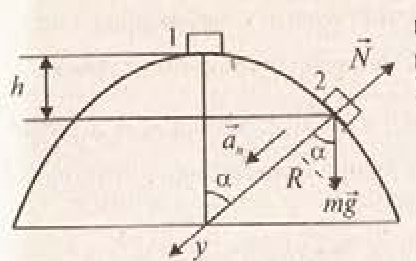


Рис. 9.24

v — скорость тела в момент отрыва от полусферы в точке 2 (рис. 9.24) находим исходя из второго закона Ньютона.

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_n;$$

$$(y):\quad mg\cos\alpha - N = \frac{mv^2}{R}.$$

В момент отрыва тела $N = 0$, тогда $mg\cos\alpha = \dfrac{mv^2}{R}$; $v^2 = gR\cos\alpha$;

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R}. \text{ Тогда из (1) } 2mgh = mgR\left(\frac{R-h}{R}\right); \; h = \frac{R}{3} = 0{,}5 \text{ м.}$$

9.66. Человек стоит на неподвижной тележке и бросает горизонтально камень массой $m = 8$ кг со скоростью $v = 5$ м/с. Определите, какую работу совершает человек, если масса тележки и человека $M = 160$ кг. Проанализируйте зависимость работы от массы M.

Ответ: $A = 105$ Дж.

Решение. Используем закон сохранения импульса: $mv = Mu$; $u = \dfrac{mv}{M}$ — скорость, с которой начала двигаться тележка с человеком.

Работа, совершенная человеком $A = W_{k_1} + W_{k_2}$, где W_{k_1} и W_{k_2} — кинетические энергии тележки с человеком и камня.

$$A = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{M}{2}\left(\frac{mv}{M}\right)^2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2M}(m + M); \quad A = 105 \text{ Дж.}$$

Выражение для работы можно переписать в виде:

$$A = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{m}{M} + 1\right). \text{ Если } M \gg m, \text{ то } A = \frac{mv^2}{2}; \; A = 100 \text{ Дж.}$$

В этом случае человек совершает меньшую работу, за счет которой изменяется только кинетическая энергия камня, а человек с тележкой остаются практически неподвижными.

9.67. Человек, стоящий на гладкой поверхности льда, бросает камень массой $m = 3$ кг в горизонтальном направлении с высоты $H = 1{,}8$ м. Камень падает на лед на расстоянии $S = 9$ м от места

бросания. Определите работу A, которую совершает человек при броске, масса человека $M = 60$ кг.

Ответ: $A = 347$ Дж.

Решение. Используем закон сохранения импульса:

$mv_0 = Mu$; $u = \dfrac{mv_0}{M}$ — скорость, приобретенная человеком после броска. Начальную скорость камня найдем из уравнения траектории тела, брошенного горизонтально, $H = \dfrac{gS^2}{2v_0^2}$, откуда $v_0 = S\sqrt{\dfrac{g}{2H}}$.

Работа, произведенная человеком, равна изменению кинетической энергии человека и камня:

$$A = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mgS^2}{4H} + \frac{M}{2}\left(\frac{mS}{M}\sqrt{\frac{g}{2H}}\right)^2 = \frac{mgS^2}{4MH}(M+m);\quad A = 347\ \text{Дж}.$$

9.68. Человек массой M прыгает под углом α к горизонту со скоростью v_0. В верхней точке траектории он бросает вертикально вниз груз массой m со скоростью v. На какую общую высоту H подпрыгнул человек?

Ответ: $H = 10$ м.

Рис. 9.25

Решение. Общая высота, на которую подпрыгнул человек,

$H = h + h_1$, где $h = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ — максимальная высота, на которую подпрыгнул человек, прыгая под углом α к горизонту (рис. 9.25).

Закон сохранения импульса в верхней точке траектории: $mv_y = Mv_{1y}$; $v_y = v$.

Тогда вертикальная составляющая скорости человека после бросания камня $v_{1y} = mv/M$. Дополнительная высота подъема человека $h_1 = \dfrac{v_{1y}^2}{2g} = \dfrac{m^2v_1^2}{2gM^2}$. Общая высота $H = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \dfrac{m^2v^2}{2gM^2}$; $H = 10$ м.

9.69. Призма массой $M = 0{,}5$ кг и углом 45° наклона ребра к основанию стоит на гладкой горизонтальной поверхности. Горизонтально летящая пуля массой $m \ll M$ ($m = 5$ г) после абсолютно упругого столкновения отскакивает от наклонной плоскости призмы вертикально вверх (рис. 9.26). Скорость призмы в первый момент после удара $v = 0{,}3$ м/с. Найти скорость пули до (v_1) и после удара (v_2). Трением между призмой и плоскостью пренебречь.

Ответ: $v_1 = 30$ м/с; $v_2 = 30$ м/с.

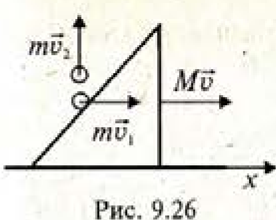


Рис. 9.26

Решение. При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения импульса и энергии: $m\vec{v}_1 = M\vec{v} + m\vec{v}_2$,

(x): $mv_1 = Mv$; $v_1 = \dfrac{Mv}{m}$; $v_1 = 30$ м/с;

$\dfrac{mv_1^2}{2} = \dfrac{Mv^2}{2} + \dfrac{mv_2^2}{2}$; учитывая значение v_1,

получаем $v_2 = v\left(\dfrac{M}{m}\sqrt{1 - \dfrac{m}{M}}\right)$; $v_2 = 30$ м/с.

В итоге $v_1 = v_2$, что неудивительно, т. к. $m \ll M$.

9.70. Для определения скорости пули используют баллистический маятник. Определите скорость горизонтально летевшей пули перед попаданием в маятник, если он после попадания пули отклонился на угол $\alpha = 15°$. Длина нити $l = 4{,}0$ м. Масса пули $m = 20$ г, баллистического маятника $M = 5{,}0$ кг.

Ответ: $v = 410$ м/с.

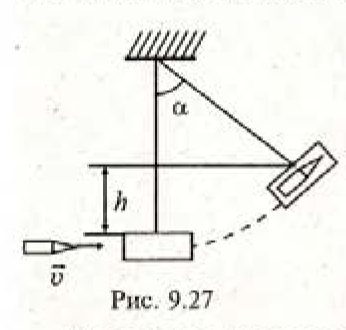


Рис. 9.27

Решение. Пуля застряет в маятнике, т. е. наблюдается абсолютно неупругий удар, при котором выполняется закон сохранения импульса: $mv = (m+M)u$,

$u = \dfrac{mv}{m+M}$ — скорость, с которой движется маятник с застрявшей в нем пулей.

По закону сохранения энергии для маятника с застрявшей пулей $\dfrac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh$; $h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$ (см. рис. 9.27);

$$\frac{(m+M)(mv)^2}{2(m+M)^2} = (m+M)gl(1-\cos\alpha),$$

откуда скорость пули $v = \dfrac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$; $v = 410$ м/с.

9.71. Нож, брошенный горизонтально со скоростью v_1, попадает в деревянную мишень, подвешенную на веревке, и застревает в ней. Определите высоту, на которую поднимется мишень, если масса ножа m_1, а масса мишени m_2.

Ответ: $h = (m_1v_1)^2/2g(m_1+m_2)$.

Решение самостоятельное. См. задачу 9.70.

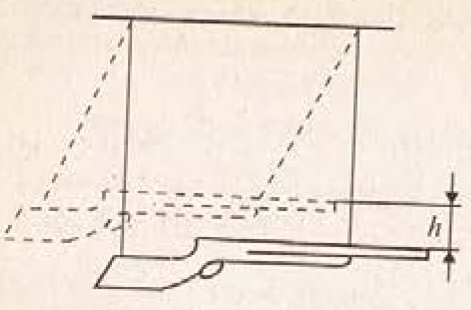


Рис. 9.28

9.72. Винтовка массой $M = 2{,}8$ кг подвешена горизонтально на двух параллельных нитях. При выстреле в результате отдачи она откачнулась вверх на $h = 19{,}6$ см (рис. 9.28). Масса пули $m = 9{,}8$ г. Определите скорость, с которой вылетела пуля.

Ответ: $v = M\sqrt{2gh}/m = 560$ м/с.

Решение самостоятельное. См. задачу 9.70.

9.73. Стальная пуля массой m пробивает подвешенный на тонкой нити свинцовый шар массой M, в результате чего скорость пули уменьшилась вдвое. Какая относительная часть кинетической энергии пули пошла на нагревание?

Ответ: $Q/W_k = (3 - m/M)/4$; $0{,}5 \le Q/W_k \le 0{,}75$.

Решение. По закону сохранения импульса

$mv = \frac{mv}{2} + Mu$, $u = \frac{mv}{2M}$, где u — скорость свинцового шара после взаимодействия с пулей.

Относительная часть кинетической энергии пули, которая пошла на нагревание:

$$\frac{Q}{W_k} = \frac{W_1 - W_2}{W_1} = \frac{\frac{mv^2}{2} - \left(\frac{m}{2}\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{Mu^2}{2}\right)}{\frac{mv^2}{2}} = \frac{\frac{3mv^2}{8} - \frac{m^2v^2}{8M}}{\frac{mv^2}{2}} = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{m}{M}\right).$$

Если $m = M$, $Q/W_k = 0{,}5$; если $m \ll M$, $Q/W = 0{,}75$; т. е. $0{,}5 \le Q/W_k \le 0{,}75$.

9.74. Горизонтально летящая пуля попадает в деревянный брус, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности и пробивает его. Какая относительная часть энергии пули перешла в теплоту? Масса пули $m = 10$ г, масса бруса $M = 1$ кг, начальная скорость пули $v_0 = 500$ м/с, скорость пули после вылета $v = 300$ м/с.

Ответ: $Q/W = 0{,}64$.

Решение. Согласно закону сохранения импульса

$mv_0 = mv + Mu$, $u = \frac{m(v_0 - v)}{M}$, где u — скорость деревянного бруса после удара пули.

Кинетическая энергия пули до удара $W_{k_1}' = \frac{mv_0^2}{2}$.

Кинетическая энергия пули и бруса после удара

$$W_{k_1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mm^2(v_0 - v)^2}{2M^2}.$$

Часть кинетической энергии пули, перешедшая в теплоту,

$$Q = W_{k_1}' - W_{k_1} = \frac{mv_0^2}{2} - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{m^2(v_0 - v)^2}{2M}\right).$$

Относительная часть энергии пули, перешедшая в теплоту,

$$\frac{Q}{W_k} = \frac{\frac{mv_0^2}{2} - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{m^2(v_0 - v)^2}{2M}\right)}{\frac{mv_0^2}{2}} = 1 - \frac{v^2}{v_0^2} - \frac{m(v_0 - v)^2}{Mv_0^2};\ Q/W_k = 0{,}64.$$

9.75. В покоящийся шар массой $M = 0{,}8$ кг, который прикреплен к концу легкого несжимаемого стержня, закрепленного в подвесе на шарнире, попадает пуля массой $m = 0{,}02$ кг (рис. 9.29). Угол между направлением полета пули и вертикальной линией $\alpha = 30°$. После удара пуля застревает в шаре, и шар вместе с пулей поднимается на высоту $h = 0{,}3$ м относительно первоначального положения. Найдите скорость пули v.

Ответ: $v = 200$ м/с.

Рис. 9.29

Решение. Запишем закон сохранения импульса в проекциях на ось x, в направлении которой внешние силы не действуют (рис. 9.29):

$mv\sin\alpha = (m + M)u$,

$$v = \frac{(m + M)u}{m\sin\alpha}, \quad (1)$$

u — скорость шара после попадения пули. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)gh,\ u = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1) получим $v = \frac{(m + M)\sqrt{2gh}}{m\sin\alpha}$; $v = 200$ м/с.

9.76. Деревянный шар массой M лежит на тонкой подставке. Снизу в шар попадает пуля массой m, летящая вертикально вверх, и пробивает его. При этом шар подскакивает на высоту H. На какую

высоту h поднимается пуля над подставкой с шаром, если ее скорость перед ударом о шар была v_0?

Ответ: $h = \frac{\left(v_0 - \frac{M\sqrt{2gH}}{m}\right)^2}{2g}$.

Решение. По закону сохранения импульса (учитывая кратковременность удара пули) $mv_0 = mv + Mu$, (1)
v — скорость пули, пробившей шар, u — скорость шара. Закон сохранения энергии для шара $\frac{Mu^2}{2} = MgH$; $u = \sqrt{2gH}$, для пули $\frac{mv^2}{2} = mgh$; $v = \sqrt{2gh}$. Подставим значения u и v в (1).

$$mv_0 = m\sqrt{2gh} + M\sqrt{2gH};\ h = \frac{\left(mv_0 - M\sqrt{2gH}\right)^2}{2m^2 g} = \frac{\left(v_0 - \frac{M\sqrt{2gH}}{m}\right)^2}{2g}.$$

9.77. Для забивки сваи груз массой $m = 200$ кг поднимают со скоростью $v = 5$ м/с, а затем отпускают на высоте $H = 10$ м, после чего он движется свободно до удара о сваю. Масса сваи $M = 300$ кг, а сила сопротивления грунта $F_c = 20$ кН. Какова энергия груза W в момент удара его о сваю? На какую глубину h опускается свая после каждого удара? С какой максимальной частотой можно производить удары?

Ответ: $W = 22{,}1$ кДж; $h = 0{,}6$ м; $n = 15$ мин$^{-1}$.

Решение. Отсчитывая потенциальную энергию груза от уровня вершины сваи и используя закон сохранения энергии, получаем

$$mgH + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} = W, \quad (1)$$

$W = 22{,}1$ кДж; где $v_1 = \sqrt{v^2 + 2gH}$ — скорость груза перед ударом, W — полная энергия груза. Удар груза о сваю мгновенный, поэтому можно использовать закон сохранения импульса

$$mv_1 = (m+M)u,\ u = \frac{mv_1}{m+M}, \quad (2)$$

где u — скорость груза и сваи после удара.

Изменение полной энергии груза и сваи (после удара) равно работе силы сопротивления:

$$W_2 - W_1 = A_c,\ A_c = F_c h \cos 180° = -F_c h.$$

$$W_1 = W_{k_1} = \frac{(m+M)u^2}{2};\ W_2 = W_{п_2} = -(m+M)gh,$$

где h — глубина погружения сваи.

Тогда $-(m+M)gh - \frac{(m+M)u^2}{2} = -F_c h$.

Учитывая соотношения (2) и (1), получаем

$$h = \frac{(m+M)u^2}{2\left[F_c - (m+M)g\right]} = \frac{(mv_1)^2}{2(m+M)\left[F_c - (m+M)g\right]} = \frac{m^2\left(2gH + v^2\right)}{2(m+M)\left[F_c - (m+M)g\right]};\ h = 0{,}6 \text{ м}.$$

Здесь $F_c > (m+M)g$, иначе, если $F_c < (m+M)g$, — свая бы провалилась в грунт без удара.

Время между двумя последовательными ударами $t = t_1 + t_2 + t_3$; $t_1 = \frac{H}{v}$ — время поднятия груза на высоту H; $t_2 = \frac{v}{g}$ — время падения груза на сваю; $t_3 = \frac{v_1}{g} = \frac{\sqrt{2gH + v^2}}{g}$ — время погружения сваи с грузом на глубину h.

Тогда $t = \frac{H}{v} + \frac{v}{g} + \frac{\sqrt{2gH + v^2}}{g}$; $t = 4$ с.

Частота ударов не должна превышать $n = \frac{60}{4} = 15$ мин$^{-1}$.

9.78. Сваю массой $m_1 = 100$ кг забивают в грунт с помощью копра; при этом груз массой $m_2 = 300$ кг свободно падает с высоты $H = 4$ м и при каждом ударе свая опускается на $h = 10$ см. Определить силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, для двух случаев: а) удар груза копра о сваю абсолютно упругий; б) удар абсолютно неупругий.

Ответ: а) $F_c = 89$ кН; б) $F_c = 92$ кН.

Решение. а) Удар груза копра о сваю абсолютно упругий. Выполняются законы сохранения импульса и механической энергии:

$$m_2 v = m_1 u - m_2 v_1; \quad (1)$$

$$\frac{m_2 v^2}{2} = \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 v_1^2}{2}, \quad (2)$$

где $v = \sqrt{2gh}$ скорость копра перед ударом, u — скорость погружения сваи, v_1 — скорость груза после удара.

Преобразуем (1) и (2): $m_2(\upsilon + \upsilon_1) = m_1 u;$ (3)

$m_2(\upsilon^2 - \upsilon_1^2) = m_1 u^2.$ (4)

Разделим (4) на (3): $\upsilon - \upsilon_1 = u$ и домножим на m_2:

$m_2\upsilon - m_2\upsilon_1 = m_2 u;$ используем также (3): $m_2\upsilon + m_2\upsilon_1 = m_1 u,$

отсюда $u = \dfrac{2m_2\upsilon}{m_1 + m_2}$ — скорость погружения сваи.

Изменение полной энергии сваи равно работе силы сопротивления. Потенциальную энергию отсчитываем от вершины сваи до удара: $-m_1 gh - \dfrac{m_1 u^2}{2} = -F_{c_1} h;$ $m_1 gh + \dfrac{4m_1 m_2^2\left(\sqrt{2gh}\right)^2}{2(m_1 + m_2)^2} = F_{c_1} h;$

$F_{c_1} = m_1 g\left(1 + \dfrac{4m_2^2 H}{(m_1 + m_2)^2 h}\right)$ — сила сопротивления грунта.

$F_{c_1} = 89\,\text{кН}.$

б) Удар абсолютно неупругий.

По закону сохранения импульса $m_2\upsilon = (m_1 + m_2)u,$ $u = \dfrac{m_2\upsilon}{m_1 + m_2}$ — скорость движения сваи и копра после абсолютно неупругого удара. $\upsilon = \sqrt{2gh}$ — скорость груза в момент падения на сваю. Аналогично первой части задачи

$$-(m_1 + m_2)gh - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = -F_{c_2} h;$$

откуда $F_{c_2} = (m_1 + m_2)g\left(1 + \dfrac{m_2^2 H}{(m_1 + m_2)^2 h}\right);$ $F_{c_2} = 92\,\text{кН}.$

9.79. Два тела движутся горизонтально навстречу друг другу вдоль одной прямой. После столкновения тела слипаются. Определите скорость тел после столкновения, если $m_1 = 0{,}5\,\text{кг};$ $m_2 = 0{,}9\,\text{кг};$ $\upsilon_1 = 0{,}4\,\text{м/с};$ $\upsilon_2 = 0{,}1\,\text{м/с}.$ Сравнить энергию тел до и после удара. Объясните, почему происходит изменение энергии.

Ответ: $u = 0{,}08\,\text{м/с}.$

Решение. По закону сохранения импульса

$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u,$ $u = \dfrac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2};$ $u = 0{,}08\,\text{м/с}.$

u — скорость тел после соударения.

Энергия тел до удара $W_{k_1} = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2};$ $W_{k_1} = 4{,}45\cdot 10^{-2}$ Дж.

Энергия тел после удара $W_{k_2} = \dfrac{(m_1 + m_2)u^2}{2};$ $W_{k_2} = 0{,}45\cdot 10^{-2}$ Дж.

$W_{k_1} > W_{k_2};$ $W_{k_1} - W_{k_2} = \Delta W;$ $\Delta W = 4\cdot 10^{-2}$ Дж.

Кинетическая энергия тел после абсолютно неупругого удара уменьшилась, т. к. часть энергии (ΔW) превратилась в энергию деформации и внутреннюю энергию тел.

9.80. Два шара массами $m_1 = 1{,}0\,\text{кг}$ и $m_2 = 2{,}0\,\text{кг}$ движутся поступательно вдоль горизонтальной прямой в одном направлении со скоростями $\upsilon_1 = 7{,}0\,\text{м/с}$ и $\upsilon_2 = 1{,}0\,\text{м/с}.$ Проанализировать зависимость скоростей шариков от соотношения их масс.

Ответ: $u_1 = -1\,\text{м/с};$ $u_2 = 5\,\text{м/с}.$

Решение. При абсолютно упругом ударе выполняется закон сохранения энергии и импульса. Потенциальная энергия системы равна нулю.

$\dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2};$ (1)

где u_1 и u_2 — скорости шаров после соударения.

$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2;$ проекция на ось x равна

$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2;$ (2)

(считаем, что шары после соударения движутся в прежнем направлении).

Преобразуем уравнения (1) и (2):

$m_1(\upsilon_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - \upsilon_2^2);$ $m_1(\upsilon_1 - u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2).$

Разделив эти уравнения друг на друга, получим

$\upsilon_1 + u_1 = \upsilon_2 + u_2;$ $u_1 = \upsilon_2 + u_2 - \upsilon_1.$

Подставим последнее уравнение в (2):

$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1 u_2 + m_1\upsilon_2 - m_1\upsilon_1 + m_2 u_2;$

$u_1 = \dfrac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2};$ $u_2 = \dfrac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_2}{m_1 + m_2};$

$u_1 = -1\,\text{м/с};$ $u_2 = 5\,\text{м/с}.$

Скорость первого шара отрицательна, т. е. он движется в направлении, противоположном первоначальному.

Рассмотрим частные случаи:

а) $m_1 = m_2;$ $u_2 = \upsilon_1$ — шары равной массы обмениваются скоростями;

б) $m_1 = m_2;$ $\upsilon_2 = 0;$ $u_1 = 0;$ $u_2 = \upsilon_1$ — второй шар до удара покоился, после удара первый шар остановится, а второй будет двигаться в том же направлении и с той же скоростью, что и первый до удара;

в) $m_2 >> m_1$; $u_1 = -v_1 + 2v_2$; $u_2 \approx v_2$ — второй шар практически не изменяет свою скорость;

г) $m_2 >> m_1$; $u_1 = -v_1$; $v_2 = 0$; $u_2 = 0$ — первый шар отскакивает от неподвижного массивного шара и движется в обратную сторону с первоначальной скоростью.

9.81. Скорость тела перед абсолютно упругим ударом о второе неподвижное тело была равна $v_1 = 3{,}0$ м/с, после удара стала равной $u_1 = 2{,}0$ м/с. Определить скорость второго тела после удара.

Ответ: 1) $u_2 = v_1 + u_1 = 5$ м/с; 2) $u_2 = v_1 - u_1 = 1$ м/с.

Решение самостоятельное.

9.82. Шарик массой m_1, двигавшийся поступательно со скоростью v_1, налетает на неподвижный шарик массой m_2. Определить скорости шариков после абсолютно упругого центрального удара.

Ответ: $u_1 = (m_1 - m_2)v_1/(m_1 + m_2)$; $u_2 = 2m_1v_1/(m_1 + m_2)$.

Решение самостоятельное. См. задачу 9.80.

9.83. Легкий шарик начинает свободно падать и, пролетев расстояние L, сталкивается упруго с тяжелой плитой, движущейся вверх со скоростью u_1. На какую высоту подпрыгнет шарик после удара?

Ответ: $h = \dfrac{\left(\sqrt{2gL} + 2u_1\right)^2}{2g}$.

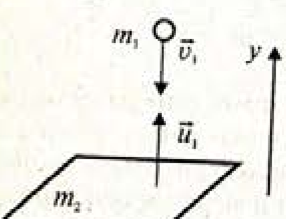


Рис. 9.30

Решение. Удар абсолютно упругий. Выполняются законы сохранения импульса и энергии (рис. 9.30).

$$(y):\quad -m_1v_1 + m_2u_1 = m_1v_2 + m_2u_2; \tag{1}$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2u_1^2}{2} = \frac{m_1v_2^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}, \tag{2}$$

где $v_1 = \sqrt{2gL}$; u_1 и v_2, u_2 скорости шарика и плиты до удара и после удара, соответственно.

Из (1) и (2) $-m_1(v_1 + v_2) = m_2(u_2 - u_1)$; (3)

$m_1\left(v_1^2 - v_2^2\right) = m_2\left(u_2^2 - u_1^2\right)$; (4)

Разделим (4) на (3): $-(v_1 - v_2) = u_2 + u_1$.

Так как $m_2 >> m_1$ скорость плиты практически не изменилась. $u_1 \approx u_2$, тогда $-v_1 + v_2 = 2u_1$; $v_2 = v_1 + 2u_1 = \sqrt{2gL} + 2u_1$.

Высота, на которую подпрыгнет шарик, $h = \dfrac{v_2^2}{2g} = \dfrac{\left(\sqrt{2gL} + 2u_1\right)^2}{2g}$.

9.84. Покажите, что при упругом ударе шара в такой же неподвижный шар не по линии их центров шары разлетаются под углом 90° друг к другу.

Рис. 9.31

Решение. Законы сохранения импульса и энергии имеют вид

$$m\vec{v}_1 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2;\quad \vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2; \tag{1}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2};\quad v_1^2 = u_1^2 + u_2^2. \tag{2}$$

Одновременное выполнение соотношений (1) и (2) возможно только, если угол между скоростями $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ равен 90° (рис. 9.31а, 9.31б).

9.85. Идеально гладкий шар A, движущийся со скоростью v_0, одновременно соударяется с двумя такими же, соприкасающимися между собой шарами B и C (рис. 9.32а). Найдите скорости шаров после соударения, считая соударение шаров абсолютно упругим.

Ответ: Шар A: $v = -v_0/5$, шары B и C: $u = 2\sqrt{3}v_0/5$.

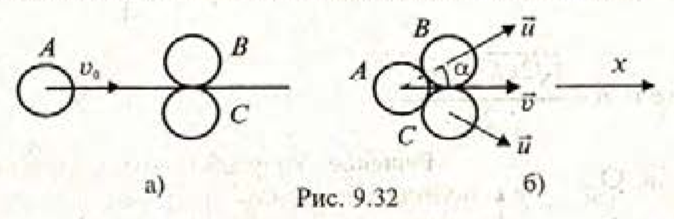


Рис. 9.32

Решение. Шары B и C одинаковые, поэтому они разлетятся с одинаковой скоростью u по прямым, соединяющим их центры с центром налетающего шара (рис. 9.32б), при этом угол $\alpha = 30°$. Шар A будет двигаться в первоначальном направлении со скоростью v. По закону сохранения импульса (проекция на ось x)

$$mv_0 = 2mu\cos\alpha + mv. \tag{1}$$

Закон сохранения энергии имеет вид: $\dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{2mu^2}{2} + \dfrac{mv^2}{2}$. (2)

Из (1) получим $v = v_0 - \sqrt{3}u$, подставим в (2), откуда $u = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}v_0$ — скорости шаров B и C.

Скорость шара A $v = -\dfrac{v_0}{5}$, т. е. шар будет двигаться в противоположную сторону.

9.86. Два одинаковых шара B и C массой m каждый покоятся, касаясь друг друга. Третий шар A налетает на них, двигаясь по прямой, касающейся обоих шаров (рис. 9.32а). Удар происходит без потерь энергии. Найдите массу налетающего шара, если после удара он остановился. Радиусы всех шаров одинаковы.

Ответ: $M = 1{,}5m$.

Решение. Закон сохранения энергии и закон сохранения импульса (проекция на ось x, рис. 9.32б) имеют вид:

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{2mu^2}{2};\quad Mv = 2mu\cos\alpha;\quad \alpha = 30^\circ,\quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$u = \frac{Mv}{2m\cos\alpha} = \frac{Mv}{m\sqrt{3}};\quad \frac{Mv^2}{2} = m\left(\frac{Mv}{m\sqrt{3}}\right)^2;\quad M = 1{,}5m.$$

9.87. Два шарика массами m_1 и m_2 подвешены на нитях одинаковой длины так, что соприкасаются. Один шарик отводят в плоскости нитей на угол α_0 и отпускают. Происходит центральный удар шариков. На какие углы α_1 и α_2 относительно отвесной линии отклонятся шарики после удара (углы считать малыми, удар — упругим)? На какой угол β отклонятся шарики, если удар неупругий?

Ответ: $\alpha_1 = (m_1 - m_2)\alpha_0/(m_1 + m_2)$; $\alpha_2 = 2m_1\alpha_0/(m_1 + m_2)$.

Решение. По закону сохранения энергии для первого шара $\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 gh$; $v_1 = \sqrt{2gh}$ (рис. 9.33).

$$h = l - l\cos\alpha_0 = l(1 - \cos\alpha_0) = 2l\sin^2\frac{\alpha_0}{2} = 2l\frac{\alpha_0^2}{4} = l\frac{\alpha_0^2}{2},$$ учтем, что

углы малые, тогда $\sin\frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0}{2}$. $v_1 = \sqrt{2g\frac{l\alpha_0^2}{2}} = \alpha_0\sqrt{gl}$ — скорость, которую имеет первый шар перед ударом о второй. При ударе законы сохранения имеют вид:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2; \qquad (1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \qquad (2)$$

где u_1 и u_2 — скорости первого и второго шаров после абсолютно упругого соударения.

Рис. 9.33

Из (1) и (2) следует

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2 u_2; \qquad (3)$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2 u_2^2; \qquad (4)$$

делим (4) на (3), результат домножим на m_2 и вычтем из (3):

$$v_1 + u_1 = u_2;\quad m_1 v_1 - m_1 u_1 - m_2 v_1 - m_2 u_1 = m_2 u_2 - m_2 u_2 = 0;$$

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1; \qquad (5)$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \qquad (6)$$

Аналогично v_1 получаем $u_1 = \alpha_1\sqrt{gl}$; $u_2 = \alpha_2\sqrt{gl}$.

Подставим в (5) и (6) $\alpha_1\sqrt{gl} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\alpha_0\sqrt{gl}$; $\alpha_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\alpha_0$;

$\alpha_2\sqrt{gl} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\alpha_0\sqrt{gl}$; $\alpha_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\alpha_0$.

Если удар абсолютно неупругий, $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$,

$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m\alpha_0\sqrt{gl}}{m_1 + m_2}$; $\beta\sqrt{gl} = \frac{m_1\alpha_0\sqrt{gl}}{m_1 + m_2}$; $\beta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\alpha_0$ — угол, на который отклонятся оба шарика.

ДИНАМИКА

Уровень II

1. Гоночный автомобиль массой m движется вдоль экватора с востока на запад, а затем с той же скоростью v относительно земли в направлении с запада на восток. Найдите разность сил давления автомобиля на поверхность шоссе в этих случаях.

Ответ: $\Delta F_д = 4mv\omega$.

Решение. Разность сил давления численно равна разности центростремительных сил, действующих на автомобиль в обоих случаях. Эта разность равна $m\frac{(v + \omega R)^2}{R} - m\frac{(v - \omega R)^2}{R} = 4mv\omega$

Здесь $\omega = 2\pi/T$, T — период обращения Земли вокруг оси, R — радиус Земли. Ответ от R не зависит.

2. Груз массой M подвешен к пружине жесткостью k, которая, в свою очередь, прикреплена к потолку. Груз приподнимают до положения, при котором пружина не растянута, и отпускают. Какой максимальной скорости достигнет груз при движении? Собственная длина пружины мала по сравнению с ее растяжением.

Ответ: $v_{max} = g\sqrt{M/k}$.

Решение. Скорость груза максимальна в тот момент, когда $Mg = kx_0$, x_0 — растяжение пружины. Учтем, что выше этой точки на груз действует сила, направленная вниз и он ускоряется, а ниже — сила, направленная вверх, т. е. он замедляется. Используя закон сохранения энергии, получаем $\frac{1}{2}Mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = Mgx_0$, откуда максимальная скорость груза равна $v_{\max} = g\sqrt{M/k}$.

3. Маховик массой M раскрутили и поместили между двумя стенками, расположенными под углом 2α друг к другу. Зная, что коэффициент трения между маховиком и стенками равен μ, определите силы, с которыми маховик действует на стенки. Углы стенок с горизонтальной плоскостью одинаковы (рис. 1).

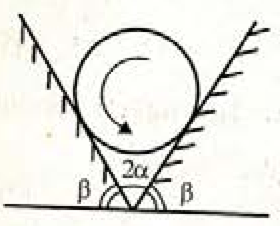


Рис. 1

Решение. Силы, действующие на маховик, указаны на рисунке 2. Уравнение равновесия маховика в проекциях на оси x и y имеют вид:

(x): $\mu N_1 \sin\alpha - N_1\cos\alpha + N_2\cos\alpha + \mu N_2 \sin\alpha = 0;$

(y): $N_1\sin\alpha + N_2\sin\alpha + \mu N_1\cos\alpha - \mu N_2\cos\alpha = Mg.$

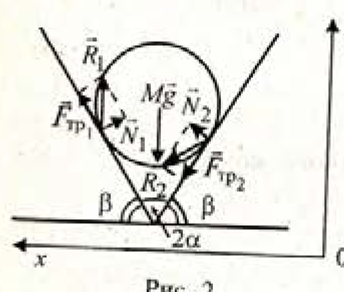


Рис. 2

Откуда $N_1 = \dfrac{Mg(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{\sin 2\alpha(1+\mu^2)}$;

$$N_2 = \frac{Mg(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{\sin 2\alpha(1+\mu^2)}.$$

Силы реакции опоры равны

$$\vec{R}_1 = \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}_1};\quad \vec{R}_2 = \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}_2}.$$

Тогда полные силы, действующие со стороны стенок на маховик,

$$R_1 = N_1\sqrt{1+\mu^2} = \frac{Mg(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{\sin 2\alpha\sqrt{1+\mu^2}};$$

$$R_2 = N_2\sqrt{1+\mu^2} = \frac{Mg(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{\sin 2\alpha\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Согласно третьему закону Ньютона такими же по величине, но противоположными по направлению силами маховик действует на стенки. Решение справедливо, если $\cos\alpha - \mu\sin\alpha > 0$, т. е. $\mu < \operatorname{ctg}\alpha$. Если же $\mu > \operatorname{ctg}\alpha$, маховик поедет вверх по левой стенке.

4. Маленький шарик подвешен на невесомой нерастяжимой нити. В начальный момент нить составляет угол $\varphi_0 = 60°$ с вертикалью, а скорость шарика равна нулю. Определите, какой угол φ с вертикалью составляет нить в тот момент, когда вертикальная проекция скорости шарика максимальна.

Ответ: $\varphi = \pm 40°$.

Решение. Перпендикулярная составляющая скорости максимальна, когда вертикальная составляющая силы натяжения нити будет равна силе тяжести, т. е. $T\cos\varphi = mg$;

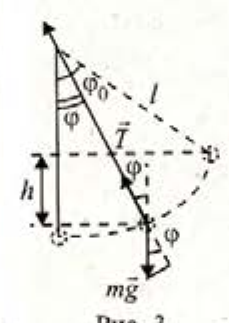


Рис. 3

$$T = \frac{mg}{\cos\varphi}, \tag{1}$$

T — сила натяжения нити. По второму закону Ньютона (рис. 3)

$$(y):\quad \frac{mv^2}{l} = T - mg\cos\varphi. \tag{2}$$

Используя закон сохранения энергии получаем $\dfrac{mv^2}{2} = mgh$; $\dfrac{mv^2}{2} = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$. (3)

Из (1) и (2) следует $\dfrac{mv^2}{l} = \dfrac{mg}{\cos\varphi} - mg\cos\varphi$;

$$\frac{mv^2}{l} = \frac{mg(1-\cos^2\varphi)}{\cos\varphi}. \tag{4}$$

Совместное решение (3) и (4) дает

$$2(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos\varphi};\quad 3\cos^2\varphi - 2\cos\varphi_0\cos\varphi - 1 = 0;$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{1}{3}\left(\cos\varphi_0 + \sqrt{\cos^2\varphi_0 + 3}\right);$$

$$\varphi = \pm\arccos\left[\frac{1}{3}\left(\cos\varphi_0 + \sqrt{\cos^2\varphi_0 + 3}\right)\right] = \pm\arccos\frac{1+\sqrt{13}}{6} = \pm 40°.$$

5. Как изменилась бы продолжительность земного года, если бы масса Земли увеличилась и сделалась бы равной массе Солнца, а расстояние между ними осталось бы без изменений?

Ответ: $T_2 = \dfrac{T_1}{2\sqrt{2}}$.

Решение. Земля вращается вокруг центра масс системы Солнце—Земля, который практически совпадает с центром Солнца ($M_с \gg M_з$). Если бы масса Земли равнялась массе Солнца ($M_з = M_с$), то в этом случае центр масс системы Земля—Солнце находился бы на середине расстояния между Солнцем и Землей, т. е.

радиус земной орбиты уменьшился бы вдвое. Исходя из закона Кеплера, получим (период обращения Земли в первом случае T_1, во втором T_2): $\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R^3}{\left(\frac{R}{2}\right)^3}$, или $T_2=\frac{T_1}{2\sqrt{2}}$, следовательно, продолжительность земного года уменьшилась бы в $2\sqrt{2}$ раза.

6. Почему пуля, вылетевшая из ружья, не может отворить дверь, но пробивает в ней отверстие, тогда как давлением пальца дверь отворить легко, но проделать отверстие невозможно?

Решение. Выводы легко сделать, используя соотношение $F\Delta t=\Delta p$, где F — сила, Δt — время действия силы, Δp — изменение импульса тела.

7. Автомобили, имеющие двигатели мощностью P_1 и P_2, развивают скорости υ_1 и υ_2 соответственно. Какова будет скорость автомобилей, если их соединить тросом?

Ответ: $\upsilon=(P_1+P_2)\upsilon_1\upsilon_2/(P_1\upsilon_1+P_2\upsilon_2)$.

Решение. Силы сопротивления движению равны F_1 и F_2. Тогда мощности машин $P_1=F_1\upsilon_1$ и $P_2=F_2\upsilon_2$.

Если машины соединить тросами, $P_1+P_2=(F_1+F_2)\upsilon=\left(\frac{P_1}{\upsilon_1}+\frac{P_2}{\upsilon_2}\right)\upsilon$, тогда скорость автомобилей равна $\upsilon=\frac{(P_1+P_2)\upsilon_1\upsilon_2}{P_1\upsilon_1+P_2\upsilon_2}$.

8. Два тела массой $m_1=5$ кг и $m_2=10$ кг лежат на гладкой поверхности стола. Тела соединены шнуром массой $m=1$ кг. Какую минимальную силу F надо приложить к телу массой m_1 (к телу массой m_2), чтобы шнур разорвался? Известно, что прикрепленный к неподвижной стенке шнур разрывается при действии силы $T_0=400$ Н.

Ответ: $F_{\min}=582$ Н, $F'_{\min}=1067$ Н.

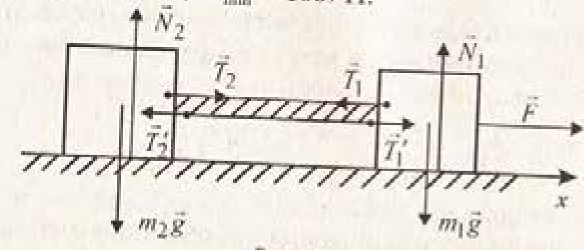


Рис. 4

Решение. На тела, кроме сил тяжести и реакции опоры, действуют со стороны шнура на тело m_2 — сила T_2, а на тело m_1 —

сила T_1. По третьему закону Ньютона на шнур действуют силы $\vec{T}_2'=-\vec{T}_2$ и $\vec{T}_1'=-\vec{T}_1$ со стороны второго и первого тела. Тогда $m_1\vec{g}+\vec{F}+\vec{N}_1+\vec{T}_1=m_1\vec{a}$; $\vec{T}_1'+\vec{T}_2'=m\vec{a}$; $m_2\vec{g}+\vec{N}_2+\vec{T}_2=m_2\vec{a}$.

Проекции на ось x имеют вид

$F-T_1=m_1a$; $T_1-T_2=ma$; $T_2=m_2a$.

Если пренебречь массой шнура ($m=0$), то в движении участвуют два тела и $T_1=T_2$. Если $m\neq 0$, то $T_1>T_2$. Силы, действующие в каком-либо сечении шнура со стороны одной его части на другую, увеличиваются от значения $T_2=\frac{m_2}{m_1+m+m_2}F$ на левом конце, до значения $T_1=\frac{m+m_2}{m_1+m+m_2}F$ на правом конце. При $T_1=T_0$ шнур разрывается, $F=F_{\min}=\frac{m_1+m+m_2}{m+m_2}T_0$; $F_{\min}=582$ Н. Если силу приложить к телу большей массы, то шнур разорвется при значении силы $F'_{\min}=\frac{m_1+m+m_2}{m+m_1}T_0$; $F'_{\min}=1067$ Н.

9. На горизонтальной плоскости стоят два одинаковых кубика массой M каждый. Между кубиками вставляют гладкий клин массой m с углом при вершине 2α. С каким ускорением будут двигаться кубики, если коэффициент трения между кубиком и плоскостью μ?

Ответ: $a=g[m(\mathrm{ctg}\,\alpha-\mu)-2\mu M]/[m(\mathrm{ctg}\,\alpha-\mu)\,\mathrm{ctg}\,\alpha+2M]$.

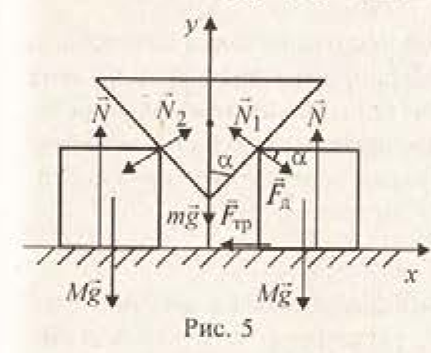


Рис. 5

Решение. Для правого кубика (рис. 5):

$M\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_д+\vec{F}_{тр}=M\vec{a}$; для клина $m\vec{g}+\vec{N}_1+\vec{N}_2=m\vec{a}_1$, $N_1=N_2$, где a — ускорение кубика, a_1 — ускорение клина. В проекциях получим: $F_д\cos\alpha-F_{тр}=Ma$;

$N-F_д\sin\alpha-Mg=0$;

$mg-2N_1\sin\alpha=ma_{1y}$;

$F_д=N_1$, $F_{тр}=\mu N$; $a_{1y}=a_{1x}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$; $a_{1x}=a$.

В результате ускорения кубиков равны по модулю, направлены в противоположные стороны и равны: $a=g\frac{m(\mathrm{ctg}\,\alpha-\mu)-2\mu M}{m(\mathrm{ctg}\,\alpha-\mu)\,\mathrm{ctg}\,\alpha+2M}$.

10. К вертикальному стержню, вращающемуся с угловой скоростью ω, прикреплена нить длиной l, на конце которой находится груз массой m. К грузу, в свою очередь, прикреплена другая нить такой же длины, несущая на конце второй груз массой m. Показать, что угол между первой нитью и вертикалью будет меньше угла между вертикалью и второй нитью. Массой нити пренебречь.

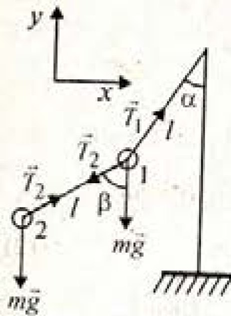


Рис. 6

Решение. Уравнение второго закона Ньютона для грузов:

для первого груза (рис. 6): $m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}_1$;

для второго груза $m\vec{g} + \vec{T}_2 = m\vec{a}_2$. Проекции уравнений на оси имеют вид:

1 груз (x): $T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta = m\omega^2 l \sin\alpha$; (1)

(y): $T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = mg$; (2)

2 груз (x): $T_2 \sin\beta = m\omega^2 l(\sin\alpha + \sin\beta)$; (3)

(y): $T_2 \cos\beta = mg$. (4)

Из (4) получим $T_2 = \dfrac{mg}{\cos\beta}$, затем из (2) следует $T_1 = \dfrac{2mg}{\cos\alpha}$. Подставив полученные выражения в (1) и (3), будем иметь

$$\frac{\omega^2 l}{g}\sin\alpha = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta; \quad \frac{\omega^2 l}{g}(\sin\alpha + \sin\beta) = \mathrm{tg}\,\beta.$$

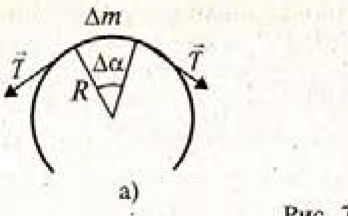
Сравнивая эти уравнения, получим $2\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta < \mathrm{tg}\,\beta$, следовательно, $\alpha < \beta$.

11. Плоский однородный упругий шнур массой m и длиной l_0 (в нерастянутом состоянии) имеет коэффициент упругости k. Склеив концы, шнур положили на гладкую горизонтальную плоскость, придали ему форму окружности и раскрутили до угловой скорости ω вокруг вертикальной оси, проходящей через центр окружности. Найдите силу натяжения шнура в этом состоянии.

Ответ: $T = m\omega^2 l_0/4\pi^2$.

Решение. Выделим малый элемент шнура массой Δm (рис. 7 а). Сила, действующая на этот элемент, равна равнодействующей сил натяжения $T\Delta\alpha$ (рис. 7б). По второму закону Ньютона $T\Delta\alpha = \Delta m\omega^2 R$.

Учтем, что $\Delta m = \dfrac{m}{2\pi}\Delta\alpha$ и $R = l/2\pi$, где l — длина шнура во вращающемся состоянии. Тогда $T\Delta\alpha = \dfrac{m}{2\pi}\Delta\alpha\omega^2\dfrac{l}{2\pi}$; $T = \dfrac{m\omega^2 l}{4\pi^2}$. (1)



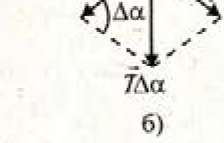


Рис. 7

С другой стороны, по закону Гука $T = k(l - l_0)$; откуда

$$l = \frac{T}{k} + l_0. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим $T = \dfrac{m\omega^2}{4\pi^2}\left(\dfrac{T}{k} + l_0\right)$; $T = \dfrac{km\omega^2 l_0}{4\pi^2 k - m\omega^2}$.

В случае нерастяжимого шнура $(k = \infty)$ $T = \dfrac{m\omega^2 l_0}{4\pi^2}$.

12. Бусинка массой m продета сквозь проволочное кольцо, поставленное вертикально, и находится в его верхней точке. Найти зависимость величины силы давления $F_д$ бусинки на кольцо, при ее соскальзывании, от угла α между вертикалью и радиусом R, проведенным через бусинку. Трением пренебречь.

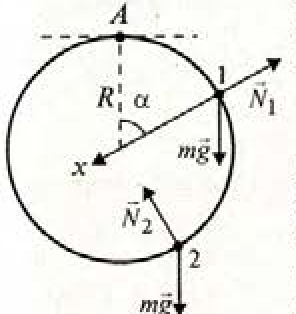


Рис. 8

Ответ: $F_д(\alpha) = mg(3\cos\alpha - 2)$.

Решение. Пусть бусинка находится в положении 1 (рис. 8). Под действием силы тяжести $m\vec{g}$ и силы реакции $\vec{N}_1$ бусинка движется по окружности с возрастающей по величине скоростью. $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$. Проекция на направление x (по радиусу к центру окружности) равна $mg\cos\alpha - N_1 = \dfrac{mv^2}{R}$. (1)

Скорость бусинки v в положении 1 можно определить, используя закон сохранения энергии. Нулевой уровень отсчета потенциальной энергии проходит через точку A, в которой полная энергия равна нулю. В точке 1 энергия равна сумме кинетической $\dfrac{mv^2}{2}$ и потенциальной $-\, mgR(1 - \cos\alpha)$, т. е. $\dfrac{mv^2}{2} - mgR(1 - \cos\alpha) = 0$,

откуда $v^2 = 2gR(1 - \cos\alpha)$. (2)

Из (1) и (2) определим силу давления бусинки на кольцо.

$$\vec{F}_д = -\vec{N}_1; \quad |\vec{F}_д| = |\vec{N}_1| = mg(3\cos\alpha - 2).$$

Если $\alpha = \alpha_0 = \arccos\frac{2}{3}$, бусинка находится в невесомости $F_д(\alpha_0) = 0$. При $0 \le \alpha < \alpha_0$ сила давления направлена к центру окружности, а при $\alpha_0 < \alpha \le \pi$ сила давления направлена по радиусу от центра. В нижней точке траектории ($\alpha = \pi$) центростремительное ускорение $a_n = v^2/R = 4g$ (см. (2)), а сила давления бусинки возрастает в 5 раз: $F_д = 5mg$.

13. На водопроводном кране с помощью резиновой трубки укреплена стеклянная трубка длиной 1 м и внутренним сечением 0,3 см², изогнутая внизу. Найдите, на какой угол отклонится трубка, если вода вытекает из нее со скоростью 2 м/с, а масса трубки m = 80 г.

Ответ: $\alpha = 12°38'$.

Решение. Вытекающая из отверстия вода образует силу противодействия $\vec{F}$, отклоняющую трубу на угол α. Силу тяжести трубки с водой разложим на силу $\vec{N}$, стремящуюся вернуть трубку в вертикальное положение, и силу $\vec{T}$, действующую вдоль трубки (рис. 9). Равновесие сил наступит тогда, когда моменты сил F и N относительно точки O будут одинаковы:

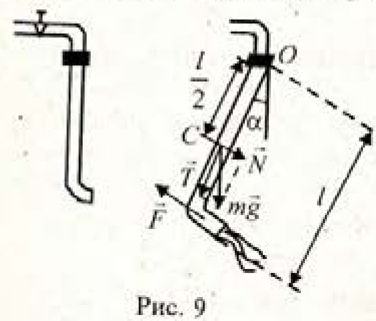


Рис. 9

$Fl = N\frac{l}{2}$, откуда $F = \frac{N}{2}$.

Из треугольника сил получим $N = m_1 g \sin\alpha$, значит, $F = \frac{1}{2}m_1 g\sin\alpha$, откуда $\sin\alpha = \frac{2F}{m_1 g}$, (1)

где m_1 — масса трубки с водой.

Если за время t из трубки вытекает вода массой m_2, то по третьему закону Ньютона $F \cdot t = m_2 v$. (2)

Эта масса воды перемещается в трубке сечением S на расстояние vt. Поэтому $m_2 = Sv\rho t$, где ρ — плотность воды. Подставим значение m_2 в уравнение (2) и получим: $F\cdot t = Svt\rho v$, откуда $F = S\rho v^2$. Сила тяжести трубки с водой $m_1 g = mg + Sl\rho g$.

Подставив полученные значения в уравнение (1), получим

$\sin\alpha = \frac{2S\rho v^2}{mg + Sl\rho g}$, $\sin\alpha = 0{,}2185$. $\alpha = 12°38'$.

14. Желоб в форме «мертвой петли» имеет в верхней части петли разрыв, симметричный относительно вертикали, проходящей через центр петли. Радиусы R желоба, идущие к краям разрыва, образуют угол 2α. С какой наименьшей высоты должен начать скользить без трения шарик, чтобы пролететь разрыв и снова попасть на желоб? Какова траектория шарика в разрыве желоба?

Ответ: $H = R(1 + \cos\alpha + 1/2\cos\alpha)$.

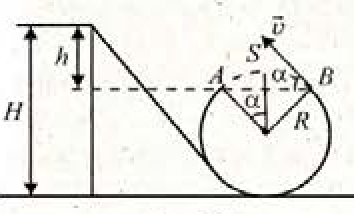


Рис. 10

Решение. Выберем нулевой уровень потенциальной энергии на уровне разрыва желоба на h ниже края желоба (рис. 10).

Тогда скорость шарика на уровне разрыва можно найти из закона сохранения энергии $mgh = \frac{mv^2}{2}$. (1)

Длина хорды $AB = S$, равная $S = 2R\sin\alpha$, — это дальность свободного полета, который должен совершить шарик, начавший движение от точки B со скоростью v под углом α к горизонту, т. е. $AB = S = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}$.

Тогда $\frac{v^2\sin 2\alpha}{g} = 2R\sin\alpha$, откуда $v^2 = \frac{2gR\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$. (2)

Подставляя (2) в (1), получаем: $h = \frac{R}{2\cos\alpha}$.

Высота края желоба над нижней точкой петли равна:

$$H = R + R\cos\alpha + \frac{R}{2\cos\alpha} = R\left(1 + \cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right).$$

Эта высота имеет наименьшее значение при $\alpha = 45°$. Траектория шарика в разрыве петли — парабола.

15. Какую работу нужно совершить, чтобы за время t = 10 мин подняться по движущемуся вниз эскалатору? Высота подъема равна h = 10 м, скорость эскалатора постоянна и равна $v_э$ = 0,5 м/с, угол наклона эскалатора к горизонту равен $\alpha = 40°$. Масса человека m = 70 кг.

Ответ: A = 140 кДж.

Решение. По закону сложения скоростей $\vec{v}_з = \vec{v}_ч + \vec{v}_э$, где $\vec{v}_з$ — скорость человека относительно земли, $\vec{v}_ч$ — скорость человека относительно эскалатора, $\vec{v}_э$ — скорость движения эскалатора. В скалярном виде $v_з = v_ч - v_э$. Домножим все слагаемые на время движения t, получим $v_з t = v_ч t - v_э t$, где $v_з t = l = h/\sin\alpha$ — длина эскалатора, $v_э t$ — путь, пройденный эскалатором, $v_ч t = S$ — расстояние, которое прошел человек относительно эскалатора. Тогда $S = l + v_э t = h/\sin\alpha + v_э t$. Во время подъема сила тяжести составляет угол $\beta = 90° + \alpha$ с перемещением S. Работа, которую соверша-

ет человек, $A = mg\left(h/\sin\alpha + v_э t\right)\left|\cos(90^\circ + \alpha)\right| = mg\left(h/\sin\alpha + v_э t\right)\sin\alpha$; $A = 140$ кДж. Часть работы mgh идет на увеличение потенциальной энергии человека, а другая часть $mgv_э t\sin\alpha$ вместе с работой мотора, приводящего эскалатор в движение, идет на преодоление сил трения.

16. Небольшое тело массой $m = 0{,}1$ кг движется по окружности радиусом $R = 0{,}5$ м с постоянным тангенциальным ускорением. К концу третьего оборота после начала движения кинетическая энергия тела оказалась равной $W_k = 750$ мДж. Найдите тангенциальное ускорение тела.

Ответ: $a_\tau = 0{,}8\,\text{м/с}^2$.

Решение. Кинетическая энергия тела $W_k = \dfrac{mv^2}{2}$; $v = \sqrt{\dfrac{2W_k}{m}}$.

$a_\tau = \dfrac{v}{t}$; $2\pi N = \dfrac{\omega t}{2}$; угловая скорость $\omega = \dfrac{v}{R}$; $2\pi N = \dfrac{vt}{2R}$;

$t = \dfrac{4\pi NR}{v}$ — время, за которое тело совершило три оборота.

$a_\tau = \dfrac{v^2}{4\pi NR} = \dfrac{W_k}{2\pi mNR}$; $a_\tau = 0{,}8\,\text{м/с}^2$.

17. Установить связь силы тяги двигателя ракеты с расходом топлива, если скорость истечения газов относительно ракеты равна $\vec{u}$.

Ответ: $F_{\text{тяги}} = u\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$.

Решение. Пусть система ракета—газ замкнута. В некоторый момент времени t масса ракеты с горючим m, ее скорость относительно Земли $\vec{v}$. За малый промежуток времени Δt масса горючего Δm сгорит и масса газа Δm со скоростью истечения $\vec{u}$, относительно ракеты, будет выброшена назад, в результате чего скорость ракеты станет $\vec{v} + \Delta\vec{v}$, а ее масса $m - \Delta m$.

Скорость газов относительно Земли в момент времени $t + \Delta t$ равна $v + \Delta v - u$. По закону сохранения импульса суммарный импульс системы ракета — газ в момент времени $(t + \Delta t)$ равен начальному импульсу ракеты $m\vec{v}$.

$mv = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v + \Delta v - u)$; $m\Delta v = \Delta m u$.

Разделим последнее уравнение на Δt, тогда

$m\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = ma = F_{\text{тяги}} = u\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$, где $F_{\text{тяги}}$ — сила тяги двигателя ракеты, $\Delta m/\Delta t$ — расход топлива. Сила тяги двигателя ракеты пропорциональна массе топлива, сгорающего за единицу времени, и скорости его истечения. При выводе учтено, что сила тяги направлена противоположно скорости истечения газов.

18. Два тела массой m и $3\,m$ движутся во взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 11а). После соударения тело массой m остановилось. Какую часть его энергии составляет выделившееся при ударе тепло?

Ответ: $\dfrac{Q}{W_{k_1}} = \dfrac{2}{3}$.

а) б)

Рис. 11

Решение. В отсутствии внешних сил суммарный импульс системы сохраняется $m\vec{v}_1 + 3m\vec{v}_2 = \vec{p}$ (рис. 11б):

$p = \sqrt{(mv_1)^2 + (3mv_2)^2} = m\sqrt{v_1^2 + 9v_2^2}$.

Кинетическая энергия системы до столкновения

$W_{k_1} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{3mv_2^2}{2}$.

Кинетическая энергия после соударения (кинетическая энергия большего тела, т. к. тело массой m остановилось):

$W_{k_2} = \dfrac{p^2}{2(3m)} = \dfrac{m\left(v_1^2 + 9v_2^2\right)}{6} = \dfrac{mv_1^2}{6} + \dfrac{3mv_2^2}{2}$.

Уменьшение кинетической энергии связано с выделением тепла при ударе $Q = W_{k_1} - W_{k_2} = \dfrac{1}{3}mv_1^2$. Тогда $\dfrac{Q}{mv_1^2/2} = \dfrac{mv_1^2/3}{mv_1^2/2} = \dfrac{2}{3}$.

19. Определите, во сколько раз уменьшится скорость шара, движущегося со скоростью v_1, при его соударении с покоящимся шаром, масса которого в n раз больше массы налетающего шара. Удар считать центральным и абсолютно упругим.

Ответ: $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{1+n}{1-n}$.

Решение. $m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$; (1)

$\dfrac{m_1 v_1^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2}$, (2)

где u_1 и u_2 — скорости шаров после соударения.

$\frac{m_2}{m_1} = n$; из (1) $v_1 = u_1 + nu_2$; $u_2 = \frac{v_1 - u_1}{n}$; $u_2^2 = \frac{(v_1 - u_1)^2}{n^2}$; (3)

согласно (2) $v_1^2 = u_1^2 + nu_2^2$. (4)

Из (4) и (3) получим

$$u_2^2 = \frac{v_1^2 - u_1^2}{n};\quad \frac{(v_1 - u_1)^2}{n^2} = \frac{(v_1 - u_1)(v_1 + u_1)}{n};\quad \frac{v_1 - u_1}{n} = v_1 + u_1.$$

Обозначим $x = \frac{v_1}{u_1}$; $\frac{x-1}{n} = x + 1$; $nx + n = x - 1$, $nx - x = -n - 1$;

$x(1-n) = 1 + n$, $x = \frac{1+n}{1-n}$; $\frac{v_1}{u_1} = \frac{1+n}{1-n}$.

20. В массивную трубку вставлена пружина, которая в свободном состоянии занимает всю длину трубки. На пружину положен шарик, который сжимает ее примерно вдвое. Затем трубка начинает в наклонном положении свободно падать. Что произойдет с шариком?

Решение. Пока трубка неподвижна, на шарик действует упругая сила, скомпенсированная силой тяжести шарика. Когда трубка падает, шарик в начале падает с меньшим ускорением, чем трубка, пружина распрямляется. Под действием пружины шарик выталкивается из трубки, приобретая при этом некоторую горизонтальную составляющую скорости, что приводит к его падению по параболе.

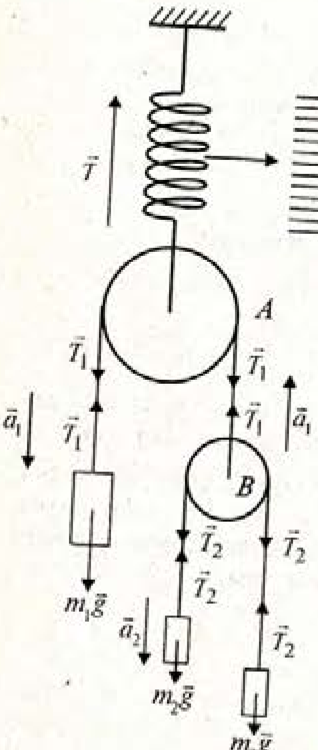


Рис. 12

21. Через невесомый блок A перекинута нить, к одному концу которой прикреплен груз m_1, а к другому — невесомый блок B, на нити которого висят грузы m_2 и m_3. Блок A со всеми грузами подвешен к пружинным весам (рис. 12). Определите ускорение a_1 груза m_1 и показание T пружинных весов, считая, что $m_2 > m_3$, $m_1 > m_2 + m_3$.

Решение. Блоки невесомы, поэтому $T = 2T_1$; $T_1 = 2T_2$;

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (1)$$

$$m_2 (a_2 - a_1) = m_2 g - T_2, \quad (2)$$

где a_2 — ускорение груза m_2, если бы блок B был неподвижен.

$$m_3(a_2 + a_1) = T_2 - m_3 g. \quad (3)$$

Из (1) и (2) получим $a_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}(a_1 + g)$. (4)

Подставив (4) в (2), найдем $T_2 = \frac{2m_2 m_3}{m_2 + m_3}(a_1 + g) = \frac{1}{2}T_1$.

Из (1) получим $a_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g$,

$$T = 2T_1 = \frac{16 m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g.$$

22. По наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α, скользит без трения клин, верхняя плоскость которого горизонтальна. Сверху клина лежит груз m (рис.13). Коэффициент трения между грузом и клином равен μ. Определите минимальный угол α, при котором груз начнет скользить по поверхности клина.

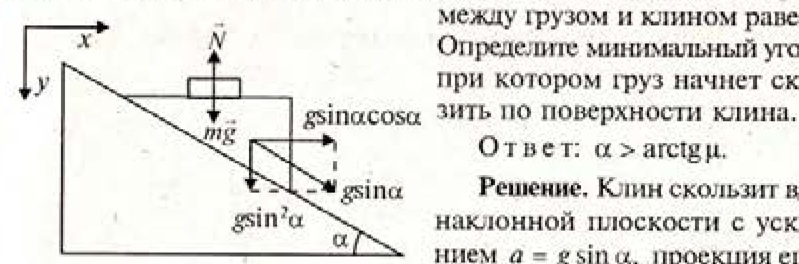


Рис. 13

Ответ: $\alpha > \mathrm{arctg}\,\mu$.

Решение. Клин скользит вдоль наклонной плоскости с ускорением $a = g\sin\alpha$, проекция его на ось x: $a_x = g\sin\alpha\cos\alpha$, а на ось y: $a_y = g\sin^2\alpha$.

Тогда сила реакции опоры для груза $N = mg - mg\sin^2\alpha = mg\cos^2\alpha$, а сила трения $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos^2\alpha$. Ускорение, сообщаемое этой силой грузу, равно $\mu g\cos^2\alpha$. Если $\mu g\cos^2\alpha < g\sin\alpha\cos\alpha$, то груз начнет скользить по клину, то есть $\mathrm{tg}\,\alpha > \mu$.

23. Скорость бутсы футболиста в момент удара по неподвижному мячу v. Найдите скорость мяча после абсолютно упругого удара. Скорость бутсы после удара не меняется, то есть масса бутсы значительно больше массы мяча.

Решение. Рассмотрим процесс соударения в системе отсчета, связанной с бутсой, движущейся со скоростью $\vec{v}$ относительно земли. В этой системе мяч налетает на бутсу со скоростью $-\vec{v}$, а после удара скорость мяча становиться равной $\vec{v}$. То есть после удара мяч движется со скоростью $\vec{v}$ относительно бутсы, а бутса движется со скоростью $\vec{v}$ относительно земли. Таким образом, скорость мяча после удара относительно земли равна $2v$ (по закону сложения скоростей).

24. В цилиндрический сосуд налита жидкость. Какую форму примет поверхность жидкости, если сосуд равномерно вращается вокруг оси с угловой скоростью ω?

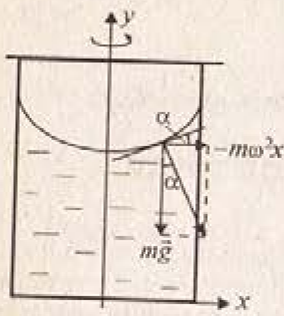


Рис. 14

Решение. Сосуд с жидкостью можно рассматривать как неинерциальную систему, в которой на каждую частицу действует сила инерции, равная $-ma = -m\omega^2 x$ (рис. 14). Равнодействующая этой силы и силы тяжести перпендикулярна поверхности жидкости. Производная $dy/dx = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной к поверхности жидкости.

$\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m\omega^2 x}{mg}$; $\int dy = \dfrac{\omega^2}{g}\int x dx$, тогда $y = \dfrac{\omega^2}{2g}x^2$. Поверхность жидкости имеет форму параболоида вращения.

СТАТИКА

Уровень I

10. РАВНОВЕСИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

10.1. На горизонтальной плоскости лежит груз массой $m_1 = 5{,}0$ кг, связанный с помощью веревки, перекинутой через блок, с грузом массой $m_2 = 2{,}0$ кг (рис. 10.1). Определите силу натяжения веревки и силу давления груза массой m_1 на плоскость.

Ответ: $T = 19{,}6$ Н, $F_д = 29{,}4$ Н.

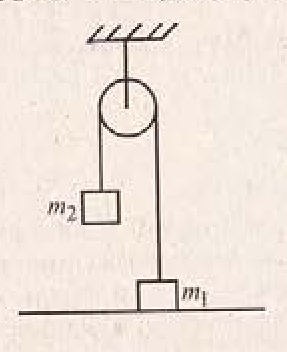


Рис. 10.1

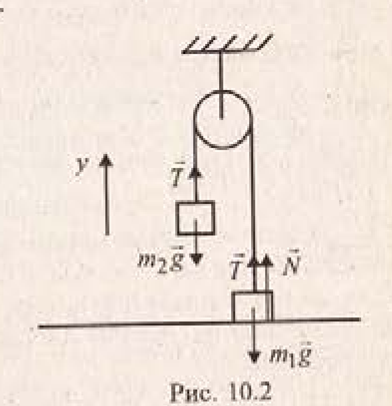


Рис. 10.2

Решение. Условие равновесия тела

$$\sum_i \vec{F}_i = 0;\quad \begin{cases} \vec{T} + m_1\vec{g} + \vec{N} = 0; \\ \vec{T} + m_2\vec{g} = 0; \end{cases} \text{(рис. 10.2).}$$

(y): $T + N - m_1 g = 0$;

(y): $T - m_2 g = 0$; $T = m_2 g$; $T = 19{,}6$ Н;

$|\vec{N}| = |\vec{F}_д| = g(m_1 - m_2)$; $F_д = 29{,}4$ Н.

10.2. Определите силу натяжения веревки, силу давления груза на наклонную плоскость, силу трения между грузом и плоскостью (рис. 10.3). $m_1 = 2{,}0$ кг, $m_2 = 1{,}0$ кг, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 90°$.

Ответ: $T = 9{,}8$ Н, $F_з = 7{,}2$ Н.

Решение. $\sum_i \vec{F}_i = 0$.

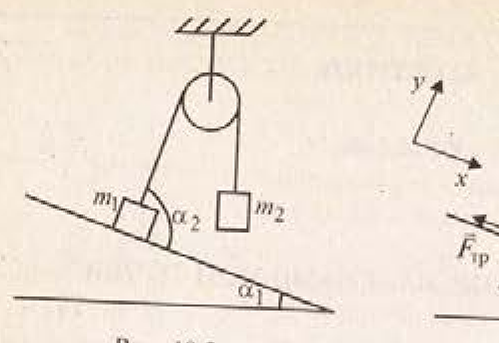


Рис. 10.3

Рис. 10.4

$$\begin{cases}\vec{T} + m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0;\\ \vec{T} + m_2\vec{g} = 0;\end{cases}$$ (рис. 10.4).

(y): $T = m_2 g$; $T = 9{,}8$ Н;

(x): $m_1 g \sin\alpha_1 - F_{тр} = 0$; $F_{тр} = m_1 g \sin\alpha_1$; $F_{тр} = 9{,}8$ Н.

(y): $N + T - m_1 g \cos\alpha_1 = 0$;

$N = m_1 g \cos\alpha_1 - T = m_1 g \cos\alpha_1 - m_2 g$;

$|\vec{N}| = |\vec{F}_д| = 7{,}2$ Н.

10.3. Система грузов массами m_1, m_2, m_3 (рис. 10.5) находится в равновесии. Найдите массу m_3 и силу давления, производимого массой m_1 на наклонную плоскость, если массы m_1, m_2 и угол α, который составляет наклонная плоскость с горизонтом, известны. Трение отсутствует.

Ответ: $m_3 = (m_1 - m_2)\sin\alpha$, $F_д = (m_1 - m_2) g\cos\alpha$.

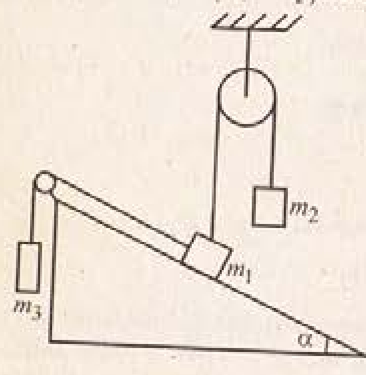


Рис. 10.5

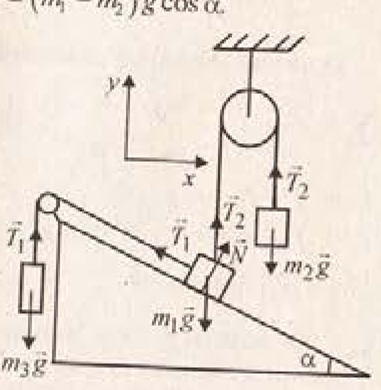


Рис. 10.6

Решение. $T_1 = m_3 g$; $T_2 = m_2 g$; (рис. 10.6). Для тела m_1:

(y): $T_2 + T_1 \sin\alpha + N\cos\alpha = m_1 g$;

(x): $N\sin\alpha = T_1\cos\alpha$; $T_1 = \dfrac{N\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

$m_2 g + N\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + N\cos\alpha = m_1 g$; $|\vec{N}| = |\vec{F}_д| = (m_1 - m_2) g\cos\alpha$;

$m_3 = \dfrac{T_1}{g} = (m_1 - m_2)\sin\alpha$.

10.4. С какой минимальной силой F, направленной горизонтально, нужно прижать плоский брусок к стене, чтобы он не соскользнул вниз? Масса бруска $m = 5{,}0$ кг.

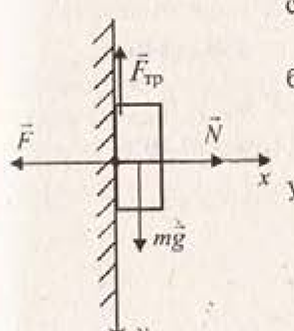


Рис. 10.7

Коэффициент трения между стенкой и бруском $\mu = 0{,}10$.

Ответ: $F = 0{,}49$ кН.

Решение. Силы, действующие на брусок, указаны на рис. 10.7.

$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0$;

(y): $mg - F_{тр} = 0$; $F_{тр} = \mu N$; $mg = \mu N$.

По третьему закону Ньютона $|\vec{N}| = |\vec{F}|$, где F — сила давления.

Тогда $F_{min} = N = \dfrac{mg}{\mu}$; $F_{min} = 0{,}49$ кН.

10.5. Груз массой 15 кг, подвешенный на проволоке, отклоняется на угол 45° от вертикального положения силой F, действующей в горизонтальном направлении. Определите эту силу и силу T натяжения проволоки.

Рис. 10.8

Ответ: $F = 0{,}15$ кН, $T = 0{,}21$ кН.

Решение.

$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = 0$ (рис. 10.8);

(x): $F - T\sin\alpha = 0$;

(y): $T\cos\alpha - mg = 0$;

$T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$; $T = 0{,}21$ кН;

$F = T\sin\alpha$; $F = 0{,}15$ кН.

10.6. Груз массой 60 кг висит на двух тросах (рис. 10.9), причем угол ACB равен 120°. Определите силы, действующие на тросы. Угол OBC равен 90°.

Ответ: $F_{AC} = 0{,}68$ кН, $F_{CB} = 0{,}34$ кН.

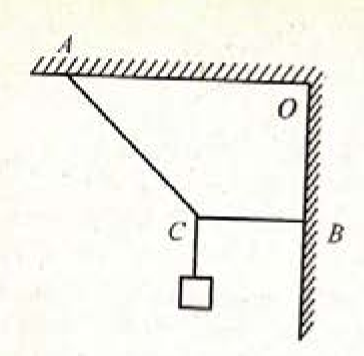


Рис. 10.9

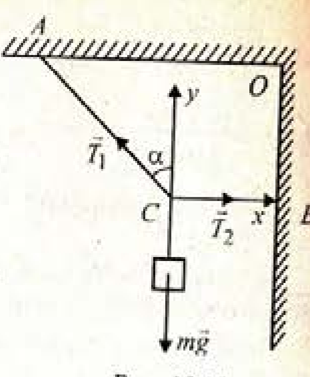


Рис. 10.10

Решение. Условие равновесия тела $m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$;

(x): $T_2 - T_1 \sin\alpha = 0$; $\alpha = 120° - 90° = 30°$ (рис. 10.10);

(y): $T_1 \cos\alpha - mg = 0$.

$$F_{AC} = T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha}; \quad F_{CB} = T_2 = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$F_{AC} = T_1 = 0{,}68$ кН; $F_{CB} = T_2 = 0{,}34$ кН.

10.7. Груз массой 10 кг подвешен на кронштейне ABC (рис. 10.11). Угол между горизонтальным стержнем AB и подкосом BC равен $\alpha = 60°$. Определите силы, действующие на стержень и подкос.

Ответ: $F_{AB} = 56{,}6$ Н, $F_{BC} = 113$ Н.

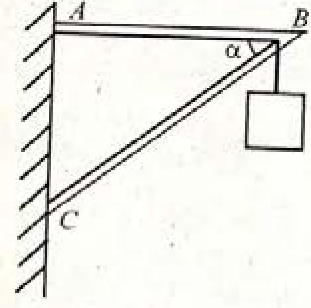


Рис. 10.11

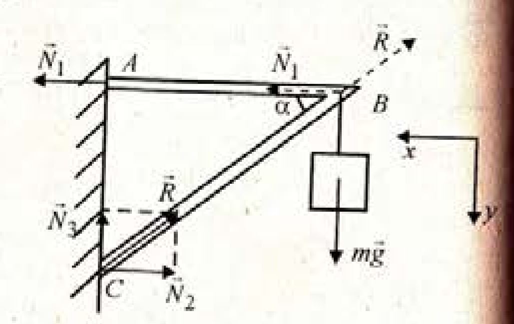


Рис. 10.12

Решение. Силы, действующие на кронштейн, указаны на рис. 10.12. Равнодействующая $\vec{R}$ сил реакции $\vec{N}_2$ и $\vec{N}_3$ направлена по BC. Стержень AB растягивается силой $\vec{N}_1$, стержень BC сжимается силой $\vec{R}$. Силы переносим вдоль действия сил в точку B, тогда $\vec{N}_1 + \vec{R} + m\vec{g} = 0$.

(x): $N_1 - R\cos\alpha = 0$; $N_1 = R\cos\alpha$;

(y): $mg - R\sin\alpha = 0$; $mg = R\sin\alpha$;

$N_1 = mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha$; $N_1 = F_{AB} = 56{,}6$ Н;

$$R = \frac{N_1}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\sin\alpha}; \quad R = F_{BC} = 113 \text{ Н}.$$

10.8. Чему равен вес груза, висящего на кронштейне, если сила, с которой растягивается горизонтальный стержень, $F = 90$ Н? Угол между стержнем и подкосом $\alpha = 45°$ (рис. 10.11).

Ответ: $P = 90$ Н.

Решение самостоятельное (см. задачу 10.7).

10.9. Уличный фонарь массой 20 кг висит на двух стержнях, прикрепленных к стене на расстоянии 60 см друг от друга (рис. 10.13). Длина стержней: $AB = 90$ см, $BC = 120$ см. Определите силы, действующие на стержни.

Ответ: $F_1 = 0{,}29$ кН, $F_2 = 0{,}39$ кН.

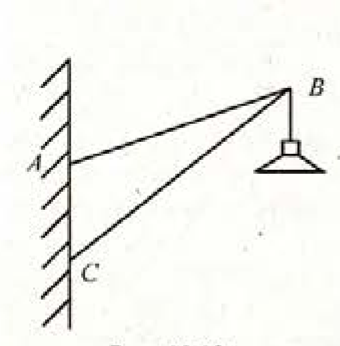


Рис. 10.13

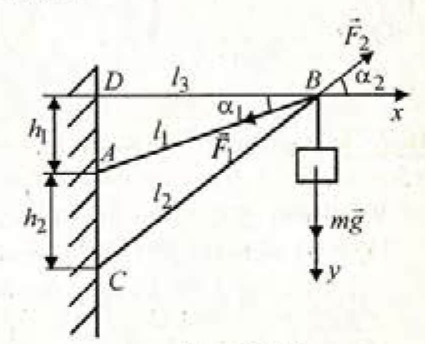


Рис. 10.14

Решение. Силы, действующие на стержень, показаны на рис. 10.14. Силы параллельно перенесены в точку B. Стержень AB растянут, BC — сжат.

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0$;

(x): $F_2\cos\alpha_2 - F_1\cos\alpha_1 = 0$; (1)

(y): $mg + F_1\sin\alpha_1 - F_2\sin\alpha_2 = 0$. (2)

В ΔABD и ΔCBD обозначим $AB = l_1$; $CB = l_2$; $DB = l_3$;

$AD = h_1 = 60$ см; $CA = h_2$. $l_3^2 = l_1^2 - h_1^2 = l_2^2 - (h_1 + h_2)^2$, откуда

$$h_1 = \frac{l_2^2 - l_1^2 - h_2^2}{2h_2}; \quad h_1 = 0{,}225 \text{ м}. \quad l_3 = \sqrt{l_1^2 - h_1^2} = 0{,}871 \text{ м};$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{l_3}{l_2} = 0{,}726; \quad \sin\alpha_2 = \frac{h_1 + h_2}{l_2} = 0{,}687; \quad \sin\alpha_1 = \frac{h_1}{l_1} = 0{,}250;$$

$\cos\alpha_1 = \dfrac{l_3}{l_1} = 0{,}968$. Из (1) получим $F_1 = \dfrac{F_2\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = 0{,}75F_2$, подставим в (2) и получим $mg + 0{,}75F_2\sin\alpha_1 - F_2\sin\alpha_2 = 0$.

$F_2 = 0{,}39$ кН; $F_1 = 0{,}29$ кН.

10.10. К концам нити, перекинутой через два блока, подвешены грузы массами $m_1 = 60$ г, $m_2 = 80$ г (рис. 10.15). Когда к нити подвесили третий груз, то угол, образованный нитями, стал $\alpha = 90°$. Определите массу третьего груза.

Ответ: $m_3 = 100$ г.

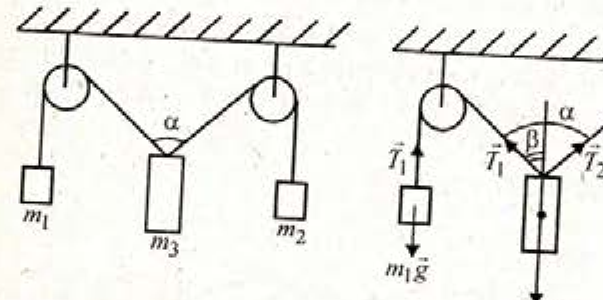


Рис. 10.15

Рис. 10.16

Решение. $T_1 = m_1g$; $T_2 = m_2g$. Для третьего тела (рис. 10.16)

(x): $T_2\sin(90° - \beta) - T_1\sin\beta = 0$;

(y): $T_1\cos\beta + T_2\cos(90° - \beta) - m_3g = 0$;

$T_2\cos\beta = T_1\sin\beta$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{T_2}{T_1} = 1{,}33$; $\beta = 53°$.

$m_3 = m_1\cos\beta + m_2\sin\beta$; $m_3 = 100$ г.

10.11. К концам нити, перекинутой через два блока, подвесили два одинаковых груза массой $m_1 = m_2 = m = 5{,}0$ кг каждый. Какой груз надо подвесить к нити между блоками, чтобы при равновесии угол α был равен 120°?

Ответ: $m_x = 5{,}0$ кг.

Решение самостоятельное. См задачу 10.10.

10.12. К концам нити, перекинутой через два блока, подвешены грузы. Когда между блоками (рис. 10.17) подвесили груз массой 150 г, угол ABC стал равен 30° и угол BAC равен углу BCA. Определите массы грузов m_1 и m_2.

Ответ: $m_1 = 0{,}13$ кг, $m_2 = 0{,}04$ кг.

Решение. $\sum\limits_i \vec{F}_i = 0$;

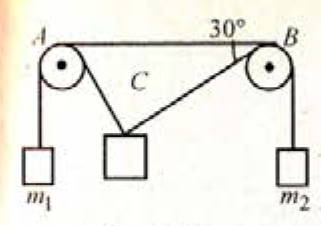


Рис. 10.17

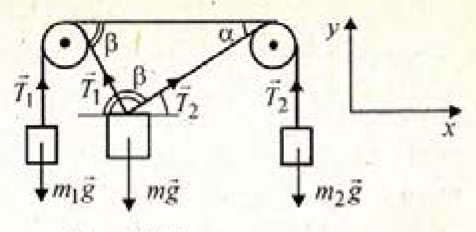


Рис. 10.18

$T_1 = m_1g$; $T_2 = m_2g$ (рис. 10.18);

(x): $T_2\cos\alpha - T_1\cos\beta = 0$; $\alpha = 30°$; $\beta = 75°$.

$$m_2g\cos\alpha = m_1g\cos\beta;\quad m_2 = m_1\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}; \qquad (1)$$

(y): $mg = T_1\sin\beta + T_2\sin\alpha$;

$m = m_1\sin\beta + m_2\sin\alpha$.

Учитывая (1), получим $m = m_1\sin\beta + m_1\cos\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha$; откуда

$$m_1 = \frac{m}{\sin\beta + \cos\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha};\ m_1 = 0{,}13 \text{ кг. Из (1) } m_2 = 0{,}04 \text{ кг.}$$

10.13. Веревка привязана к крючку A и перекинута через блок C (рис. 10.19). К веревке в точке B прикреплен груз массой $M = 20$ кг, причем точка B не может перемещаться по веревке. Какой массы груз следует прикрепить к концу веревки, чтобы сила натяжения веревки на участке AB была в два раза больше, чем в остальной ее части, и угол $ABC = 90°$?

Ответ: $m = 8{,}9$ кг.

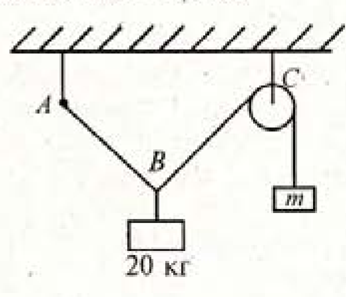


Рис. 10.19

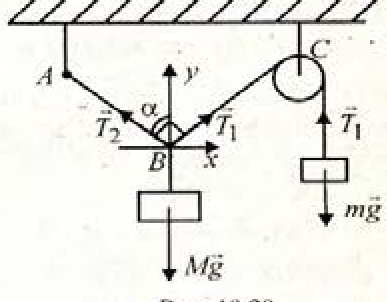


Рис. 10.20

Решение. Условие равновесия для тел m и M (рис. 10.20)

$$m\vec{g} + \vec{T}_1 = 0;\ (y):\ mg = T_1. \qquad (1)$$

$M\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$;

$$(x):\ T_1\cos\alpha - T_2\sin\alpha = 0; \qquad (2)$$

(y): $T_1 \sin\alpha + T_2 \cos\alpha - Mg = 0$. (3)

Здесь учтено, что угол ABC равен 90°. По условию $T_2 = 2T_1$, а из (1) $T_1 = mg$. Подставим полученные результаты в (2). Отсюда следует $mg\cos\alpha = 2mg\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha = 0,5$; $\alpha = 26,5°$; $\sin\alpha = 0,45$; $\cos\alpha = 0,89$. Из (3) получим $m = \dfrac{M}{2\cos\alpha + \sin\alpha}$; $m = 8,9$ кг.

10.14. Фонарь массой $M = 10$ кг подвешен над серединой улицы шириной $l = 10$ м на тросе, допустимая сила натяжения которого $T = 500$ Н. Какова должна быть высота крепления концов троса, если точка крепления фонаря находится на высоте $h = 5,0$ м?

Ответ: $H = 5,5$ м.

Решение. $Mg = 2T\cos\alpha$; (рис. 10.21).

$$\cos\alpha = \frac{H-h}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (H-h)^2}};$$

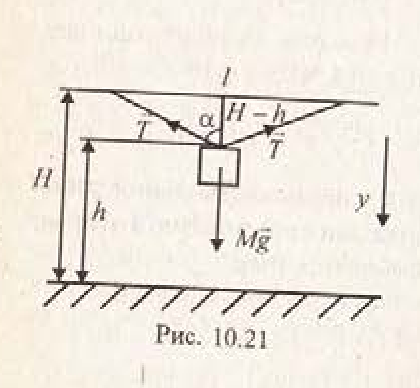


Рис. 10.21

$$Mg = 2T\frac{H-h}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (H-h)^2}};$$ откуда

$$H = h + \frac{l}{2\sqrt{\left(\frac{2T}{Mg}\right)^2 - 1}};\quad H = 5,5 \text{ м}.$$

10.15. К тросу длиной $l = 3$ м, концы которого закреплены на одной высоте, на расстояниях $a = 1$ м от точек закрепления подвешены два груза массой $m = 1$ кг каждый. Провисание троса в средней части составило $\Delta l = 10$ см. Найдите силы натяжения T_1, T_2, T_3 троса на каждом из трех участков.

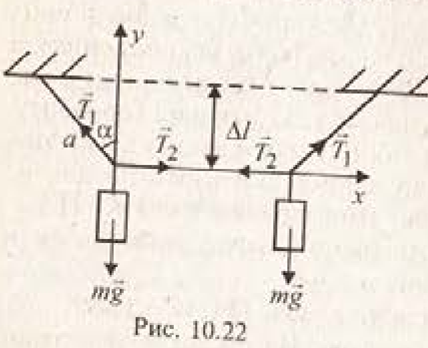


Рис. 10.22

Ответ: $T_1 = T_3 = 98$ Н, $T_2 = 97,5$ Н.

Решение. $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = 0$ (рис. 10.22).

(y): $T_1\cos\alpha = mg$; $\cos\alpha = \dfrac{\Delta l}{a}$; $T_1 = \dfrac{mga}{\Delta l}$; $T_1 \approx 98$ Н.

(x): $T_2 = T_1\sin\alpha$; $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{a^2 - (\Delta l)^2}}{a}$; $T_2 = T_1\dfrac{\sqrt{a^2 - (\Delta l)^2}}{a}$;

$T_2 \approx 97,5$ Н.

10.16. Можно ли натянуть горизонтальный трос так, чтобы он не провисал?

Ответ: Трос имеет вес, поэтому, чтобы он не провисал, натяжение троса должно быть бесконечно большим.

10.17. На двух взаимно перпендикулярных наклонных плоскостях, из которых одна наклонена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, лежит однородный шар массой $m = 10$ кг (рис. 10.23). Найдите силы давления $F_{д_1}$ и $F_{д_2}$ шара на каждую плоскость. Трением пренебречь.

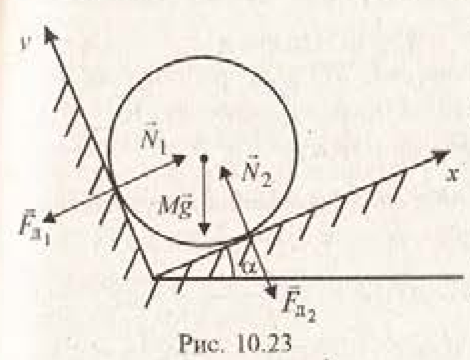


Рис. 10.23

Ответ: $F_{д_1} = 49$ Н; $F_{д_2} = 85$ Н.

Решение. Условие равновесия сил $\sum_i \vec{F}_i = 0$;

$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g} = 0$, где $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — силы нормальной реакции плоскостей, на которые опирается шар.

(x): $N_1 - mg\sin\alpha = 0$;

(y): $N_2 - mg\cos\alpha = 0$.

По третьему закону Ньютона $\left|\vec{N}_1\right| = \left|\vec{F}_{д_1}\right|$; $\left|\vec{N}_2\right| = \left|\vec{F}_{д_2}\right|$,

тогда $F_{д_1} = N_1 = mg\sin\alpha = 49$ Н; $F_{д_2} = N_2 = mg\cos\alpha = 85$ Н.

10.18. На доске стоит однородный сплошной цилиндр высотой $h = 30$ см и диаметром основания $d = 12$ см. Один конец доски опирается на землю (без скольжения), а другой ее конец можно поднимать, изменяя ее угол наклона горизонту. При каких углах наклона доски цилиндр начнет скользить по доске? начнет переворачиваться? Коэффициент трения между цилиндром и доской $\mu = 0,4$.

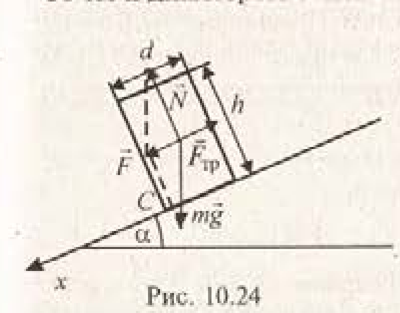


Рис. 10.24

Ответ: $\alpha_1 \geq 22°$, $\alpha_2 = 11,3°$.

Решение. На цилиндр действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $N = mg\cos\alpha$ и сила трения $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Проекция на ось x равна (рис. 10.24) $mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha$.

Цилиндр начнет скользить, когда $mg\sin\alpha \geq \mu mg\cos\alpha$, т. е. $\text{tg}\,\alpha_1 \geq \mu$, т. е. угол наклона плоскости с горизонтом, когда начнется скольжение $\alpha_1 \geq \text{arctg}\,\mu$, $\alpha_1 \geq 22°$. Опрокидывание цилиндра будет наблюдаться, когда линия действия силы тяжести пройдет через крайнюю точку C плоскости опоры цилиндра. Из рис. 10.24 следует $\text{tg}\,\alpha_2 = \frac{0,5d}{0,5h} = 0,2$; $\alpha_2 = 11,3°$; $\alpha_2 < \alpha_1$ опрокидывание цилиндра будет наблюдаться раньше, чем он начнет скользить.

10.19. На наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30°$ находится ящик массой $m = 20$ кг. Коэффициент трения между ящиком и наклонной плоскостью $\mu = 0,1$. С какой минимальной силой F нужно прижать ящик, чтобы он находился в равновесии?

Ответ: $F_{\min} = 80,6$ Н; $\beta = 5,7°$.

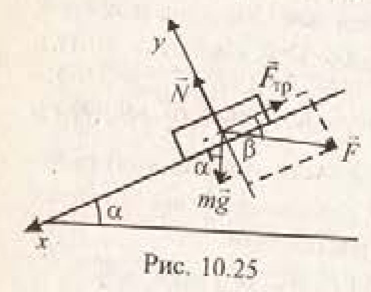


Рис. 10.25

Решение. Условие равновесия тела (рис. 10.25):

$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0$;

(x): $mg\sin\alpha - F\cos\beta - \mu N = 0$;

(y): $N - mg\cos\alpha - F\sin\beta = 0$.

Отсюда $F = \dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}mg.$ (1)

Сила F_1, с которой ящик прижимают к наклонной плоскости, будет минимальной, если знаменатель (1) максимален. Найдем максимум функции, приравняв производную от знаменателя по углу β к нулю.

$$\frac{d(\cos\beta + \mu\sin\beta)}{d\beta} = 0; \quad -\sin\beta + \mu\cos\beta = 0; \quad \text{tg}\,\beta = \mu.$$

(В том, что этот угол соответствует максимуму, можно убедиться, взяв вторую производную по β: она отрицательна.) Учтем, что

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\beta}}; \quad \sin\beta = \frac{\text{tg}\beta}{\sqrt{1+\text{tg}^2\beta}},$$

тогда $F = F_{\min} = \dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}$; $\text{tg}\,\beta = \mu$;

$F_{\min} = 80,6$ Н; $\beta = \text{arctg}\,\mu = 5,7°$.

10.20. Исходя из условий задачи 10.19, определите минимальную силу, с которой ящик можно поднимать по наклонной плоскости.

Ответ: $F_{\min} = 97,6$ Н; $\beta = 5,7°$.

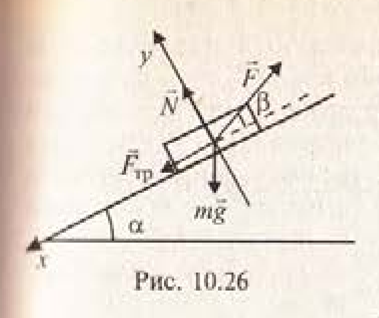


Рис. 10.26

Решение. $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0$ (рис. 10.26).

(x): $mg\sin\alpha - F\cos\beta + \mu N = 0$;

(y): $N - mg\cos\alpha + F\sin\beta = 0$;

отсюда $F = \dfrac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}mg.$

Аналогично анализу, приведенному в задаче 10.19, получаем $F = F_{\min}$ при $\text{tg}\,\beta = \mu$. Тогда $F = F_{\min} = \dfrac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}mg$; $F_{\min} = 97,6$ Н, $\beta = 5,7°$.

11. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

11.1. На стержень действует две параллельные силы $F_1 = 10$ Н и $F_2 = 20$ Н. Расстояние между линиями действия сил $l = 1,2$ м. Определите, в каком месте и какую силу нужно приложить к стержню, чтобы он находился в равновесии.

Ответ: $F_3 = 30$ Н, $x_{(F_3-F_2)} = 40$ см.

Решение. Условие равновесия твердого тела с неподвижной осью вращения $\sum_i \vec{F}_i = 0$; (1)

$\sum_i \vec{M}_i = 0.$ (2)

Из (1) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$; $F_1 + F_2 - F_3 = 0$; $F_3 = 30$ Н (рис. 11.1). Из (2) для моментов сил относительно точки O: $F_2x - F_1(l - x) = 0$; $x = \dfrac{F_1 l}{F_1 + F_2} = 0,4$ м. Силу $\vec{F}_3$ можно также найти, использовав уравнение для моментов сил (2) относительно оси, проходящей через точку A. $F_3(l - x) = F_2 l$;

$$F_3 = \frac{F_2 l}{l - x} = 30 \text{ Н}.$$

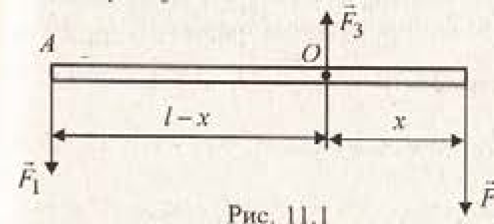


Рис. 11.1

11.2. Определите равнодействующую и ее положение для двух антипараллельных сил $F_1 = 15$ Н и $F_2 = 60$ Н. Расстояние между линиями действия сил $l = 90$ см.

Ответ: $F_3 = 45$ Н; $x_{(F_3-F_2)} = 30$ см.

Решение самостоятельное. См. задачу 11.1.

11.3. К стержню длиной $l = 120$ см приложены три параллельных силы одинакового направления: у левого конца $F_1 = 30$ Н, в середине $F_2 = 80$ Н, у правого конца $F_3 = 90$ Н. Чему равна равнодействующая этих сил? Где лежит точка ее приложения?

Ответ: $F_р = 200$ Н; $x = 18$ см.

Решение. Равнодействующая сила $\vec{F}_р$ равна

$$\vec{F}_р = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3;$$

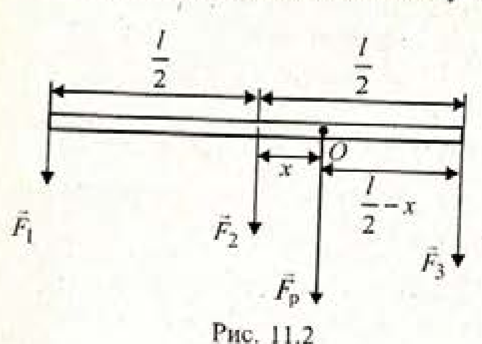


Рис. 11.2

$$F_р = F_1 + F_2 + F_3 = 200 \text{ Н}.$$

Исходя из второго условия равновесия, запишем условие равенства моментов сил относительно оси, проходящей через точку О (точку приложения равнодействующих сил) (рис. 11.2):

$$F_3\left(\frac{l}{2} - x\right) - F_2 x - F_1\left(\frac{l}{2} + x\right) = 0; \quad x = \frac{l(F_3 - F_1)}{2(F_1 + F_2 + F_3)} = 0{,}18 \text{ м}.$$

11.4. Из двух антипараллельных сил большая равна 30 Н. Найдите меньшую силу и равнодействующую силу, если отношение расстояний точек приложения составляющих сил от точки приложения равнодействующей равно 0,4.

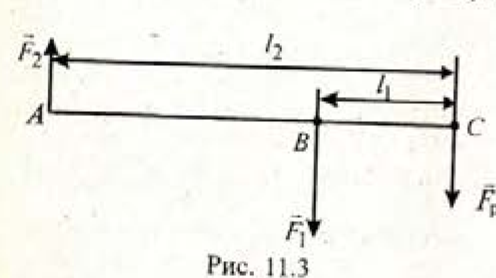


Рис. 11.3

Ответ: $F_2 = 12$ Н, $F_р = 18$ Н.

Решение. Силы приложены в точках A и B, в точке C приложена равнодействующая сил. Условие равновесия (рис. 11.3): $\frac{l_1}{l_2} = \frac{F_2}{F_1}$; $F_2 = \frac{l_1}{l_2} F_1 = 12$ Н. (по условию $\frac{l_1}{l_2} = 0{,}4$). Равнодействующая сила $F_р = F_1 - F_2 = 18$ Н.

11.5. К горизонтальной балке длиной $l = 1{,}2$ м и массой $m = 1{,}5$ кг, опирающейся на концы, подвешены три груза на разных расстояниях от левого конца: $m_1 = 2$ кг, на расстоянии $l_1 = 30$ см, $m_2 = 3$ кг на расстоянии $l_2 = 0{,}5$ м и $m_3 = 6$ кг на расстоянии $l_3 = 100$ см. Определите силы давления на опоры.

Ответ: $F_{д_1} = 49$ Н, $F_{д_2} = 73{,}5$ Н.

Рис. 11.4

Решение. Уравнение моментов относительно опоры A (рис. 11.4) — условие равновесия балки $N_2 l = m_1 g l_1 + m_2 g l_2 + mg\frac{l}{2} + m_3 g l_3$. По третьему закону Ньютона сила реакции опоры N по модулю равна силе давления $F_д$: $|\vec{N}| = |\vec{F}_д|$. Тогда $N_2 = F_{д_2} = \frac{g}{l}\left(m_1 l_1 + m_2 l_2 + m\frac{l}{2} + m_3 l_3\right)$, $F_{д_2} = 73{,}5$ Н. Уравнение моментов относительно точки B:

$$N_1 l = m_1 g(l - l_1) + m_2 g(l - l_2) + mg\frac{l}{2} + m_3 g(l - l_3);$$

$$N_1 = F_{д_1} = \frac{g}{l}\left[m_1(l - l_1) + m_2(l - l_2) + m\frac{l}{2} + m_3(l - l_3)\right], \quad F_{д_1} = 49 \text{ Н}.$$

11.6. Два шара массой $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 6$ кг скреплены стержнем, масса которого $m = 2$ кг. Определите положение общего центра масс, если радиус первого шара $R_1 = 6$ см, второго $R_2 = 8$ см, длина стержня $l = 30$ см.

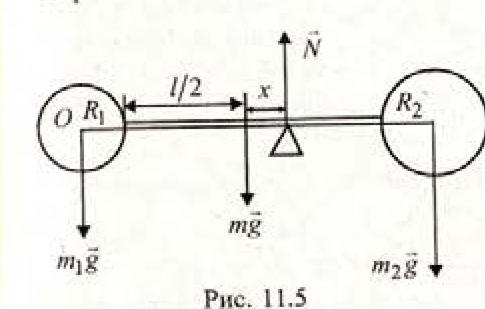


Рис. 11.5

Ответ: Правее центра стержня на $x = 4{,}5$ см.

Решение. Центр масс системы совпадает с центром тяжести. Предположим, что он находится справа от центра стержня на расстоянии x от его середины (рис. 11.5). Если в этом месте поставить опору, то система будет в равновесии, т. е. сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через любую точку равна нулю. $\vec{N}$ — сила нормальной реакции опоры. Сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через точку O, равна нулю:

$$mg\left(\frac{l}{2}+R_1\right)+m_2g\,(l+R_1+R_2)-N\left(\frac{l}{2}+R_1+x\right)=0. \qquad (1)$$

Сумма проекций всех сил на вертикальное направление также равна нулю: $N - m_1g - mg - m_2g = 0.$ (2)

Из уравнений (1) и (2) получаем

$$x=\frac{(m_2-m_1)\,l/2+m_2R_2-m_1R_1}{m_1+m_2+m};\quad x=4,5\ \text{см}.$$

Результат можно получить проще, если записать уравнение моментов всех сил относительно оси, проходящей через опору.

11.7. На доске длиной $l = 4,0$ м и массой $M = 30$ кг качаются два мальчика массами $m_1 = 30$ кг и $m_2 = 40$ кг. Где должна быть у доски точка опоры, если мальчики сидят на концах доски?

Ответ: $x = 0,20$ м от середины.

Решение. Условие равновесия (рис. 11.6) $\sum \vec{M}_i = 0$, моменты сил берем относительно оси, проходящей через опору O. Тогда

$$m_2g\left(\frac{l}{2}-x\right)-m_1g\left(\frac{l}{2}+x\right)-Mgx=0,$$

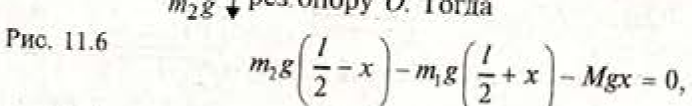


Рис. 11.6

$$x=\frac{(m_2-m_1)\cdot l}{2(m_1+m_2+M)}=0,2\ \text{м}.$$

11.8. Однородный стержень с прикрепленным на одном из его концов грузом массой $m = 1,2$ кг находится в равновесии в горизонтальном положении, если его подпереть на расстоянии 1/5 длины стержня от груза. Найдите массу стержня M.

Ответ: $M = 0,8$ кг.

Решение. Равновесие наблюдается, если $\sum \vec{M}_i = 0$. Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку опоры O (рис. 11.7).

Рис. 11.7

$$Mg\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{5}\right)-mg\frac{l}{2}=0,\quad M=\frac{2}{3}m=0,8\ \text{кг}.$$

11.9. Два человека несут трубу массой $m = 80$ кг и длиной $l = 5$ м. Первый человек поддерживает трубу на расстоянии $a = 1$ м от ее

конца, а второй держит противоположный конец трубы. Найдите силу давления трубы, испытываемую каждым человеком.

Ответ: $N_1 = 490$ Н; $N_2 = 294$ Н.

Решение самостоятельное.

11.10. К концам горизонтального стержня длиной $l = 0,8$ м и массой $m = 2$ кг подвешены два груза: слева массой $m_1 = 1$ кг, справа — $m_2 = 3$ кг. На каком расстоянии со стороны большей массы следует подпереть стержень, чтобы он остался в равновесии?

Ответ: $x = 0,27$ м.

Решение самостоятельное.

11.11. Однородная балка массой $m_1 = 100$ кг и длиной $l = 1$ м опирается на две опоры: одна на краю балки, вторая на расстоянии $d = 0,5$ м от середины балки O (рис. 11.8). На балке находятся два груза массами $m_2 = 30$ кг $m_3 = 85$ кг и в положениях, указанных на рис. 11.8. При каком расстоянии x сила давления на опору A будет равна нулю?

Ответ: $x = 2$ м.

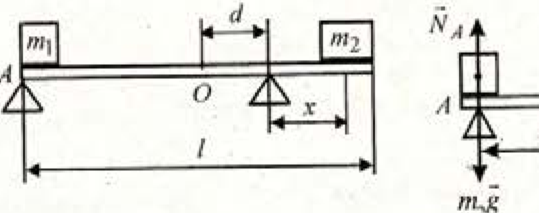


Рис. 11.8

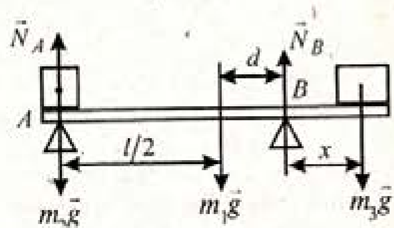


Рис. 11.9

Решение. Условие равновесия $\sum \vec{M}_i = 0$, моменты сил берем относительно оси, проходящей через опору B (рис. 11.9):

$$m_3gx+(N_A-m_2g)\left(\frac{l}{2}+d\right)-m_1gd=0.$$

По условию $N_A = 0$, тогда

$$x=\frac{m_1gd+m_2g\,(l/2+d)}{m_3g}=\frac{(m_1+m_2)d+m_2l/2}{m_3}=2\ \text{м}.$$

11.12. Стержень длиной $l = 10$ см подвешен за концы на двух пружинах жесткостью $k_1 = 98$ Н/см и $k_2 = 3\,k_1$. На каком расстоянии от центра стержня и какой массы груз надо подвесить к стержню, чтобы стержень сместился на высоту $\Delta h = 1,0$ см и остался висеть горизонтально? Массой стержня пренебречь.

Ответ: $m = 40$ кг, $x = 2,5$ см.

Решение. Условие равновесия $\sum \vec{F}_i = 0;\ \sum \vec{M}_i = 0,$

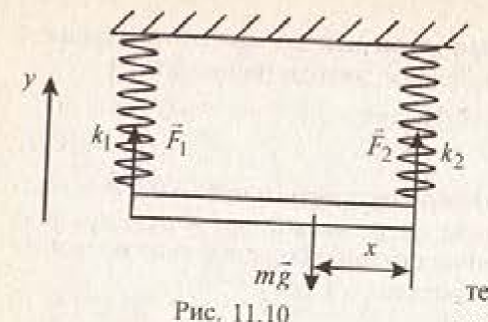


Рис. 11.10

(y): $F_1 + F_2 - mg = 0$;

$F_1 = k_1\Delta h$, $F_2 = k_2\Delta h$;

$k_1\Delta h + 3k_1\Delta h = mg$;

$m = \dfrac{4k_1\Delta h}{g} = 40$ кг.

Моменты сил берем относительно оси, проходящей через точку, в которой подвешен груз:

$F_1(l-x) = F_2x$; $k_1\Delta h(l-x) = k_2\Delta hx$; $x = \dfrac{k_1 l}{k_1+k_2} = \dfrac{l}{4} = 2{,}5$ см.

11.13. Две пружины с коэффициентами упругости k_1 и k_2 соединяют один раз последовательно, другой раз — параллельно. Какой должна быть жесткость k пружины, которой можно было бы заменить эту систему из двух пружин?

Ответ: $k = \dfrac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$ — последовательное соединение, $k = k_1 + k_2$ — параллельное.

Решение. 1) При последовательном соединении деформация двух пружин равна сумме деформаций каждой пружины

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2, \qquad (1)$$

а силы, с которыми растягиваются пружины, одинаковы и равны силе, которая действует на всю систему, $F = F_1 = F_2$. Согласно закону Гука $F = k\Delta y$; $F_1 = k_1\Delta y_1$; $F_2 = k_2\Delta y_2$, откуда $\Delta y_1 = \dfrac{F_1}{k_1}$; $\Delta y_2 = \dfrac{F_2}{k_2}$.

Из (1) следует $\dfrac{F}{k} = \dfrac{F_1}{k_1} + \dfrac{F_2}{k_2}$; $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$; $k = \dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$.

2) Параллельное соединение пружин. Смещение (деформация) пружин одинакова $\Delta y = \Delta y_1 = \Delta y_2$, а результирующая сила равна сумме сил, действующих на каждую пружину, $F = F_1 + F_2$.

$F = k\Delta y$, $F_1 = k_1\Delta y_1$; $F_2 = k_2\Delta y_2$; $k\Delta y = k_1\Delta y_1 + k_2\Delta y_2$; $k = k_1 + k_2$.

11.14. К двум одинаковым пружинам, соединенным один раз последовательно, а другой параллельно, подвешивают один и тот же груз массой m. Найдите удлинение пружины в обоих случаях, если жесткость каждой пружины k. Будет ли одинаковым в обоих случаях расстояние, на которое опустился груз?

Ответ: 1) $\Delta l_1 = \dfrac{2mg}{k}$; 2) $\Delta l_2 = \dfrac{mg}{2k}$.

Решение самостоятельное.

11.15. К невесомой пружине, первоначальная длина которой равна l, подвешивают груз массой m. При этом длина пружины увеличивается на четверть. В какой точке нерастянутой пружины нужно было подвесить груз массой $3m$, чтобы он оказался на одинаковом расстоянии от концов пружины?

Рис. 11.11

Ответ: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{8}$.

Решение. Пусть x и y длины частей, на которые делит нерастянутую пружину точка подвеса груза $3m$ (рис. 11.11), тогда $x + y = l$. Если к пружине подвешены грузы $3m$ и m, то тогда

$$x + \Delta x = y + \Delta y. \qquad (1)$$

Удлинение Δy вызвано силой mg, растягивающей всю пружину, а следовательно, и любой ее участок на четверть, значит, $\Delta y = \dfrac{y}{4}$. Верхний участок пружины растягивается силой в $4mg$, поэтому и удлинение его равно $\Delta x = \dfrac{4x}{4}$. Из (1) следует $y + \dfrac{y}{4} = x + \dfrac{4x}{4}$, тогда $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{8}$.

11.16. Однородная балка массой $M = 100$ кг и длиной $l = 3$ м подвешена за концы на двух пружинах. Обе пружины в незагруженном состоянии имеют одинаковую длину, но жесткость левой пружины в n раз больше жесткости правой (при действии одинаковой нагрузки удлинение y правой пружины в n раз больше, чем левой). На каком расстоянии x от левого конца балки надо подвесить груз массой $m = 80$ кг, чтобы она приняла горизонтальное положение? Считать, что $n = 2$.

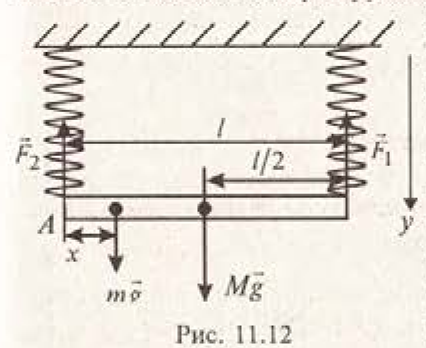


Рис. 11.12

Ответ: $x = 0{,}375$ м.

Решение. Коэффициент упругости правой пружины k, левой — nk. Деформация пружин одинаковая Δy. По закону Гука $F_1 = k\Delta y$; $F_2 = nk\Delta y$. По условию равновесия тела

$$(y)\!: mg + Mg - k\Delta y - nk\Delta y = 0. \qquad (1)$$

Моменты сил берем относительно точки A:

$$mgx + Mgl/2 - k\Delta y l = 0. \qquad (2)$$

Из (1) получаем $\Delta y = \dfrac{(m+M)g}{k(n+1)}$ и подставляем в (2):

$$mgx + Mgl/2 - \frac{(m+M)gl}{(n+1)} = 0,$$

откуда $x = \dfrac{M(1-n)+2m}{2m(n+1)}l$; $x = 0{,}375$ м.

11.17. Балка массой $m_1 = 300$ кг и длиной $l_1 = 5$ м покоится на опорах A и B (рис. 11.13), расстояние между которыми $l_2 = 1$ м. К свободному концу балки подвешен груз. Балка давит на опору B с силой $F_B = 5980$ Н. Определить массу груза и силу, с которой балка давит на опору A.

Ответ: $m_2 = 40$ кг, $F_A = 9310$ Н.

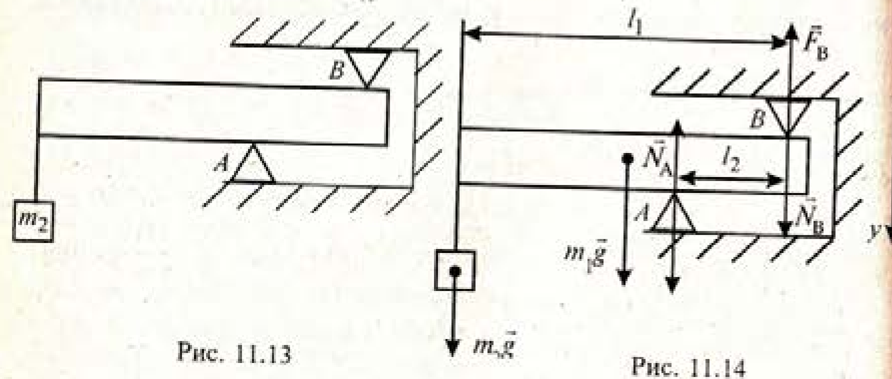


Рис. 11.13 Рис. 11.14

Решение. Условие равновесия (рис. 11.14):

$$(y):\ m_2 g + m_1 g - N_A + N_B = 0. \qquad (1)$$

Моменты сил берем относительно оси, проходящей через опору A:

$$N_B l_2 - m_1 g\left(\frac{l_1}{2} - l_2\right) - m_2 g(l_1 - l_2) = 0. \qquad (2)$$

По третьему закону Ньютона $|\vec N_A| = |\vec F_A|$, $|\vec N_B| = |\vec F_B|$, тогда из (2)

$$m_2 = \frac{F_B l_2 - m_1 g(l_1/2 - l_2)}{g(l_1 - l_2)} = 40 \text{ кг}.$$

Согласно (1) $F_A = N_A = (m_2 + m_1)g + F_B = 9310$ Н.

11.18. Однородный стержень AB массой $m = 10$ кг опирается одним из своих концов на гладкий горизонтальный пол, а другим — на гладкую плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту (рис. 11.15). Конец B стержня поддерживается веревкой, перекинутой через блок C и несущей груз P. Часть веревки BC параллельна наклонной плоскости. Пренебрегая трением на блоке, определите вес груза P и реакции пола N_1 и наклонной плоскости N_2.

Ответ: $P = 24{,}5$ Н, $N_1 = 49$ Н, $N_2 = 42{,}4$ Н.

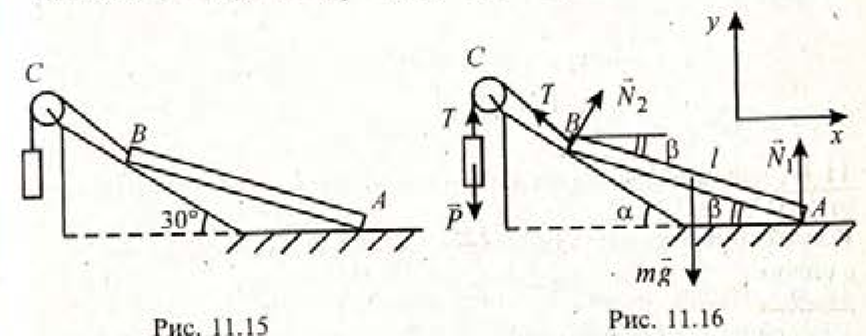


Рис. 11.15 Рис. 11.16

Решение. Должны выполняться два условия равновесия $\sum_i \vec F_i = 0$; $\sum_i \vec M_i = 0$; $m\vec g + \vec N_1 + \vec N_2 + \vec T = 0$; (рис. 11.16).

$$(x):\ N_2 \sin\alpha - T\cos\alpha = 0; \qquad (1)$$

$$(y):\ N_2\cos\alpha + N_1 + T\sin\alpha - mg = 0. \qquad (2)$$

Моменты сил рассматриваем относительно точки B ($AB = l$)

$N_1 l\cos\beta - mg\dfrac{l}{2}\cos\beta = 0$; $N_1 = \dfrac{mg}{2} = 49$ Н. Из (1) $T = N_2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, подставляем в (2), тогда $N_2\cos\alpha + N_1 + N_2\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - mg = 0$,

откуда $N_2 = (mg - N_1)\cos\alpha$; $N_2 = 42{,}4$ Н.

$$T = P = N_2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = (mg - N_1)\sin\alpha;\ P = 24{,}5 \text{ Н}.$$

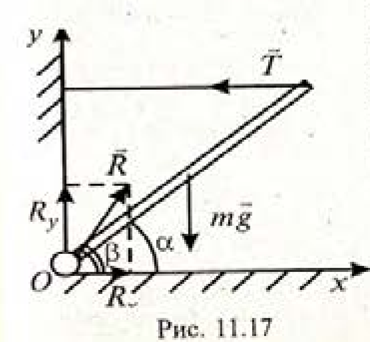


Рис. 11.17

11.19. Стержень массой $m = 10$ кг шарнирно укреплен за один конец и удерживается горизонтальной нитью за второй конец. Стержень образует с горизонталью угол $\alpha = 45°$. Найдите реакцию шарнира R и натяжение нити T.

Ответ: $R = 110$ Н, $\beta = 63°$, $T = 49$ Н.

Решение. Направление реакции шарнира неизвестно ни по величине, ни по направлению, поэтому рассмотрим со-

ставляющие вектора $\vec{R}$: по оси x — R_x и по оси y — R_y (рис. 11.17). Тогда уравнения проекций на оси x и y имеют вид

(x): $R_x - T = 0$; (y): $R_y - mg = 0$.

Уравнение моментов относительно шарнира (точка O) $mg\frac{l}{2}\cos\alpha - Tl\sin\alpha = 0$, где l — длина стержня.

Отсюда $T = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha = R_x = 49$ Н; $R_y = mg$.

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = mg\sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{4}} \approx 110$ Н.

Угол β, который составляет сила реакции с горизонталью, найдем из соотношения $\operatorname{tg}\beta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{2mg}{mg\operatorname{ctg}\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\beta \approx 63°$.

11.20. Столб массой m, упирающийся одним концом в прямой угол, равномерно поворачивается в вертикальное положение силой F, приложенной ко второму концу столба перпендикулярно столбу. При этом значение силы F постепенно уменьшается до нуля. Найдите закон изменения силы F и реакции угла R в зависимости от угла наклона столба к горизонту.

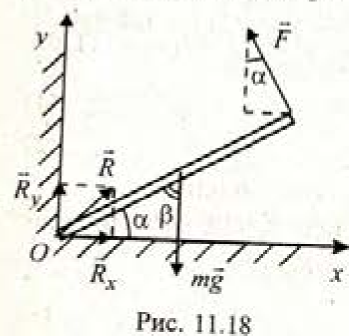


Рис. 11.18

Ответ: $F = \frac{1}{2}mg\cos\alpha$; $R = \frac{1}{2}mg\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$.

Решение. $\sum\limits_i \vec{F}_i = 0$; $\sum\limits_i \vec{M}_i = 0$ (см. рис. 11.18).

(x): $R_x - F\sin\alpha = 0$; (1)

(y): $R_y - mg + F\cos\alpha = 0$. (2)

Моменты сил берем относительно оси, проходящей через точку O: $mg\frac{l}{2}\cos\alpha - Fl = 0$, ($l$ — длина столба), отсюда $F = \frac{mg}{2}\cos\alpha$.

С ростом α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ сила F уменьшается от $\frac{mg}{2}$ до нуля.

Из (1) и (2) $R_x = \frac{1}{2}mg\sin\alpha\cos\alpha$; $R_y = mg\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2}\right)$;

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \frac{mg}{2}\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$.

С увеличением α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ сила реакции R возрастает от $\frac{mg}{2}$ до mg.

11.21. Стержень длиной l и массой m одним концом упирается в вертикальную стену, а другой его конец удерживается с помощью нити, длина которой равна длине стержня (рис. 11.19). При каких углах α стержень будет находиться в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стеной $\mu = 0{,}3$?

Ответ: $\alpha = 84°$.

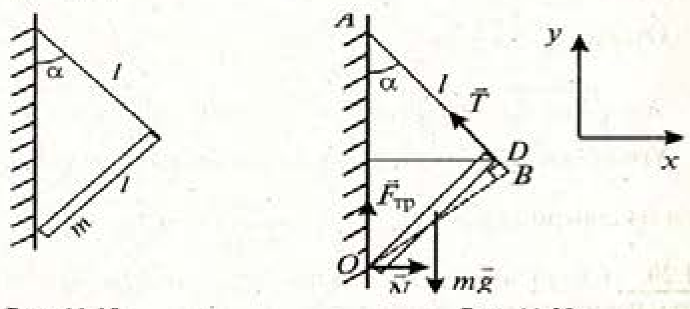


Рис. 11.19 Рис. 11.20

Решение. $\sum\limits_i \vec{F}_i = 0$; $\sum\limits_i \vec{M}_i = 0$. $\vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = 0$ (рис. 11.20).

(x): $N - T\sin\alpha = 0$; (1)

(y): $F_{тр} + T\cos\alpha - mg = 0$. (2)

Моменты сил рассматриваем относительно точки O.

Плечо OB силы натяжения нити T найдем из ΔAOB: $OB = AO\cdot\sin\alpha$. Из ΔADO: $AO = 2l\cdot\cos\alpha$. Тогда из (3) получим

$mg\frac{l}{2}\sin\alpha - T\cdot OB = 0$. (3)

$mg\frac{l}{2}\sin\alpha = T\cdot 2l\cos\alpha\cdot\sin\alpha$; $T = \frac{mg}{4\cos\alpha}$.

Из (1) $N = T\sin\alpha = \frac{mg}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

Из (2) с учетом, что $F_{тр} = \mu N = \frac{\mu mg}{4}\operatorname{tg}\alpha$, получим

$\frac{\mu mg}{4}\operatorname{tg}\alpha + \frac{mg}{4} - mg = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{\mu}$.

Стержень находится в равновесии, если $\alpha \geq \operatorname{arctg}\frac{3}{\mu} = 84°$.

11.22. Однородный стержень AB прикреплен к вертикальной стене посредством шарнира A и удерживается под углом $\varphi = 60°$ к вертикали при помощи веревки BC, образующей с ним угол $\varphi/2$

(рис. 11.21). Определите реакцию R шарнира, если известно, что масса стержня $m = 2$ кг.

Ответ: $R = 9{,}8$ Н.

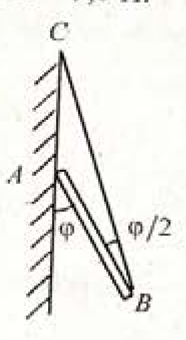


Рис. 11.21

Рис. 11.22

Решение. Согласно условию равновесия тела (рис.11.22)

$\vec{R} + \vec{T} + m\vec{g} = 0.$

Направление силы реакции шарнира неизвестно, поэтому рассмотрим его составляющие по осям R_x и R_y с учетом, что $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$. Тогда (x): $R_x - T\sin\frac{\varphi}{2} = 0;$ (1)

(y): $R_y - mg + T\cos\frac{\varphi}{2} = 0.$ (2)

Моменты сил берем относительно оси, проходящей через точку A, $mg\frac{l}{2}\sin\varphi - Tl\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, откуда $T = \frac{mg\sin\varphi}{2\sin\varphi/2}$. Из (1) следует

$$R_x = T\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}mg\sin\varphi = mg\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Из (2) $R_y = mg - \frac{mg\sin\varphi}{2\sin\varphi/2}\cos\frac{\varphi}{2} = mg\left(1 - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right) = mg\sin^2\frac{\varphi}{2};$

$$R = mg\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^4\frac{\varphi}{2}} = mg\sin\frac{\varphi}{2};\quad R = mg\sin 30° = 9{,}8 \text{ Н}.$$

11.23. Тяжелый однородный стержень AB упирается верхним концом A в гладкую стенку. К нижнему концу B привязана нерастяжимая нить BC, прикрепленная к стене в точке C (рис. 11.23). Угол стержня со стеной — α, угол нити со стеной — β. Найдите соотношение углов α и β при равновесии.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$.

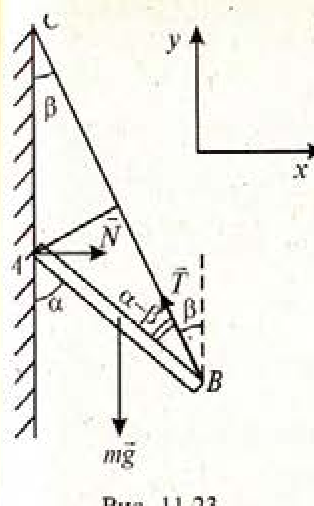


Рис. 11.23

Решение. $\sum_i \vec{F}_i = 0;\ \sum_i \vec{M}_i = 0;$

$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = 0;$

(x): $N - T\sin\beta = 0;$ (1)

(y): $T\cos\beta - mg = 0.$ (2)

Моменты сил рассматриваем относительно точки A:

$mg\frac{l}{2}\sin\alpha - Tl\sin(\alpha - \beta) = 0.$ (3)

Из (2) $T = \frac{mg}{\cos\beta}$, подставим в (3)

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{mgl}{\cos\beta}\sin(\alpha - \beta);$$

$$\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Условие равновесия стержня $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$.

11.24. Один конец твердого стержня шарнирно закреплен в точке C, к другому концу A прикреплен конец веревки, перекинутой через два блока и закрепленной другим концом на балке (рис. 11.24). На расстоянии $l = 0{,}60$ м от точки A на стержень действует сила $F = 75$ Н вертикально вниз, для уравновешивания которой к подвижному блоку подвешен груз массой $m = 10$ кг. Определите длину рычага и силу давления на шарнир C.

Ответ: $L = 1{,}73$ м; $F_д = 26$ Н.

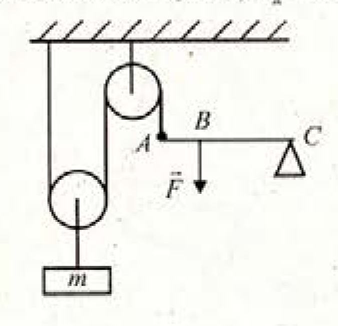


Рис. 11.24

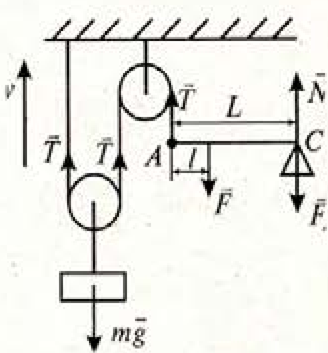


Рис. 11.25

Решение. Для тела массой m: $2T - mg = 0$; $T = \frac{mg}{2}$.

Для рычага: $T + N - F = 0$, $|\vec{N}| = |\vec{F}_д| = F - \frac{mg}{2} = 26$ Н.

Моменты сил берем относительно оси, проходящей через точку C: $T \cdot L = F(L - l)$; $L = \dfrac{2Fl}{2F - mg} = 1{,}73$ м.

11.25. Однородный металлический стержень изогнули в виде буквы Г так, что его части имеют длину $a = 10$ см и $b = 20$ см. Стержень подвесили на нити за точку изгиба. Определите, какой угол образует длинный конец стержня с вертикалью.

Ответ: $\alpha = 14°$.

Решение. Пусть масса всего стержня m, тогда масса части стержня длиной a равна $m_a = \dfrac{m \cdot a}{a + b}$; для части стержня длиной b — $m_b = \dfrac{m \cdot b}{a + b}$. Уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку C подвеса стержня (рис. 11.26): $m_a g \dfrac{a}{2} \cos\alpha = m_b g \dfrac{b}{2} \sin\alpha$;

Рис. 11.26

$$\frac{ma}{a+b} \cdot \frac{a}{2}\cos\alpha = \frac{mb}{a+b} \cdot \frac{b}{2}\sin\alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2}{b^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{a^2}{b^2} = 14°.$$

11.26. Железный прут массой m изогнут пополам так, что его части образуют прямой угол (рис. 11.27). Прут подвешен за один из концов на шарнире. Найти угол α, который образует с вертикалью верхний стержень в положении равновесия.

Ответ: $\alpha = 18{,}4°$.

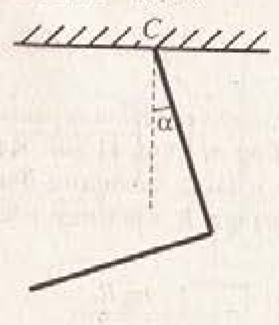


Рис. 11.27

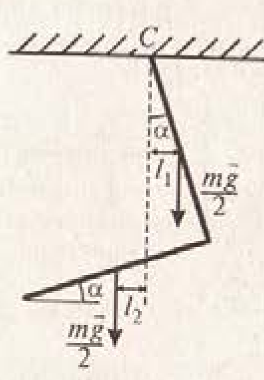
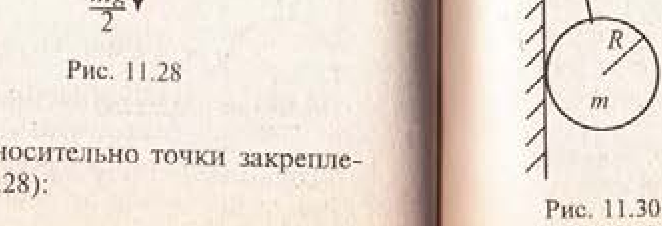


Рис. 11.28

Решение. Уравнение моментов относительно точки закрепления C (l — длина стержня, см рис. 11.28):



$$\frac{mg}{2} l_1 = \frac{mg}{2} l_2; \quad \frac{mg}{2}\frac{l}{4}\sin\alpha = \frac{mg}{2}\left(\frac{l}{4}\cos\alpha - \frac{l}{2}\sin\alpha\right);$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = 18{,}4°.$$

11.27. На нити длиной $l = 0{,}5$ м висит шар радиусом $R = 0{,}1$ м, опирающийся на вертикальную стенку. Нить касается шара в точке A. Определите коэффициент трения шара о стенку.

Ответ: $\mu \geq 2{,}6$.

Рис. 11.29

Решение. $\sum_i \vec{F}_i = 0$; $\sum_i \vec{M}_i = 0$ (рис. 11.29).

$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{T} = 0$;

(x): $N - T\sin\alpha = 0$; (1)

(y): $F_{тр} - mg + T\cos\alpha = 0$; $F_{тр} = \mu N$.

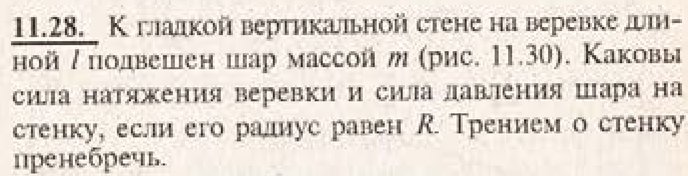
Уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку O:

$F_{тр}R - TR = 0$; $F_{тр} = T$.

Из (1) получим $N - \mu N \sin\alpha = 0$, отсюда $\mu = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Из ΔOAB $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{R}{l}$; $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$, тогда

$$\mu \geq \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{l^2 + R^2}{2lR} \approx 2{,}6.$$



11.28. К гладкой вертикальной стене на веревке длиной l подвешен шар массой m (рис. 11.30). Каковы сила натяжения веревки и сила давления шара на стенку, если его радиус равен R. Трением о стенку пренебречь.

Ответ: $T = \dfrac{mg(l + R)}{\sqrt{l^2 + 2lR}}$; $F_д = \dfrac{mgR}{\sqrt{l^2 + 2lR}}$.

Решение самостоятельное.

Рис. 11.30

11.29. Лестница опирается на вертикальную стену и горизонтальный пол. Центр тяжести лестницы находится на середине ее длины. Коэффициент трения между лестницей и полом $\mu_1 = 0{,}5$, а между лестницей

и стеной $\mu_2 = 0{,}4$. Определите наименьший угол наклона лестницы к горизонту, при котором она может оставаться в равновесии.

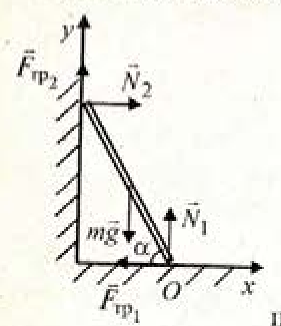


Рис. 11.31

Ответ: $\alpha = 38{,}6°$.

Решение. $m\vec g + \vec N_1 + \vec F_{тр_1} + \vec N_2 + \vec F_{тр_2} = 0$ (рис. 11.31);

(x): $N_2 - F_{тр_1} = 0$; (1)

(y): $N_1 + F_{тр_2} - mg = 0$; (2)

$F_{тр_1} = \mu_1 N_1$, $F_{тр_2} = \mu_2 N_2$.

Уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку O:

$$N_2 l\sin\alpha + F_{тр_2} l\cos\alpha - mg\frac{l}{2}\cos\alpha = 0. \quad (3)$$

Из (1) $N_2 = \mu_1 N_1$ подставим в (2) $N_1 + \mu_2 N_2 - mg = 0$;

$$N_1 + \mu_1\mu_2 N_1 = mg;\quad N_1 = \frac{mg}{1+\mu_1\mu_2}.$$

Результат N_1 подставим в (3)

$$\frac{\mu_1 mg\sin\alpha}{1+\mu_1\mu_2} + \frac{\mu_1\mu_2 mg\cos\alpha}{1+\mu_1\mu_2} - \frac{mg}{2}\cos\alpha = 0;$$

$$\frac{\mu_1 \operatorname{tg}\alpha}{1+\mu_1\mu_2} = \frac{1}{2} - \frac{\mu_1\mu_2}{1+\mu_1\mu_2};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1};\quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1} = 38{,}6°.$$

11.30. Человек массой m взбирается по лестнице массой M, прислоненной к стене. Коэффициент трения между лестницей и стеной μ_1, а между лестницей и полом μ_2. Определите, при каком угле между лестницей и стеной человек может взобраться наверх.

Ответ: $\alpha \ge \operatorname{arctg}\left[\left(1 - \frac{M(1+\mu_1\mu_2)}{2(M+m)}\right)\cdot\frac{1}{\mu_2}\right]$.

Решение. $\sum_i \vec F_i = 0$; $\sum_i \vec M_i = 0$; $M\vec g + \vec N_1 + \vec N_2 + \vec F_{тр_1} + \vec F_{тр_2} + m\vec g = 0$ (рис. 11.32).

(x): $N_1 - \mu_2 N_2 = 0$; $N_1 = \mu_2 N_2$; (1)

(y): $\mu_1 N_1 - mg - Mg + N_2 = 0$; (2)

$\mu_1\mu_2 N_2 + N_2 = (m+M)g$;

$$N_2 = \frac{(m+M)g}{1+\mu_1\mu_2}. \quad (3)$$

Рис. 11.32

Уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку C:

$$Mg\frac{l}{2}\sin\alpha + \mu_2 N_2 l\cos\alpha - N_2 l\sin\alpha = 0. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получим

$$Mg\frac{l}{2}\sin\alpha + \frac{\mu_2(m+M)l\cdot g\cos\alpha}{1+\mu_1\mu_2} - \frac{(m+M)l\cdot g\sin\alpha}{1+\mu_1\mu_2} = 0;$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left[\left(1 - \frac{M(1+\mu_1\mu_2)}{2(M+m)}\right)\cdot\frac{1}{\mu_2}\right].$$

11.31. На какую максимальную высоту может подняться человек массой m по лестнице массой M и длиной l, приставленной к гладкой стене? Угол между лестницей и полом α, коэффициент трения о пол μ.

Ответ: $h = \frac{2\mu l(M+m)\operatorname{tg}\alpha - Ml}{2m}$.

Решение самостоятельное.

11.32. К верхнему краю доски длиной L и силой тяжести P прибит брусок длиной l, сила тяжести которого Q. Доска закреплена в точке O и прислонена к стене под углом α к основанию. При какой горизонтальной силе, приложенной на высоте h, равновесие доски не нарушится, если убрать стенку?

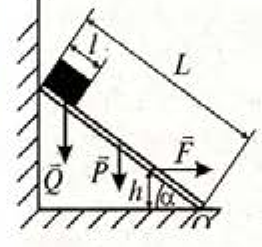


Рис. 11.33

Решение. Условие равновесия тела, имеющего ось вращения $\sum \vec M_i = 0$.

Для данного случая ось вращения проходит через точку O. Относительно нее уравнение моментов имеет вид:

$$Fh - (PL\cos\alpha)/2 - Q(L - l/2)\cos\alpha = 0.$$

Откуда: $F = [PL + Q(2L - l)]\cos\alpha/(2h)$.

11.33. Лестница массой M и длиной l прислонена к гладкой вертикальной стене под углом α. Центр тяжести лестницы находится на высоте h от пола. Человек тянет лестницу за середину в горизонтальном направлении с силой F. Какой минимальной величины должна быть эта сила, чтобы человек смог отодвинуть верхний конец лестницы от стены? Трение о пол настолько велико, что нижний конец лестницы не скользит.

Ответ: $F = (2Mgh\sin\alpha)/(l\cos^2 a)$.

Решение самостоятельное.

11.34. Две тонкие палочки с массами M и m соединены в систему (рис. 11.34). Палочки могут вращаться без трения вокруг осей A и B, проходящих через нижние концы палочек. Верхние концы палочек сходятся под прямым углом так, что конец одной палочки лежит на торце другой. Верхняя палочка массой M образует с горизонтом угол α. При каком минимальном коэффициенте трения μ между палочками нижняя не упадет?

Ответ: $\mu = (m\text{tg}\alpha)/M$.

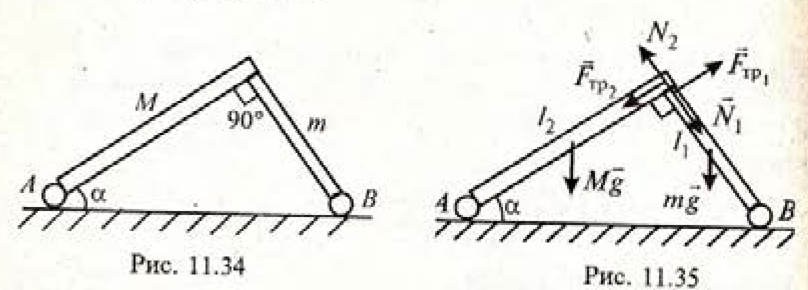


Рис. 11.34 Рис. 11.35

Решение. Силы $F_{тр_1} = F_{тр_2} = F_{тр}$; $N_1 = N_2 = N$; $F_{тр} = \mu N$. Для палочки массой M уравнение моментов сил относительно оси A (рис. 11.35): $Mg\frac{l_2}{2}\cos\alpha - N_2 l_2 = 0.$ (1)

Для палочки массой m уравнение моментов сил относительно оси B: $F_{тр_1} l_1 - mg\frac{l_1}{2}\sin\alpha = 0.$ (2)

Из (1) и (2) $N_2 = N = \frac{Mg}{2}\cos\alpha$; $\mu Mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$; $\mu = \frac{m}{M}\text{tg}\,\alpha$.

11.35. Тяжелая однородная узкая доска AB лежит на двух опорах C и D, расстояние между которыми $CD = a$; $BC = b$. Коэффициент трения доски об опору равен μ. Угол наклона доски к горизонту равен α. Какому условию должна удовлетворять длина доски $2l$ для того, чтобы она находилась в равновесии? (Толщиной доски пренебречь.)

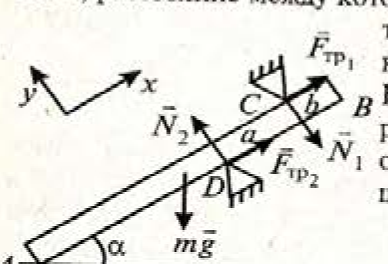


Рис. 11.36

Ответ: $2l \ge a + 2b + \frac{a}{\mu}\text{tg}\,\alpha$.

Решение. Условие равновесия доски (рис. 11.36):

$m\vec g + \vec N_1 + \vec N_2 + \vec F_{тр_1} + \vec F_{тр_2} = 0$; $F_{тр} = \mu N$;

(x): $\mu N_1 + \mu N_2 - mg\sin\alpha = 0$; (1)

(y): $N_2 - N_1 - mg\cos\alpha = 0.$ (2)

Уравнение моментов запишем относительно оси, проходящей через точку C: $N_2 a - mg(l-b)\cos\alpha = 0$. (3)

Чем момент силы тяжести больше, тем сильнее стержень прижимается к опорам, тем надежнее будет равновесие, т. е. $mg(l-b)\cos\alpha \ge N_2 a$. Из (2) найдем $N_1 = N_2 - mg\cos\alpha$ и подставим в (1) $\mu(N_2 - mg\cos\alpha) + \mu N_2 - mg\sin\alpha = 0$; $N_2 = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{2\mu}$.

Подставив N_2 в (3), получим $2l \ge a + 2b + \frac{a}{\mu}\text{tg}\,\alpha$.

11.36. Однородный стержень AB массой m и длиной l опирается на две неподвижные гладкие плоскости, составляющие с горизонтом углы α и β (рис. 11.37). Определите силы реакции N_1 и N_2 в точках A и B и угол φ при равновесии.

Ответ: $N_1 = \frac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $N_2 = \frac{mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\text{tg}\,\varphi = \frac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)} - \text{ctg}\,\alpha$.

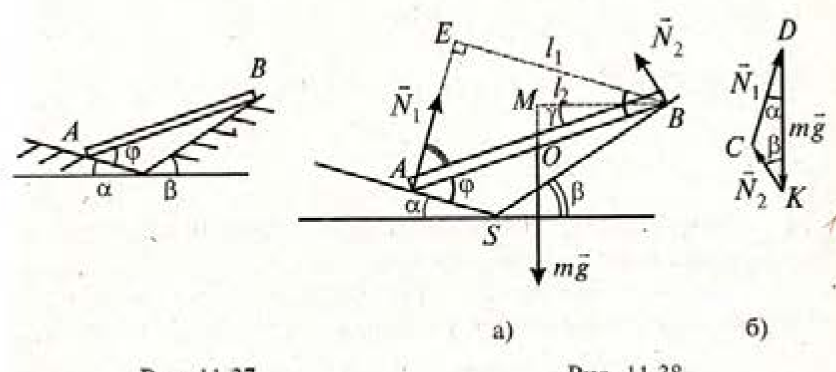


Рис. 11.37 Рис. 11.38

Решение. Для нахождения реакций опоры воспользуемся треугольником сил, учитывая, что сумма всех сил, действующих на стержень, должна быть равна нулю (рис. 11.38 б), силы перенесены параллельно силам на рис. 11.38 а. Тогда $\angle CDK = \alpha$, а $\angle DKC = \beta$, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. $\angle DCK = 180° - \alpha - \beta$. Тогда по теореме синусов получим

$$\frac{N_1}{\sin\beta} = \frac{N_2}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\sin(180° - \alpha - \beta)};\ N_1 = \frac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)};\ N_2 = \frac{mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Уравнение моментов запишем относительно точки B:

$N_1 l_1 - mg l_2 = 0$; $l_1 = l\cos\varphi$; $\angle EBO = \varphi$, $\angle EBM = \alpha$, $\gamma = \varphi - \alpha$;

$$l_2 = \frac{l}{2}\cos\gamma = \frac{l}{2}\cos(\varphi - \alpha); \quad \frac{mgl\cos\varphi\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - mg\frac{l}{2}\cos(\varphi-\alpha) = 0,$$

откуда $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)} - \operatorname{ctg}\alpha.$

11.37. Однородный полушар массой $m_1 = 5$ кг лежит выпуклой стороной на горизонтальной плоскости. На край полушара положили небольшой груз массой $m_2 = 1$ кг. Под каким углом α к горизонту наклонена горизонтальная плоскость полушара? Радиус полушара R. Расстояние от центра масс полушара до геометрического центра шара равно $r_c = \frac{3}{8}R$.

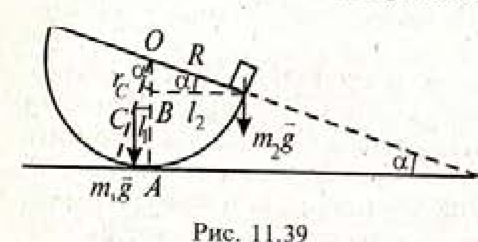


Рис. 11.39

Ответ: $\alpha = 28°$.

Решение. Уравнение моментов относительно точки O (рис. 11.39):

$$m_2gl_2 - m_1gl_1 = 0; \qquad (1)$$

$$l_1 = r_c\sin\alpha = \frac{3}{8}R\sin\alpha; \quad l_2 = R\cos\alpha.$$

Тогда из (1) получим $m_2gR\cos\alpha - m_1g\frac{3}{8}R\sin\alpha = 0;$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}\frac{m_2}{m_1}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{8}{3}\frac{m_2}{m_1} = 28°.$$

11.38. Катушка находится на столе (рис. 11.40). В какую сторону она будет двигаться силой F_1, F_2, F_3, F_4 (продолжение линии действия силы F_2 проходит через точку, лежащую на линии соприкосновения катушки со столом)?

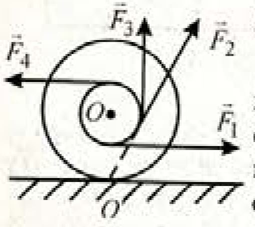


Рис. 11.40

Решение. Считаем, что мгновенная ось проходит через точку O', тогда действие момента силы $\vec{F}_1$ относительно этой точки приведет к вращению катушки вокруг точки O по часовой стрелке и катушка покатится вправо. Момент силы $\vec{F}_2$ равен нулю (линия действия силы проходит через мгновенную ось вращения O'). Вращаясь, катушка останется на месте. Если сила $\vec{F}_2$ будет достаточно велика, то катушка может скользить вправо, но без вращения. Под действием моментов сил $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ катушка будет вращаться влево.

11.39. Исходя из условий предыдущей задачи, найдите критический угол θ линией действия силы и горизонтальным направлением, при котором катушка не будет вращаться. Радиус внутреннего цилиндра r, внешней части катушки R (рис. 11.41).

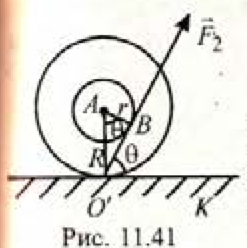


Рис. 11.41

Ответ: $\cos\theta = \dfrac{r}{R}$.

Решение. Сила $\vec{F}_2$, не вызывающая вращения проходит через точку O' соприкосновения катушки с поверхностью опоры рис. 11.41. При этом момент этой силы относительно точки O' равен нулю. $\angle O'AB = \angle BO'K$, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, тогда $\cos\theta = \dfrac{r}{R}$.

11.40. Катушка с нитками лежит на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 11.42). Свободный конец нити закреплен у верхнего конца наклонной плоскости так, что нить параллельна наклонной плоскости. Внешний радиус катушки R, радиус намотки ниток r. При каком минимальном коэффициенте трения μ_{min} катушки о плоскость система будет в равновесии?

Ответ: $\mu_{min} = \dfrac{r\cdot\operatorname{tg}\alpha}{R+r}$.

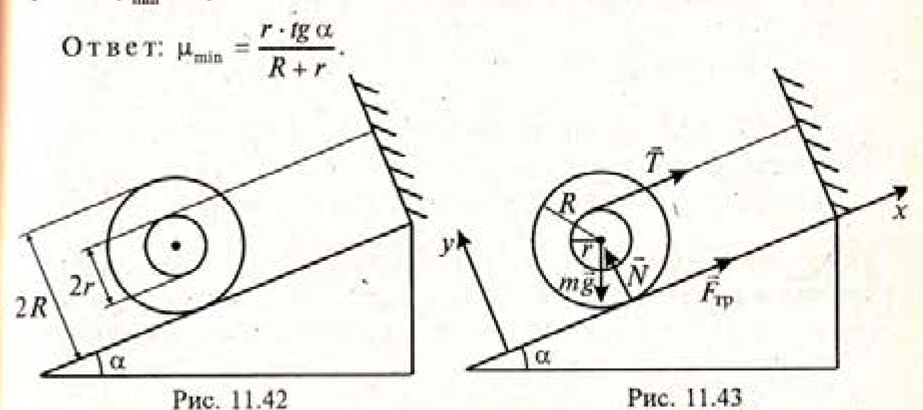


Рис. 11.42 Рис. 11.43

Решение. $\sum\limits_i \vec{F}_i = 0$, $\sum\limits_i \vec{M}_i = 0$. (рис. 11.43)

(x): $F_{тр} + T - mg\sin\alpha = 0;$ (1)

(y): $N - mg\cos\alpha = 0;$ $F_{тр} = \mu N.$ (2)

Моменты сил берем относительно оси, проходящей через точку O. $T(R+r) - mgR\sin\alpha = 0;$ $T = \dfrac{mgR\sin\alpha}{R+r}.$ (3)

Из (1), (2) и (3) получим $\mu mg\cos a + \dfrac{mgR\sin\alpha}{R+r} - mg\sin\alpha = 0;$

$$\mu_{min} = \frac{r\operatorname{tg}\alpha}{R+r}.$$

11.41. На цилиндр массой m навита нерастяжимая невесомая нить (рис. 11.44). С какой силой F можно тянуть за нить под углом α к горизонту, чтобы цилиндр, вращаясь вокруг своей оси, не перемещался по плоскости? Коэффициент трения между цилиндром и плоскостью μ.

Ответ: $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha}$.

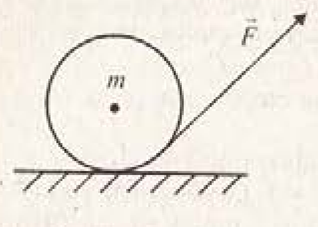


Рис. 11.44

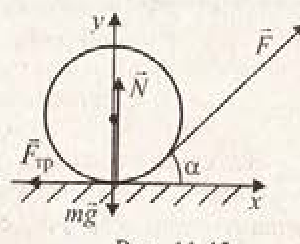


Рис. 11.45

Решение. (x): $F\cos\alpha - F_{тр} = 0$ (рис. 11.45);

(y): $N - mg + F\sin\alpha = 0$; $N = mg - F\sin\alpha$; $F_{тр} = \mu N$;

$F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha = 0$; $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$.

11.42. Каков должен быть коэффициент трения для того, чтобы клин, заколоченный в бревно, не выскакивал из него? Угол при вершине клина равен $2\alpha = 20°$.

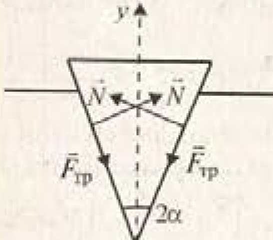


Рис. 11.46

Ответ: $\mu \geq \mathrm{tg}\,10° = 0,176$.

Решение.

$\sum\limits_i \vec{F}_i = 0$; $2\vec{N} + 2\vec{F}_{тр} = 0$; $F_{тр} = \mu N$ (рис. 11.47);

(y): $2N\sin\alpha - 2\mu N\cos\alpha = 0$.

$\mathrm{tg}\,\alpha \leq \mu$ — условие равновесия клина.

$\mu \geq \mathrm{tg}\,10° = 0,176$.

11.43. Три одинаковые цилиндрические бочки уложены одна на другую, как показано на рис. 11.47. Найти минимальный коэффициент трения, при котором они не раскатятся.

Ответ: $\mu \geq 2 - \sqrt{3} = 0,268$.

Решение. $\sum\limits_i \vec{F}_i = 0$; $\sum\limits_i \vec{M}_i = 0$. Уравнение равновесия для бочки 1 $m\vec{g} + \vec{F}_д + \vec{N} + \vec{F}_{тр_1} + \vec{F}_{тр_2} = 0$, где $\vec{F}_{тр_1}$ — сила трения между бочкой и поверхностью, $\vec{F}_{тр_2}$ — сила трения между бочками, $\vec{F}_д$ — сила давления на бочку 1 со стороны бочки 2.

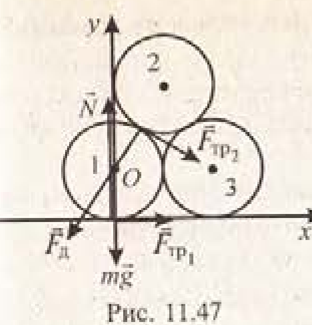


Рис. 11.47

(x): $F_{тр_1} + F_{тр_2}\cos 30° - F_д\cos 60° = 0$. (1)

Уравнение моментов относительно точки O:

$F_{тр_2}R - F_{тр_1}R = 0$, (2)

R — радиус цилиндра.

$F_{тр_2} = F_{тр_1} = \mu F_д$. (3)

Учитывая (2) и (3), из (1) получим

$$\mu \geq \frac{\cos 60°}{1 + \cos 30°} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} = 0,268.$$

11.44. Призма, поперечное сечение которой — прямоугольный треугольник с углом $\alpha = 60°$, может скользить по горизонтальной плоскости, опираясь на нее меньшей гранью. Между вертикальной стенкой и большей гранью призмы положили шар массой $m = 80$ кг. Какую горизонтальную силу надо приложить к вертикальной стенке призмы, чтобы задержать скольжение призмы по горизонтальной плоскости? Массой призмы и трением пренебречь. Что изменится, если уменьшить диаметр шара, не меняя его массы?

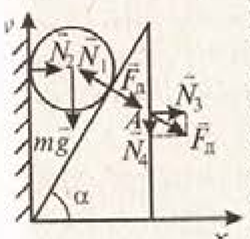


Рис. 11.48

Ответ: $F = 1700$ Н.

Решение. На шар кроме силы тяжести действуют две силы реакции: стены $\vec{N}_2$ и призмы $\vec{N}_1$. Сила $\vec{N}_1$ по третьему закону Ньютона равна силе давления шара на призму $\vec{F}_д$: $|\vec{N}_1| = |\vec{F}_д|$. Так как

$\sum\limits_i \vec{F}_i = 0$, то (y): $N_1\cos\alpha = mg$; $F_д = N_1 = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = 2mg$. (рис. 11.48)

Силу $F_д$ переносим по ее линии действия в точку A на вертикальной стенке призмы и раскладываем на горизонтальную N_3 и вертикальную N_4 составляющие. Искомая уравновешивающая сила равна по модулю N_3, приложена в точке A и направлена противоположно силе N_3.

$F = N_3 = F_д\sin\alpha = 2mg\sin\alpha = 1700$ Н.

11.45. Колесо радиусом R и массой m стоит перед ступенькой высотой h. Какую наименьшую горизонтальную силу F надо при-

ложить к оси колеса, чтобы оно могло подняться на ступеньку? Трением пренебречь.

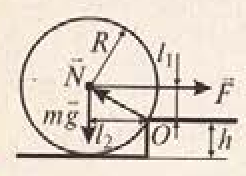


Рис. 11.49

Ответ: $F \geq \dfrac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$.

Решение. Чтобы колесо поднялось на ступеньку, момент силы F относительно оси, проходящей через точку O, должен быть больше момента силы тяжести (рис. 11.49)

$$Fl_1 \geq mgl_2;\ \ l_1 = R - h;$$

$l_2 = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)}$. Тогда $F \geq \dfrac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$.

11.46. Каков должен быть минимальный коэффициент трения материала стенок куба о горизонтальную плоскость, чтобы можно было его опрокинуть через ребро горизонтальной силой, приложенной к верхнему левому ребру? Чему должна быть равна приложенная сила? Масса куба M.

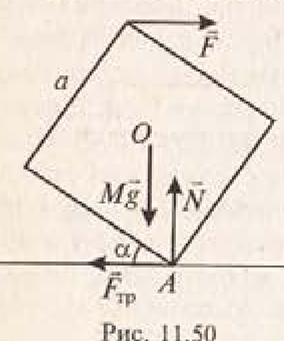


Рис. 11.50

Ответ: $F > Mg/2$; $\mu_{\min} = 0,5$.

Решение. Уравнение моментов берем относительно оси, проходящей через точку A (рис. 11.50), a — длина ребра кубика:

$$-Mg\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + Fa(\cos\alpha + \sin\alpha) = 0.$$

Отсюда сила, необходимая для переворачивания кубика

$F = \dfrac{1}{2}Mg\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$. Эта сила изменяется от значения $F_O = \dfrac{1}{2}Mg$ при $\alpha = 0$ до значения $F = 0$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, когда кубик опрокидывается. Чтобы кубик не скользил по поверхности, нужно выполнить условие $F \leq F_{тр} = \mu N = \mu Mg$, т.е. $\mu \geq 0,5$.

11.47. Два тела массами $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 4$ кг расположены по оси x. Координата первого тела $x_1 = -5$ м, а второго $x_2 = 3$ м. Найдите центр масс этой системы.

Ответ: $x_c = -0,43$ м.

Решение. Положение центра масс определяется как

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Для системы из двух частиц $x_c = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$; $x_c = -0,43$ м.

11.48. Найдите центр масс металлического угольника, размеры которого показаны на рис. 11.51а.

Ответ: $x_c = 3,85$ см, $y_c = 6,85$ см.

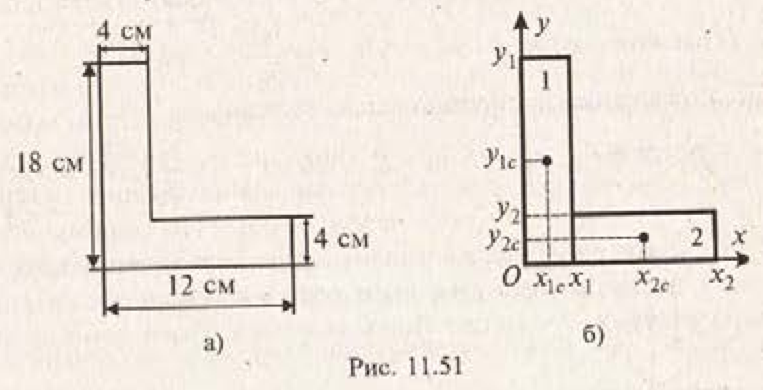


Рис. 11.51

Решение. Разделим угольник на два прямоугольника (рис. 11.51 б).

Центр тяжести прямоугольника 1: $x_{1c} = \dfrac{x_1}{2} = 2$ см; $y_{1c} = \dfrac{y_1}{2} = 9$ см;

для прямоугольника 2: $x_{2c} = x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{2} = 8$ см; $y_{2c} = \dfrac{y_2}{2} = 2$ см. Площадь каждой части $S_1 = 72$ см^2; $S_2 = 32$ см^2. Масса каждой части пропорциональна ее площади: $m \sim S$ (толщина угольника одинакова). Координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2} = 3,85 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} = \frac{S_1y_1 + S_2y_2}{S_1 + S_2} = 6,85 \text{ см}.$$

11.49. Определите, где находится центр тяжести однородной пластинки с вырезом. Все размеры в сантиметрах указаны на рис. 11.52.

Ответ: $x = 0,53$ см.

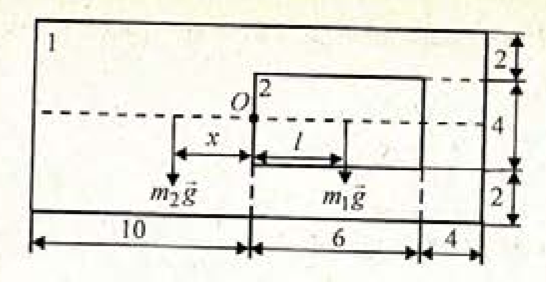


Рис. 11.52

Решение. Алгебраическая сумма моментов сил тяжести вырезанной части 2 и оставшейся части 1 относительно центра пластинки O равна нулю. $m_1gl - m_2gx = 0$; $x = \frac{m_1}{m_2}l$; $l = 3$ см.

Масса пластинки пропорциональна ее площади,

т. е. $m_1 \sim S_1 = 24$ см^2; $m_2 = m - m_1 \sim S_2 = 136$ см^2; $x = \frac{S_1}{S_2}l$; $x = 0,53$ см.

11.50. На какое расстояние x сместится центр тяжести однородного диска, радиус которого $R = 40$ см, если в нем вырезать круглое отверстие радиусом $r = 10$ см? Расстояние между центрами диска и отверстия $l = 15$ см.

Ответ: $x = 0,01$ м.

Решение. Уравнение моментов сил тяжести фигур 1 и 2 берем относительно центра круга O (рис. 11.53). $m_1gl = m_2gx$; $x = \frac{m_1}{m_2}l$.

Масса пропорциональна площади $m_1 \sim S_1 = \pi r^2$;

$m_2 \sim S_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$; $x = \frac{lr^2}{R^2 - r^2} = 0,01$ м.

11.51. Из однородной круглой пластины радиусом R вырезали квадрат, диагональ которого совпадает с радиусом и равна ему. Найдите центр тяжести полученной пластины.

Ответ: $x = \frac{R}{2(2\pi - 1)}$ — от геометрического центра.

Решение. Моменты сил тяжести фигур 1 и 2 берем относительно точки O (центр окружности на рис. 11.54):

$m_1gl = m_2gx$; $x = \frac{m_1}{m_2}l$; $l = \frac{R}{2}$.

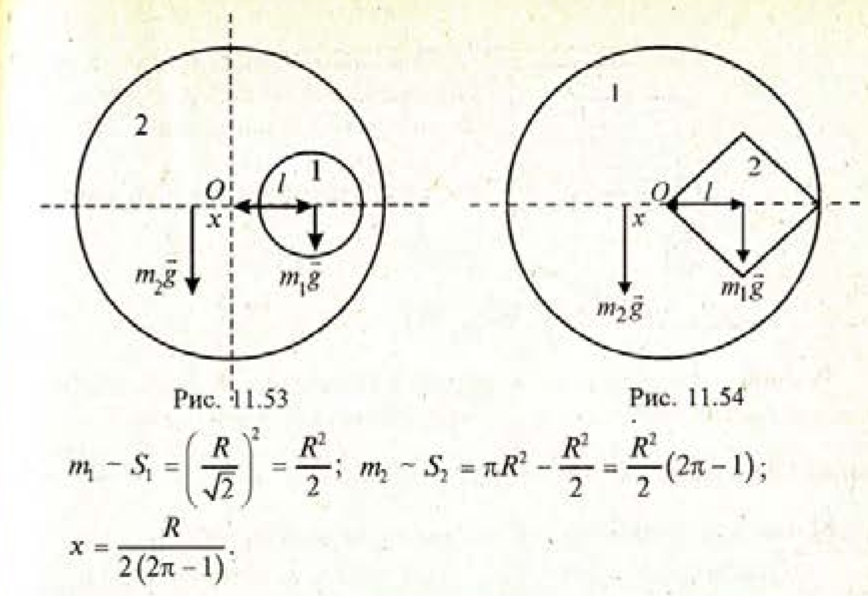


Рис. 11.53 Рис. 11.54

$m_1 \sim S_1 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{R^2}{2}$; $m_2 \sim S_2 = \pi R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2}(2\pi - 1)$;

$x = \frac{R}{2(2\pi - 1)}$.

11.52. Из плоской квадратной пластины со стороной a вырезан:

а) квадрат со стороной $a/2$;

б) круг диаметром $a/2$.

Найдите центр тяжести полученных фигур (рис. 11.55).

Ответ: $x = \frac{a}{12}$ — от геометрического центра;

$x = \frac{\pi a}{4(16 - \pi)}$ — от геометрического центра.

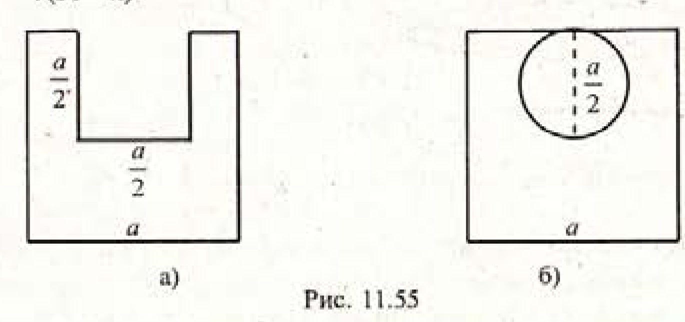


Рис. 11.55

Решение самостоятельное. ***Указание.*** Расположить пластинку так, чтобы вырез был симметричен относительно оси x.

11.53. Где находится центр тяжести куба, из которого удален кубик с ребром, равным $\frac{a}{2}$ (рис. 11.56)?

Ответ: $x = a\frac{\sqrt{3}}{28}$ — от геометрического центра.

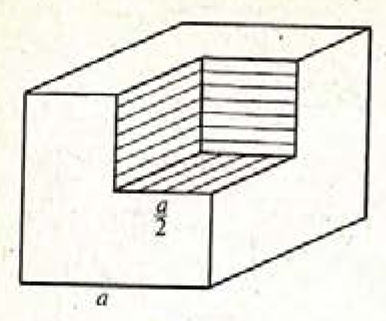


Рис. 11.56

Решение. Уравнение моментов сил тяжести куба с вырезом и вырезанного кубика найдем относительно центра куба. Учтем, что масса куба пропорциональна его объему:

$$m \sim V = a^3; \quad m_1 \sim V_1 = \frac{a^3}{8};$$

$$m_2 \sim V_2 = V - V_1 = a^3 - \frac{a^3}{8} = \frac{7}{8}a^3.$$

Расстояние от центра вырезанного кубика до центра куба O равно $\frac{\sqrt{3}}{4}a$, тогда $m_2gx = m_1g\frac{\sqrt{3}}{4}a$; $\frac{7}{8}a^3x = \frac{a^3}{8}\frac{\sqrt{3}}{4}a$; $x = \frac{\sqrt{3}}{28}a$.

11.54. Полушар и цилиндр одинакового радиуса из одного и того же материала соединены (рис. 11.57). Система опирается на горизонтальную плоскость. При какой высоте x цилиндра она будет находиться в безразличном равновесии? Центр тяжести полушара находится на оси симметрии, отступая на $\frac{3}{8}$ радиуса от центра.

Ответ: $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

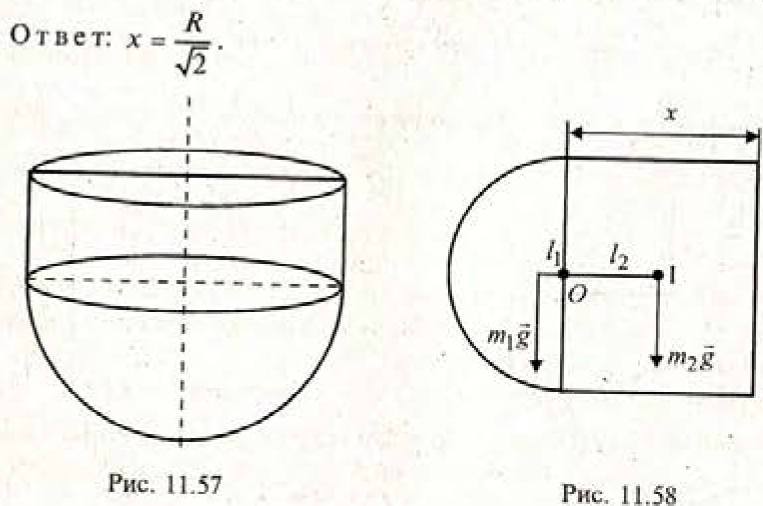


Рис. 11.57 Рис. 11.58

Решение. Система находится в безразличном равновесии, пока при изменении положения системы (например, ее наклоне) положение центра тяжести относительно опоры не изменяется. Тогда очевидно, что центр тяжести совпадает с геометрическим центром полушара O (рис. 11.58), $m_1gl_1 = m_2gl_2$.

Масса пропорциональна объему тела

$$m_1 \sim V_1 = \frac{4}{6}\pi R^3; \quad m_2 \sim V_2 = \pi R^2 x; \quad l_1 = \frac{3}{8}R; \quad l_2 = \frac{x}{2};$$

$$\frac{4}{6}\pi R^3 \cdot \frac{3}{8}R = \pi R^2 x \cdot \frac{x}{2}; \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

СТАТИКА

Уровень II

1. Потенциальная энергия зависит от координаты как

$$W_п(x) = 6x^2 - 3x + 2.$$

Найдите координату точки, соответствующей положению равновесия этой системы, и выясните характер равновесия.

Ответ: $x = 0{,}25$ м, равновесие устойчивое.

Решение. Условие равновесия системы $\frac{dW_п}{dx} = 0$,

$\frac{d}{dx}(6x^2 - 3x + 2) = 12x - 3 = 0$; $x = 0{,}25$ м — координата точки, соответствующей положению равновесия. Знак второй производной укажет на характер равновесия: при $\frac{d^2W}{dx^2} > 0$ кривая потенциальной энергии имеет минимум, т.е. равновесие устойчивое.

$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{d}{dx}(12x - 3) = 12 > 0$, равновесие системы устойчивое.

2. Потенциальная энергия тела массой 1 кг изменяется по закону $W_п(x) = 4x^2 + 2x + 5$. Найдите ускорение тела при прохождении им положения равновесия.

Ответ: $a = 0$.

Решение. По определению работа dA равна изменению потенциальной энергии со знаком минус $dA = -dW_п$. С другой стороны $dA = Fdx$, тогда $Fdx = -dW_п$, откуда $F = -\frac{dW_п}{dx}$. По второму закону Ньютона $F = ma$, $a = \frac{F}{m} = -\frac{1}{m}\frac{dW_п}{dx}$,

$$a = -\frac{1}{m}\frac{d}{dx}(4x^2 + 2x + 5) = -\frac{1}{m}(8x + 2). \qquad (1)$$

Координату тела в положении равновесия определяем из условия $\frac{dW_п}{dx} = 0$, $\frac{d}{dx}\left(4x^2 + 2x + 5\right) = 0$, $8x + 2 = 0$, $x = -0{,}25$ м. Подставляя x и m в (1), получим $a = 0$.

3. Однородная балка массой $m = 80$ кг и длиной $l = 1{,}8$ м опирается о гладкий пол и гладкий выступ B на высоте $h = 1{,}4$ м над полом. Балка составляет с вертикалью угол $\alpha = 30°$ и удерживается веревкой AC, натянутой у пола (рис. 1 а). Найдите силу натяжения веревки $\vec{T}$ и силы реакции пола $\vec{N}$ и выступа $\vec{R}$.

Ответ: $T = 189$ Н; $N = 675$ Н; $R = 218$ Н.

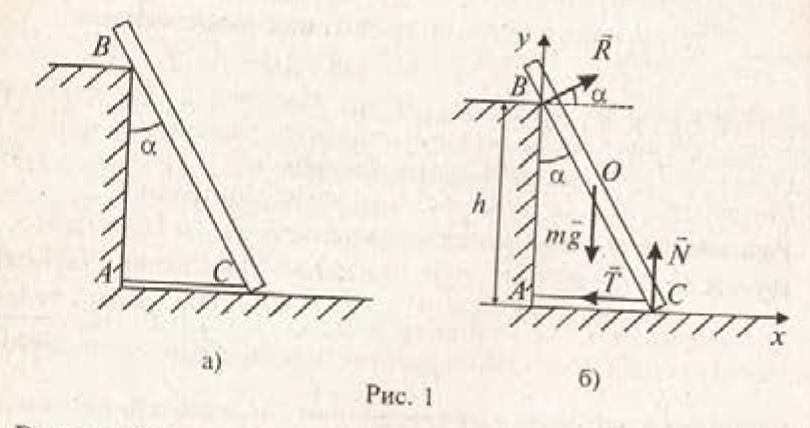


Рис. 1

Решение. Силы, действующие на балку, и оси координат указаны на рис. 1б). Условие равновесия балки $\vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} + \vec{R} = 0$,

(x): $R\cos\alpha - T = 0$, (1)

(y): $R\sin\alpha + N - mg = 0$. (2)

Моменты сил рассматриваем относительно оси, проходящей через точку C. $R \cdot |BC| - mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0$; $BC = \frac{h}{\cos\alpha}$;

$$R\frac{h}{\cos\alpha} - mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0;$$

$$R = \frac{mgl}{2h}\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{mgl\sin 2\alpha}{4h}; \; R = 218 \text{ Н}.$$

Из (1) $T = R\cos\alpha$; $T = 189$ Н.

Согласно (2) $N = mg - R\sin\alpha$; $N = 675$ Н.

4. Доска AB, длина которой равна $2l$, а масса m подвешена на двух веревках AC и BC равной длины. Каждая из веревок составляет с доской угол β. В точке D на расстоянии $AD = S$ лежит груз,

масса которого M. Определите угол α наклона доски к горизонту в положении равновесия и натяжения веревок T_1 и T_2.

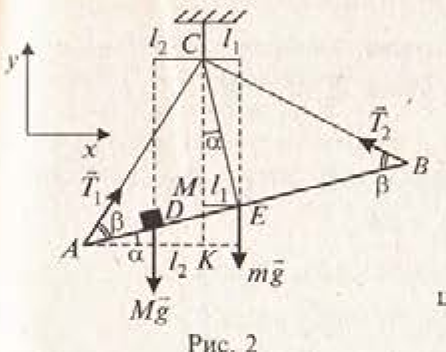


Рис. 2

Ответ: $\text{tg}\,\alpha = \frac{M(l-s)}{l(m+M)}\text{ctg}\,\beta$;

$$T_1 = (m+M)g\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\beta};$$

$$T_2 = (m+M)g\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin 2\beta}.$$

Решение. Все силы, действующие на систему, указаны на рис. 2.

Условие равновесия:

$$m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0;$$

(x): $T_1\cos(\alpha+\beta) - T_2\cos(\beta-\alpha) = 0$; (1)

(y): $T_1\sin(\alpha+\beta) + T_2\sin(\beta-\alpha) - mg - Mg = 0$. (2)

Моменты всех сил вычисляем относительно точки C:

$mgl_1 - Mgl_2 = 0$, где l_1 — плечо силы mg (рис. 2). Найдем его.

Из ΔACE: $CE = AE\,\text{tg}\beta = l\,\text{tg}\beta$; из ΔCEM: $l_1 = CE\sin\alpha = l\sin\alpha\,\text{tg}\beta$.

l_2 — плечо силы Mg — определяем так. Из ΔACE $AC = \frac{l}{\cos\beta}$;

из ΔACK: $AK = AC\cos(\alpha+\beta) = \frac{l\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$; и, наконец,

$$l_2 = AK - S\cos\alpha = \frac{l\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} - S\cos\alpha.$$

Уравнение моментов относительно точки C:

$$mgl\sin\alpha\cdot\text{tg}\beta - Mg\left[\frac{l\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} - S\cos\alpha\right] = 0;$$

отсюда $\text{tg}\,\alpha = \frac{M(l-S)}{l(m+M)}\text{ctg}\,\beta$.

Из (1) и (2) получим $T_1 = (m+M)g\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\beta}$;

$$T_2 = (m+M)g\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin 2\beta}.$$

5. Деревянный кубик опирается одним ребром на пол, другим — на вертикальную стену. При каком минимальном значении угла α между полом и гранью кубика возможно равновесие? Ко-

эффициент трения между гранью и стеной, а также между гранью и полом равен $\mu = 0,3$.

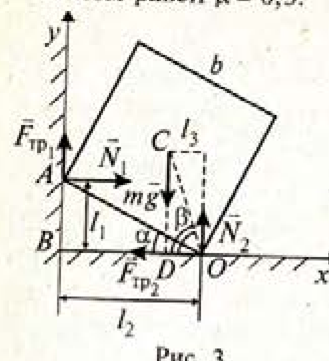


Рис. 3

Ответ: $\alpha = 28°$.

Решение. Условия равновесия кубика $\sum_i \vec{F}_i = 0;\ \sum_i \vec{M}_i = 0;$

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр_1} + \vec{F}_{тр_2} = 0;$$

$$F_{тр} = \mu N;$$

(x): $N_1 - \mu N_2 = 0$ (рис. 3); (1)

(y): $N_2 - mg + \mu N_1 = 0$. (2)

Уравнение моментов записываем относительно точки O.

$N_1 l_1 + F_{тр_1} l_2 - mgl_3 = 0$. (3)

Обозначим сторону кубика b, тогда из ΔABO $l_1 = b\sin\alpha;\ l_2 = b\cos\alpha;$

$l_3 = OD$, из ΔDOC $l_3 = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos(45° + \alpha)$. Уравнение (3) приобретает вид $N_1 b\sin\alpha + \mu N_1 b\cos\alpha - mg\dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos(45° + \alpha) = 0$. (4)

Из (1) и (2) получим $N_2 = \dfrac{N_1}{\mu};\ N_1 = \dfrac{\mu mg}{1 + \mu^2}$ и подставим в (4):

$$\frac{\mu mg}{1 + \mu^2} b\sin\alpha + \frac{\mu^2 mg}{1 + \mu^2} b\cos\alpha - mg\frac{b}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha) = 0,$$

откуда следует $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1-\mu}{1+\mu} = 28°$. Очевидно, что максимальный угол, под которым может стоять ящик, равен $\pi/4$, следовательно $\operatorname{arctg}\dfrac{1-\mu}{1+\mu} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4}$.

6. _____ Однородный цилиндр A массой M лежит на гладкой горизонтальной поверхности и удерживается нитью OC, составляющей угол α с горизонтом. На цилиндр A и гладкую вертикальную стенку опирается однородный цилиндр B, массой m и диаметром, меньшим диаметра цилиндра A. Найдите натяжение T нити OC и силы давления цилиндров на стенки N_1 и N_3, если известно, что отрезки OA и AB перпендикулярны.

Ответ: $N_1 = Mg + \dfrac{mg}{\cos^2\alpha}$; $N_3 = mg\operatorname{tg}\alpha$; $T = \dfrac{mg\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.

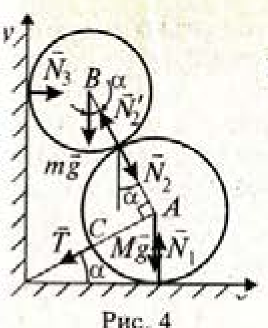


Рис. 4

Решение. Условие равновесия для цилиндра A (рис. 4):

$$M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T} = 0;$$

для цилиндра B: $m\vec{g} + \vec{N}_2' + \vec{N}_3 = 0$.

По третьему закону Ньютона $\vec{N}_2 = -\vec{N}_2'$, $|\vec{N}_2'| = |\vec{N}_2| = N_2$;

(x): $N_2\sin\alpha - T\cos\alpha = 0$; (1)

$N_3 - N_2'\sin\alpha = 0$; (2)

(y): $N_1 - Mg - N_2\cos\alpha - T\sin\alpha = 0$; (3)

$N_2'\cos\alpha - mg = 0$. (4)

Из (4) $N_2' = N_2 = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$. Из (1) $T = \dfrac{N_2\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{mg\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$. Уравнение (2) дает $N_3 = N_2\sin\alpha = mg\operatorname{tg}\alpha$; из (3)

$$N_1 = Mg + N_2\cos\alpha + T\sin\alpha = Mg + mg + \frac{mg\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = Mg + \frac{mg}{\cos^2\alpha}.$$

7. _____ Однородный шар массой M лежит на двугранном угле β, одна грань которого образует с горизонталью угол α. Определите силы реакций, действующих на шар.

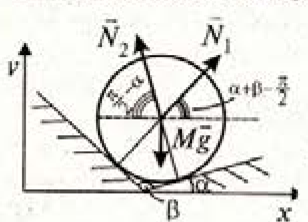


Рис. 5

Ответ: $N_1 = \dfrac{Mg\sin\alpha}{\sin\beta}$, $N_2 = Mg\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$.

Решение. В положении равновесия сумма сил, действующих на шар, равна нулю: $M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$.

$$(x):\ N_1\cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) - N_2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0,$$

$$(y):\ N_1\sin\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) + N_2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - Mg = 0.$$

$N_1\sin(\alpha+\beta) - N_2\sin\alpha = 0$, (1)

$N_2\cos\alpha - N_1\cos(\alpha+\beta) - Mg = 0$. (2)

Из (1): $N_2 = \dfrac{N_1\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$, подставляем в (2)

$$\frac{N_1\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} - N_1\cos(\alpha+\beta) = Mg$$

$$N_1 = \frac{Mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha} = \frac{Mg\sin\alpha}{\sin\beta}.\ N_2 = Mg\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

8. ______ Рабочий везет груженую тачку, толкая ее перед собой. Движение тачки было остановлено кирпичом высотой $h = 8$ см, попавшим под колесо. Угол между ручками тачки и горизонталью $\alpha = 15°$. Сила давления тачки на землю $Q = 400$ Н. Радиус колеса $R = 20$ см. Определите силу $\vec{F}$, с которой рабочий должен толкать тачку, чтобы она перекатилась через кирпич. Найти силу реакции $\vec{R}$ (величину и направление) кирпича, когда колесо наезжает на кирпич. (Считать, что кирпич закреплен и не проскальзывает).

Ответ: $F = 860$ Н, $R = 1{,}04$ кН, $\theta = 36{,}9°$.

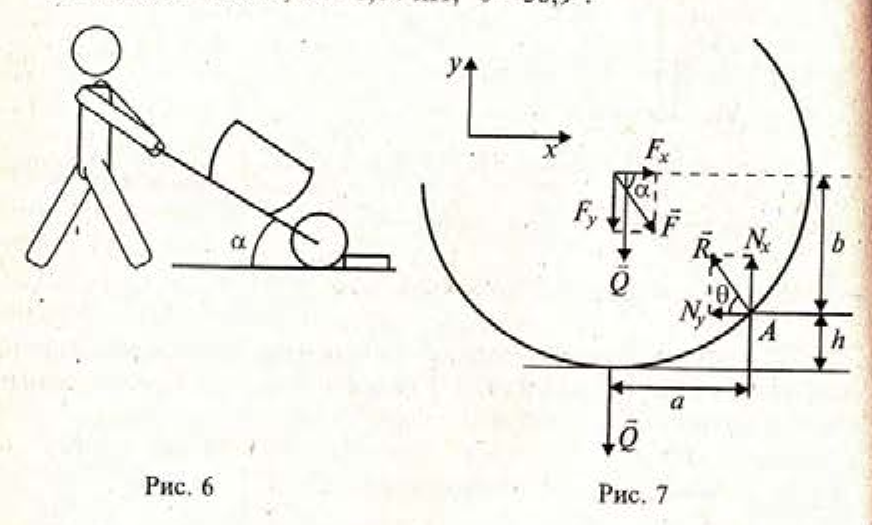


Рис. 6 Рис. 7

Решение. $\sum_i \vec{F}_i = 0$;

(x): $F\cos\alpha - N_x = 0$ (рис. 6); (1)

(y): $N_y - Q - F\sin\alpha = 0$; (2)

здесь учтено, что сила тяжести системы равна силе давления Q. $\sum_i \vec{M}_i = 0$. Моменты сил берем относительно оси, проходящей через точку A, $F_x b - F_y a - Q \cdot a = 0$; $b = R - h = 12$ см; $a = \sqrt{R^2 - b^2} = 16$ см;

$$Fb\cos\alpha - Fa\sin\alpha - Qa = 0;\quad F = \frac{Qa}{b\cos\alpha - a\sin\alpha} = 860 \text{ Н}.$$

Из (1) и (2) получим

$N_x = F\cos\alpha = 830$ Н; $N_y = Q + F\sin\alpha = 622$ Н;

$$R = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = 1{,}04 \text{ кН};\quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{N_y}{N_x} = \operatorname{arctg}(0{,}749) = 36{,}9°.$$

9. ______ Покажите, как «клин клином вышибают» (рис. 8 а).

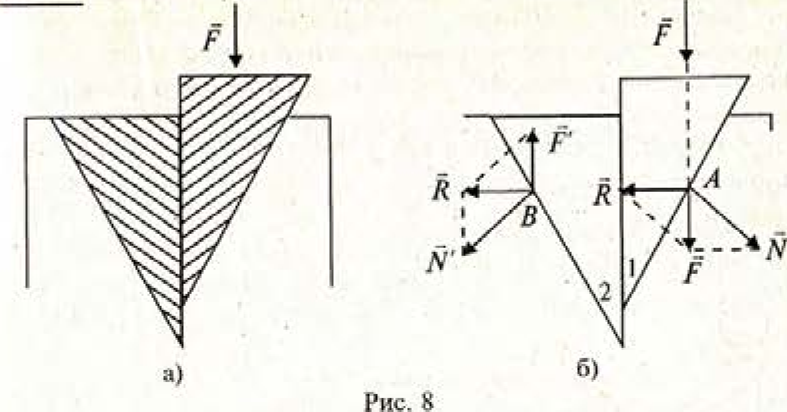


Рис. 8

Решение. Силу $\vec{F}$ переносим в точку A, где ее раскладываем на две составляющие $\vec{N}$ и $\vec{R}$ (рис. 8 б). Сила $\vec{R}$ действует на вбитый клин 2. Переносим эту силу в точку B и разлагаем на две составляющие $\vec{N}'$ и $\vec{F}'$, которая выталкивает клин 2.

10. ______ Стержень AB шарнирно закреплен в точке A и опирается концом B на платформу. Какую минимальную силу нужно приложить для того, чтобы сдвинуть тележку с места? Масса стержня равна m, коэффициент трения стержня о платформу равен μ, угол, образуемый стержнем с вертикалью, равен α. Трением качения колес и трением в осях пренебречь (рис. 9).

Ответ: $F > \dfrac{\mu mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha)}$.

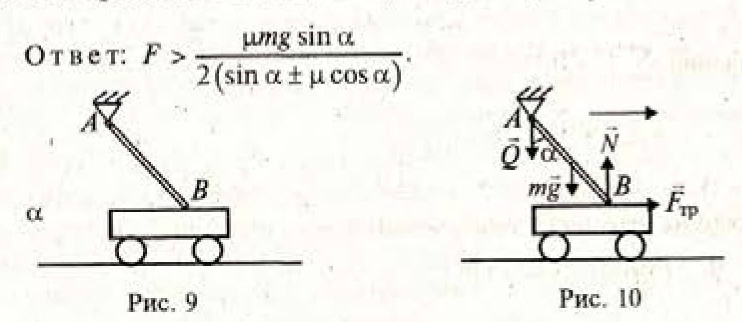


Рис. 9 Рис. 10

Решение. Предположим, что тележка движется вправо. Силы, действующие на стержень, указаны на рисунке 10. Для описания положения равновесия используем уравнение моментов сил относительно точки A. Пусть длина стержня l, тогда

$$F_{тр} l\cos\alpha + Nl\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0.$$

Если прилагаемая сила минимальна, тогда сила трения равна предельному значению силы трения покоя $F_{тр} = F_{тр.пр.} = \mu N$.

Тогда $F_1 > F_{тр.пр} = \dfrac{\mu mg \sin\alpha}{2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$.

Тележку можно сдвинуть вправо силой, большей чем $F_{тр.пр}$. При движении тележки влево меняется только направление силы трения. В этом случае $F_2 > F_{тр.пр} = \dfrac{\mu mg \sin\alpha}{2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$.

Отметим, что при $\sin\alpha < \mu\cos\alpha$, т. е. при $\operatorname{tg}\alpha < \mu$ происходит заклинивание, тележку сдвинуть нельзя.

11. Может ли оставаться в покое ящик, висящий на веревке у вертикальной стены так, как показано на рис. 11, если трение отсутствует?

Ответ: Равновесие невозможно.

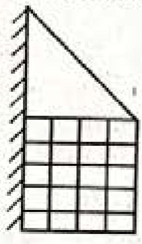


Рис. 11

Рис. 12

Решение. Учтем, что моменты силы натяжения веревки и силы тяжести ящика относительно точки O, расположенной на веревке над центром тяжести ящика (рис. 12), равны нулю. Сила реакции стенки $\vec{N}$, момент этой силы относительно точки O закручивает ящик против часовой стрелки. Этот момент ничем не скомпенсирован, значит, равновесие невозможно.

12. Выкладывая карниз здания, каменщики кладут один на другой четыре кирпича так, что часть вышележащего кирпича выступает над нижележащими. Длина каждого кирпича l. Определить наибольшие длины выступающих частей кирпичей, при которых кирпичи в карнизе будут без цементного раствора еще находиться в равновесии.

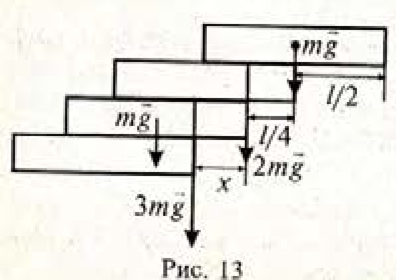


Рис. 13

Ответ: Смещение равно $\dfrac{11}{12}l$.

Решение. Так как кирпичи однородны, то центр тяжести каждого кирпича отстоит от края на $l/2$. Поэтому самый верхний кирпич может выступать над краем второго на $l/2$. Центр тяжести первого и

второго кирпичей вместе находится на расстоянии $l/4$ от внешнего края второго кирпича (рис. 13). На это расстояние можно сместить второй кирпич, чтобы он и первый кирпич еще находились в равновесии по отношению к третьему кирпичу. Центр тяжести трех верхних кирпичей можно найти из условия: $mg(\frac{l}{2} - x) = 2mgx$, отсюда $x = \dfrac{l}{6}$, т. е. третий кирпич может выступать над четвертым не более чем на $\dfrac{l}{6}$ своей длины.

Полное смещение верхнего кирпича относительно нижнего равно $\dfrac{l}{2} + \dfrac{l}{4} + \dfrac{l}{6} = \dfrac{11}{12}l$.

13. Из квадратной однородной пластинки с длиной ребра a вырезали равнобедренный треугольник высотой h, с основанием a. Определите центр тяжести полученной фигуры 2 ($0 < h \le a$) (рис. 14). При каком условии центр тяжести этой фигуры будет лежать вне ее?

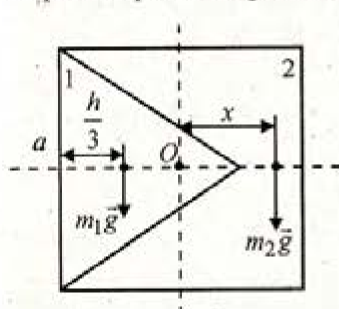


Рис. 14

Ответ: $x = \dfrac{(3a-2h)h}{6(2a-h)}$, $h_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)a$.

Решение. Алгебраическая сумма моментов сил тяжести фигур 1 и 2 относительно центра тяжести пластинки (точка O) равна нулю. Учтем, что центр тяжести треугольника лежит на расстоянии $\dfrac{h}{3}$ от основания, слева от центра пластины, т. к. $h \le a$. Центр тяжести фигуры 2 находится на средней линии квадрата на расстоянии x от его центра. Масса треугольника $m_1 = \rho\frac{1}{2}ahd$, масса пластинки $m = \rho a^2 d$, масса фигуры 2 $m_2 = m - m_1 = \rho ad\left(a - \frac{1}{2}h\right)$, где ρ — плотность материала пластинки, d — ее толщина. Уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку O:

$$m_2 gx - m_1 g\left(\frac{a}{2} - \frac{h}{3}\right) = 0,\quad x = \frac{(3a-2h)}{6}\cdot\frac{m_1}{m_2} = \frac{(3a-2h)h}{6(2a-h)}.$$

Центр тяжести фигуры 2 лежит справа от центра пластины. Можно вырезать треугольник такой высоты h_1, чтобы центр тяжести фигуры 2 совпадал с вершиной треугольника, тогда

$\frac{a}{2}+\frac{(3a-2h_1)h_1}{6(2a-h_1)}=h_1$. Решение квадратного уравнения относительно h_1 дает $h_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)a$.

Если высота вырезанного треугольника $h > h_1$, то центр тяжести фигуры 2 лежит вне ее.

14. Определите положение центра масс однородного полушара радиусом R.

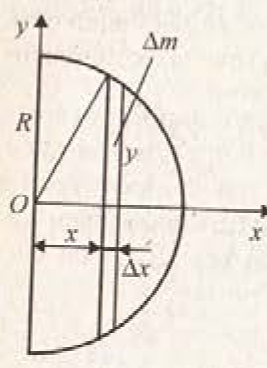


Рис. 15

Ответ: $r_c=\frac{3}{8}R$ — от геометрического центра шара.

Решение. Полушар симметричен относительно оси x (рис. 15), поэтому его центр масс будет находиться на этой оси:

$r_c=x_c=\frac{\sum_i \Delta m_i x_i}{m}$, где Δm_1 — элемент массы в виде диска радиусом y и толщиной Δx. Так как полушар сплошной, то от суммирования необходимо перейти к интегрированию, тогда $x_c=\frac{\int_0^R xdm}{m}$.

$$dm=\rho dV=\rho\pi y^2dx;\quad y^2=R^2-x^2;\quad dm=\rho\pi\left(R^2-x^2\right)dx;$$

ρ — плотность материала полушара, dV — элемент объема (диск).

Масса полушара $m=\frac{4}{6}\pi R^3\rho$, отсюда

$$x_c=\frac{6}{4\pi R^3\rho}\int_0^R\rho\pi\left(R^2-x^2\right)xdx=\frac{3}{8}R.$$

12: ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ

Уровень I

12.1. Какое давление на лунный грунт оказывал астронавт, масса которого со снаряжением m = 175 кг, а ботинок оставлял след площадью S = 410 см²?

Ответ: p > 7 кПа.

Решение. Давление космонавта на грунт, если он стоит на двух ногах, $p=\frac{F}{2S}=\frac{mg_л}{2S}$, где $g_л$ = 1,65 м/с², тогда p = 3,5 кПа.

Во время ходьбы космонавт наступает только одной ногой, поэтому давление на грунт равно 7 кПа.

12.2. Цилиндрический сосуд с жидкостью площадью S = 200 см² плотно прикрыт поршнем массой m = 1,0 кг. Определите, какое давление оказывает поршень на жидкость: 1) без груза; 2) с грузом массой M = 5,0 кг; 3) под действием силы F = 200 Н, направленной под углом α = 30° к поршню. Какое давление оказывает жидкость на поршень в каждом из случаев? Изменятся ли ответы, если вместо жидкости будет газ?

Ответ: 1) p = 0,49 кПа; 2) p = 2,94 кПа; 3) p = 5,5 кПа. Не изменятся.

Решение. $p=\frac{F}{S}$. *1)* Давление без груза $p=\frac{mg}{S}=0{,}49$ кПа.

2) С грузом $p=\frac{(m+M)g}{S}=2{,}94$ кПа.

3) $p=\frac{F\cos(90^\circ-\alpha)+mg}{S}=\frac{F\sin\alpha+mg}{S}=5{,}5$ кПа.

12.3. С какой силой давит пар на предохранительный клапан диаметром 80 мм, если давление внутри сосуда 10 МПа?

Ответ: F = 5 кН.

Решение. $p=\frac{F}{S};\quad F=p\cdot S=p\cdot\frac{\pi d^2}{4}=5$ кН.

12.4. Невесомая жидкость, находящаяся в цилиндрическом сосуде площадью S, плотно закрыта легким поршнем, на который под углом α = 60° к нормали действует сила F. Постройте график зависимости давления внутри жидкости от расстояния до поршня. Как изменится график, если сила будет действовать перпендикулярно поверхности поршня?

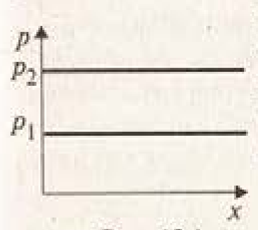


Рис. 12.1

Решение. $p_1=\frac{F\cos\alpha}{S}=\frac{F}{2S}$; $p_2=\frac{F}{S}$ (рис. 12.1).

12.5. В полый куб с ребром a налита доверху жидкость плотностью ρ. Определите силу давления на грани куба.

Ответ: $F_1=\rho ga^3$ — на дно; $F_2=\rho ga^3/2$ — на боковые грани.

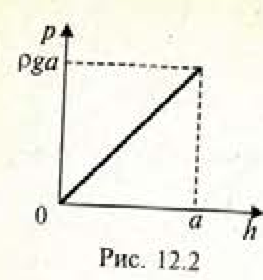


Рис. 12.2

Решение. Давление зависит от высоты уровня жидкости $p = \rho g h$. Давление у дна кубика $p_1 = \rho g a$. Сила давления на дно $F_1 = p_1 a^2 = \rho g a^3$. Давление на грань кубика зависит от высоты жидкости, которая меняется от 0 (наверху) до a (у дна) (рис. 12.2).

Зависимость давления от высоты прямопропорциональная, тогда можно использовать среднее значение давления $p_{ср} = \dfrac{1}{2} p_1$. Сила давления на боковые грани $F_2 = p_{ср} S = \dfrac{1}{2} p_1 a^2 = \dfrac{1}{2} \rho g a^3$.

12.6. В цилиндрическое ведро диаметром $D = 25$ м налита вода, занимающая объем $V = 12$ л. Каково давление p воды на стенку ведра на высоте $h = 10$ см от дна?

Ответ: $p = 1{,}4$ кПа.

Решение. $p = \rho_в g(H - h)$, где $\rho_в$ — плотность воды, H — высота воды в ведре. $V = \pi \dfrac{D^2}{4} H$; $H = \dfrac{4V}{\pi D^2}$, откуда $p = \rho_в g\left(\dfrac{4V}{\pi D^2} - h\right) = 1{,}4$ кПа.

12.7. До какой высоты h нужно налить жидкость в цилиндрический сосуд радиусом R, чтобы сила F, с которой жидкость давит на боковую поверхность сосуда, была равна силе давления на дно?

Ответ: $h = R$.

Решение. $F = p \cdot S$. Сила давления на дно цилиндра $F_1 = \rho g h \cdot \pi R^2$, на стенку (средняя сила) $F_2 = \dfrac{1}{2} \rho g h 2\pi R h$. $F_1 = F_2$, $\rho g h \pi R^2 = \dfrac{1}{2} \rho g h 2\pi R h$; $h = R$.

12.8. В одном из опытов Паскаля в крышке прочной деревянной бочки делалось узкое отверстие, куда вставлялась длинная трубка, через которую наливалась вода. Когда бочка и трубка заполнились, давление воды разорвало бочку. Определите силу, действовавшую на днище бочки площадью 0,20 м², когда уровень воды поднялся на высоту 4,0 м от днища.

Ответ: $F = 7{,}8$ кН.

Решение. $F = p \cdot S$, $p = \rho g h$; $F = \rho g h S = 7{,}8$ кН.

12.9. Гидростат глубинной бомбы установлен на давление воды $p = 5 \cdot 10^5$ Па. На какой глубине взорвется эта бомба?

Ответ: $h = 51$ м.

Решение. $p = \rho g h$; $h = \dfrac{p}{\rho g} = 51$ м.

12.10. Сосуд, имеющий форму усеченного конуса с приставным дном, опущен в воду. Если в сосуд налить 200 г воды, то дно оторвется. Отпадет ли дно, если на него поставить гирю 200 г? Налить 200 г масла? Налить 200 г ртути?

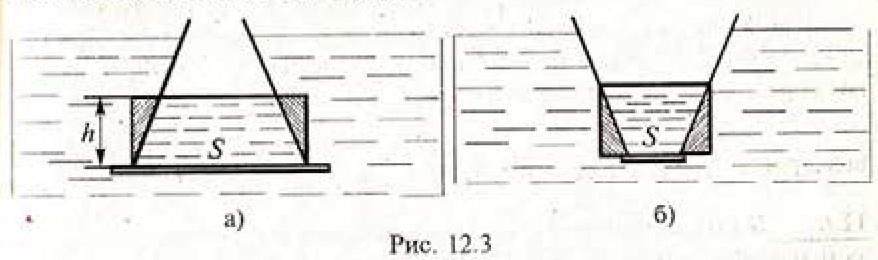


Рис. 12.3

Решение. 1) Сосуд сужается кверху.

Сила давления жидкости на дно $F = \rho g h S$.

В случае сужающегося кверху сосуда эта сила больше веса жидкости, налитой в сосуд, на величину веса жидкости, занимающего заштрихованный объем (рис. 12.3а). Гиря и ртуть дно не оторвут, а масло оторвет дно, т. к. масло занимает больший объем, чем вода, т. е. высота уровня масла h будет больше, чем для воды.

2) Сосуд сужается книзу (рис. 12.3б).

В этом случае сила давления на дно налитой в сосуд жидкости меньше веса жидкости. При этом гиря и ртуть оторвут дно, а масло не оторвет.

12.11. Раздавливаются ли затонувшие корабли? Ответ объяснить.

Решение. Затонувшие корабли не раздавливаются, т. к. они наполнены жидкостью, оказывающей на стенки корабля такое же давление, как и жидкость вне корабля.

12.12. Цилиндрический сосуд высотой $h = 1$ м заполняют маслом с плотностью $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м³ и погружают открытым концом в бассейн с водой (рис. 12.4). Найдите давление масла в сосуде непосредственно у его дна в точке A, если известно, что нижний конец сосуда находится на глубине $H = 3$ м от поверхности воды в бассейне.

Рис. 12.4

Ответ: $p = 120{,}6$ кПа.

Решение. Давление на уровне нижней стороны сосуда (т. D) $p_D = p_0 + \rho_в g H$, где p_0 — атмосферное давление, $\rho_в$ — плотность воды.

С другой стороны под сосудом (т. C)

$p_C = p_A + \rho_м g h$, p_A — давление в точке A,

$\rho_м$ — плотность масла. На одном уровне давление жидкости одинаковое, т. е. $p_D = p_C$.

$$p_0 + \rho_в gH = p_A + \rho_м gh;$$

$$p_A = p_0 + g\left(\rho_в H - \rho_м h\right) = 120,6 \text{ кПа}.$$

12.13. Какая сила давления может быть получена с помощью гидравлического пресса, если к малому поршню приложена сила $f = 100$ Н, а площадь поршней пресса соответственно равна $S_1 = 5,0$ см² и $S_2 = 500$ см²? Коэффициент полезного действия пресса $\eta = 0,80$.

Ответ: $F = 8$ кН.

Решение. Коэффициент полезного действия пресса (рис. 12.5)

$$\eta = \frac{A_п}{A_з} = \frac{FH}{fh}. \quad (1)$$

Исходя из условия несжимаемости жидкости $S_1 h = S_2 H$; $\frac{H}{h} = \frac{S_1}{S_2}$. Из (1)

$$\eta = \frac{FH}{fh} = \frac{FS_1}{fS_2}; \quad F = \frac{\eta f S_2}{S_1} = 8 \text{ кН}.$$

Рис. 12.5

12.14. Малый поршень гидравлического пресса за один ход опускается на расстояние $h = 0,20$ м, а большой поршень поднимается на $H = 1,0$ см. С какой силой F действует пресс на зажатое в нем тело, если на малый поршень действует сила $f = 500$ Н? КПД пресса $\eta = 0,95$.

Ответ: $F = f\eta h/H = 9,5$ кН.

Решение самостоятельное. См. задачу 12.13.

12.15. При подъеме груза массой $m = 2,0$ т с помощью гидравлического пресса была затрачена работа $A_з = 400$ Дж. При этом малый поршень сделал $n = 10$ ходов, перемещаясь за один ход на $h = 10$ см. Во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого поршня? КПД пресса $\eta = 0,90$.

Ответ: $S_2/S_1 = 55$.

Решение. КПД пресса $\eta = A_п/A_з$; $A_п = mgH$.

Из условия несжимаемости жидкости получим $H = nhS_1/S_2$ — высота, на которую поднимется большой поршень площадью S_2 за n ходов малого поршня площадью S_1, тогда $\eta = mgnhS_1/A_з S_2$, откуда $\frac{S_2}{S_1} = \frac{mgnh}{\eta A_з} = 55$.

12.16. При помощи гидравлического пресса с отношением площадей 1 : 100 нужно поднять груз массой 100 т. Определите число ходов малого поршня в 1 минуту, если за один ход он опускается на 20 см. Мощность двигателя пресса 5 кВт, КПД пресса 80%.

Ответ: $n = 120$.

Решение. Число ходов малого поршня пресса $n = \frac{A}{A_1}$, где A — работа двигателя пресса за время t, A_1 — работа двигателя за время одного хода малого поршня.

Определяем работу A_1. Для подъема груза массой m, лежащего на большом поршне гидравлического пресса, нужно приложить силу $F_2 = mg$. При этом по закону Паскаля $p_1 = p_2$ (давление в обоих поршнях должно быть одинаковым т. е. $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$). К малому поршню должна быть приложена сила $F_1 = F_2\frac{S_1}{S_2}$, где S_1 и S_2 — площади малого и большого поршней. Работа этой силы за один ход малого поршня: $A_1 = F_1 h = F_2\frac{S_1}{S_2}h$.

Работа двигателя пресса за время подъема груза $A = \eta A'$, где $A' = Pt$, где P — мощность двигателя. Таким образом, число ходов малого поршня пресса: $n = \frac{\eta P t S_2}{mgS_1 h} = 120$.

12.17. В сообщающиеся сосуды налили ртуть, поверх которой в одном из них находится вода. Разность уровней ртути 15 мм. Найдите высоту столба воды.

Ответ: $h_в = 0,2$ м.

Решение. По закону сообщающихся сосудов давление в обоих сосудах на одном уровне одинаково, т. е. $p_0 + \rho_в h_в g = p_0 + \rho_{рт} g\Delta h$, откуда $h_в = \rho_{рт}\Delta h/\rho_в$, $h_в = 0,2$ м.

12.18 В две сообщающиеся трубки разного сечения налили сначала ртуть, а потом в широкую трубку сечением $S = 8,0$ см² налили воду массой $m = 272$ г. На сколько выше расположен уровень ртути в узком колене, чем в широком?

Ответ: $h = 2,5$ см.

Решение. В сообщающихся сосудах давление жидкости на одном уровне одинаково (рис. 12.6).

Давление в обоих сосудах на уровне AB одинаково $p_A = p_B$.

$$p_A = p_0 + \rho_в gH; \quad p_B = p_0 + \rho_{рт} gh,$$

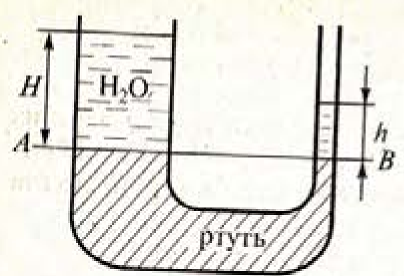


Рис. 12.6

где p_0 — атмосферное давление. Учтем, что $m = \rho_в SH$, и

$H = m/\rho_в S$, тогда

$p_0 + \rho_в gH = p_0 + \rho_{рт} gh$,

и $h = \dfrac{m}{\rho_{рт} S} = 2{,}5$ см.

12.19. В цилиндрический сосуд налиты равные по массе количества воды и ртути. Общая высота столба жидкостей в сосуде $H = 120$ см. Найдите давление p на дно сосуда.

Ответ: $p = 22$ кПа.

Решение. Давление жидкости на дно сосуда

$p = \rho_в g h_1 + \rho_{рт} g h_2$, (1)

где h_1 и h_2 — высота столба воды и ртути соответственно.

$h_1 + h_2 = H$. (2)

Учитывая, что $m_в = m_{рт}$, получим $\rho_в S h_1 = \rho_{рт} S h_2$. (3)

Из (3) $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\rho_{рт}}{\rho_в}$; $h_2 = \dfrac{\rho_в h_1}{\rho_{рт}}$, подставим в (2) и

получим $h_1 = \dfrac{\rho_{рт} H}{\rho_в + \rho_{рт}}$; $h_2 = \dfrac{\rho_в H}{\rho_в + \rho_{рт}}$. (4)

Используя (4) и (1), имеем $p = \dfrac{2\rho_в \rho_{рт} gH}{\rho_в + \rho_{рт}} = 22$ кПа.

12.20. В цилиндрический сосуд налили ртуть и поверх нее — масло. Масса масла в 2 раза меньше массы ртути. Сосуд заполнен до высоты $h = 30$ см. Определите давление на дно сосуда, если плотность масла $\rho_м = 900$ кг/м³.

Ответ: $p = 3\rho_{рт}\rho_м gh/(\rho_{рт} + 2\rho_м) = 7 \cdot 10^3$ Па.

Решение самостоятельное. ***Указание***. См. задачу 12.19.

12.21. В сообщающиеся сосуды налили ртуть, а поверх нее в один сосуд налили столб масла высотой $h_1 = 36$ см, а в другой — столб керосина высотой $h_2 = 15$ см. Определите разность уровней ртути в обоих сосудах.

Рис. 12.7

Ответ: $\Delta h = 1{,}5$ см.

Решение. В качестве поверхности одного уровня выберем нижний уровень масла в левом сосуде (рис. 12.7).

$p_0 + \rho_м g h_1 = p_0 + \rho_к g h_2 + \rho_{рт} g \Delta h$;

$\Delta h = \dfrac{\rho_м h_1 - \rho_к h_2}{\rho_{рт}} = 1{,}5$ см.

12.22. В сообщающиеся сосуды налили ртуть, а затем в один из сосудов — воду, а в другой — бензин. Верхние уровни воды и бензина совпали. Какова разность уровней ртути в сосудах, если высота столбика воды $h = 21{,}5$ см?

Ответ: $\Delta h = h(\rho_в - \rho_б)/(\rho_{ст} - \rho_б) = 0{,}17$ см.

Решение самостоятельное. ***Указание***. См. задачу 12.21.

12.23. В сосуд с водой вставлена трубка сечением $S = 2{,}0$ см². В трубку налили масло массой $m = 72$ г. Найдите разность уровней масла и воды.

Рис. 12.8

Ответ: $\Delta h = 4$ см.

Решение. Давление отсчитываем от нижнего уровня масла в трубке (уровень A рис. 12.8).

$\rho_м gH = \rho_в g(H - \Delta h)$;

$\Delta h = H\left(1 - \dfrac{\rho_м}{\rho_в}\right)$.

По условию $m = \rho_м gH$, откуда

$H = \dfrac{m}{\rho_м g}$, тогда $\Delta h = \dfrac{m}{S}\left(\dfrac{1}{\rho_м} - \dfrac{1}{\rho_в}\right) = 4$ см.

12.24. Прямоугольная коробочка из жести массой $m = 76$ г с площадью дна $S = 38$ см² и высотой $H = 6{,}0$ см плавает в воде. Определите высоту надводной части коробочки.

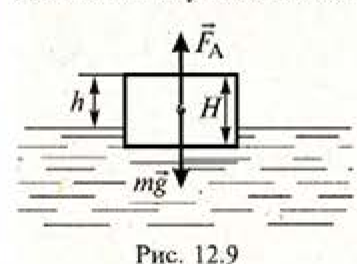


Рис. 12.9

Ответ: $h = 4$ см.

Решение. Коробочка находится в равновесии (рис. 12.9) $mg = F_A$.

По закону Архимеда

$F_A = \rho_в g V_1 = \rho_в g S(H - h)$.

$mg = \rho_в g S(H - h)$; $\rho_в$ — плотность воды. Тогда $h = H - \dfrac{m}{\rho_в S} = 4$ см.

12.25. В цилиндрический сосуд с водой опустили железную коробочку, из-за чего уровень воды в сосуде поднялся на высоту $L = 2$ см. На сколько опустится уровень воды, если коробочка утонет? Плотность железа $\rho_ж = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: $\Delta L = 1{,}74$ см.

Решение. Объем воды в сосуде постоянен, поэтому при погружении железной коробочки (плавает) изменение уровня воды связано с объемом вытесненной жидкости, т. е. $LS_c = xS_к$, (1)
где S_c — площадь поперечного сечения сосуда, x — высота части коробочки, находящейся в воде, $S_к$ — площадь поперечного сечения коробочки.

Если коробочка утонула, то $lS_c = hS_к$, (2)
где l — изменение уровня воды в сосуде (коробочка утонула), h — высота коробочки.

Разделим (1) на (2) $\frac{L}{l} = \frac{x}{h}$; $l = \frac{Lh}{x}$. (3)

Отношение h/x найдем из закона Архимеда $mg = F_А$:

$\rho_ж g S_к h = \rho_в g S_к x$; $\frac{h}{x} = \frac{\rho_в}{\rho_ж}$, тогда из (3) $l = L\frac{\rho_в}{\rho_ж}$.

Изменение уровня воды в сосуде, когда коробочка утонет (понижение уровня), $L - l = \Delta L = L - L\frac{\rho_в}{\rho_ж} = L\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_ж}\right) = 1{,}74$ см.

12.26. Пароход, войдя в гавань, выгрузил часть груза; при этом его осадка уменьшилась на $h = 0{,}6$ м. Сколько груза оставил пароход в гавани, если площадь сечения парохода на уровне ватерлинии $S = 5400$ м^2?

Ответ: $m = 3240$ т.

Решение. По закону Архимеда $mg = \rho_в gSh$; $m = \rho_в Sh = 3240$ т.

12.27. Железная труба имеет длину $l = 10$ м и толщину стенок $b = 1$ см. Торцы трубы закрыты невесомыми дисками. Из образовавшегося полого цилиндра откачивают воздух. Каким должен быть диаметр D трубы, чтобы она взлетела?

Ответ: $D = 240$ м.

Решение. Труба станет невесомой, если $mg = \rho_0 gV$, где m — масса трубы, V — ее объем, ρ_0 — плотность воздуха, $\rho_ж$ — плотность железа.

$$\rho_ж g\left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi(D-2b)^2}{4}\right)l = \rho_0 g\frac{\pi D^2}{4}l, \quad \rho_0 D^2 - 4\rho_ж Db + 4\rho_ж b^2 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим $D = 240$ м.

12.28. В цилиндрический сосуд с площадью дна 100 см^2 налита жидкость, плотность которой $\rho = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3. В ней плавает кусок льда массой $m = 300$ г. На сколько большее давление испытывает

дно сосуда благодаря наличию льда? Как изменится давление на дно, если лед растает? Атмосферное давление не учитывать.

Ответ: $\Delta p_1 = 294$ Па; $\Delta p_2 = 0$.

а) б)

Рис. 12.10

Решение. Условие плавания льда (рис. 12.10а)

$F_А - m_л g = 0$; $F_А = m_л g$.

$F_А = \rho g V'$, где V' — объем погруженной части льда. Без льда в сосуде уровень жидкости равен h_1 (рис. 12.10б) и $V' = S(h - h_1)$. Давление на дно было бы равно $p_1 = \rho g h_1$.

В присутствии льда давление на дно $p_2 = \rho g h$. Разность давлений

$\Delta p_1 = p_2 - p_1 = \rho g(h - h_1) = \rho g V'/S = F_А/S = m_л g/S = 294$ Па.

После таяния льда уровень жидкости станет равным $h_2 = h_1 + \Delta h$. По поверхности жидкости растечется вода слоем Δh (рис. 12.10б). Давление на дно $p' = \rho g h_1 + \rho_в g\Delta h$.

Учитывая, что $m_л = \rho_в \Delta h S$, получим $p' = \rho g h_1 + m_л g/S$.

Разность давлений $\Delta p_2 = p' - p_2 = \rho g h_1 + m_л g/S - \rho g h =$
$= p_1 + m_л g/S - p_2 = m_л g/S - (p_2 - p_1) = 0$.

12.29. Стеклянный стакан, имеющий наружный диаметр дна $d = 4$ см и высоту $h = 10$ см, плавает в воде, погрузившись в нее до половины. Сколько воды нужно налить в стакан, чтобы он полностью погрузился в воду?

Ответ: $m_в = 63$ г.

Решение. При погружении пустого стакана на него действует сила Архимеда $F_А = \rho_в g V_1$, где $V_1 = \frac{\pi d^2 h}{2 \cdot 4}$, тогда $mg = \rho_в g\frac{\pi d^2 h}{8}$.

Если в стакан налить воду массой $m_в$ так, чтобы стакан весь погрузился в воду, то $(m + m_в)g = \rho_в g\frac{\pi d^2 h}{4}$;

$$m_в = \rho_в\left(\frac{\pi d^2 h}{4} - \frac{\pi d^2 h}{8}\right) = \frac{\rho_в \pi d^2 h}{8} = 63 \text{ г}.$$

12.30. Один конец нити закреплен на дне, а второй прикреплен к пробковому поплавку, погруженному в воду на 3/4 объема. Определите натяжение нити, если масса поплавка $m = 2$ кг и плотность пробки $\rho_п = 250$ кг/м^3.

Ответ: $T = 39{,}2$ Н.

Решение. Условие равновесия поплавка $mg + T - F_A = 0$;

$T = F_A - mg$. $F_A = \frac{3}{4}\rho_в gV$; $m = \rho_п V$; $V = \frac{m}{\rho_п}$, V — объем поплавка. $T = \frac{3}{4}\rho_в gV - mg = \frac{3}{4}\rho_в g\frac{m}{\rho_п} - mg = mg\left(\frac{3}{4}\frac{\rho_в}{\rho_п} - 1\right) = 39{,}2$ Н.

12.31. Кусок дерева плавает в воде, погружаясь на 3/4 своего объема. Какова плотность дерева?

Ответ: $\rho_д = 3\rho_в/4 = 7{,}5 \cdot 10^2$ кг/м³.

Решение самостоятельное. ***Указание***. См. задачу 12.30.

12.32. Какова осадка парома без нагрузки и его предельная грузоподъемность при высоте бортов над ватерлинией $h_2 = 0{,}3$ м? Паром массой $M = 1800$ кг имеет прямоугольную форму, длина его $l = 6$ м, ширина $d = 3$ м и высота $h = 1$ м.

Ответ: $h_1 = 0{,}1$ м; $m = 10{,}8 \cdot 10^3$ кг.

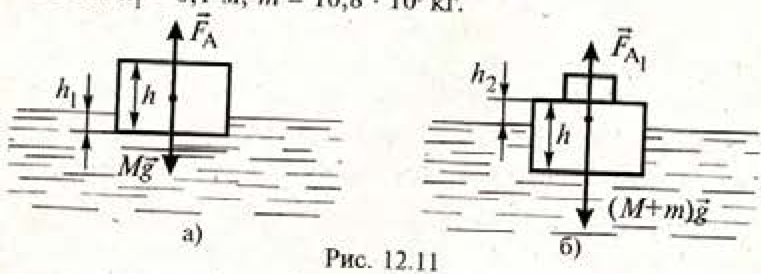


Рис. 12.11

Решение. Без нагрузки (рис. 12.11а) $Mg - F_A = 0$; $F_A = \rho_в gV$, где $V = ldh_1$ — объем погруженной в воду части парома. Тогда $Mg = \rho_в gldh_1$.

Осадка парома без нагрузки $h_1 = \frac{M}{\rho_в ld} = 0{,}1$ м.

Если паром нагружен (рис. 12.11б),

$(M + m)g - F_{A_1} = 0$; $F_{A_1} = \rho_в gld(h - h_2)$;

$(M + m)g = \rho_в gld(h - h_2)$; откуда $m = \rho_в ld(h - h_2) - M = 10{,}8 \cdot 10^3$ кг.

12.33. Две одинаковые по весу оболочки шара, сделанные одна из тонкой резины, а другая из прорезиненной ткани, наполнены одинаковым количеством водорода и у земли занимают одинаковый объем. Какой из шаров поднимется выше, если водород из них выходить не будет?

Ответ: Шар из тонкой резины.

Решение. По мере подъема шаров давление и плотность атмосферы уменьшаются. При этом уменьшается подъемная сила. Когда она станет равной весу оболочки и водорода в ней, шар подниматься не будет. Прорезиненная ткань не растягивается, объем шара не изменится, в то время как шар из тонкой резины с уменьшением внешнего давления будет раздуваться, для него подъемная сила уменьшится мало благодаря сильному увеличению его объема, поэтому шар поднимется гораздо выше, чем шар из прорезиненной ткани.

12.34. Найдите плотность ρ однородного тела, действующего на неподвижную опору в воздухе с силой $P_о = 2{,}8$ Н, а в воде — с силой $P_в = 1{,}69$ Н. Выталкивающей силой воздуха пренебречь.

Ответ: $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение. В воздухе сила давления на опору (вес тела) равна силе тяжести $P_о = mg$, а в воде сила давления (вес тела) уменьшается за счет действия силы Архимеда $P_в = mg - F_A$; $F_A = \rho_в gV$;

$P_в = P_о - \rho_в gV$; $m = \rho V$; $V = \frac{m}{\rho}$; $P_в = P_о - \rho_в g\frac{m}{\rho}$, откуда плотность тела равна $\rho = \frac{\rho_в P_о}{P_о - P_в} = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м³.

12.35. Для определения плотности неизвестной жидкости однородное тело подвесили на динамометре в этой жидкости, а затем в вакууме и в воде. Оказалось, что тело, находясь в жидкости, растягивает пружину динамометра с силой $P_ж = 1{,}66$ Н, в вакууме — с силой $P = 1{,}8$ Н, в воде — с силой $P_в = 1{,}6$ Н. Найти плотности жидкости и тела $\rho_ж$ и ρ.

Ответ: $\rho_ж = 0{,}7 \cdot 10^3$ кг/м³; $\rho = 9 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение. В вакууме $P = mg$, в воде $P_в = mg - F_{A1}$,

$F_{A_1} = \rho_в gV$; $P = \rho gV$; $V = \frac{P}{\rho g}$; $P_в = P - \rho_в g\frac{P}{\rho g}$, откуда плотность тела $\rho = \frac{\rho_в P}{P - P_в} = 9 \cdot 10^3$ кг/м³.

В неизвестной жидкости $P_ж = mg - F_{A_2} = P - \rho_ж gV = P - \rho_ж g\frac{P}{\rho g}$.

Тогда плотность жидкости равна $\rho_ж = \frac{\rho_в(P - P_ж)}{P - P_в} = 0{,}7 \cdot 10^3$ кг/м³.

12.36. Кусок медного купороса весит в воздухе $P_в = 100$ мН, а в керосине $P_к = 70$ мН. Определить плотность медного купороса. Медный купорос в керосине не растворяется.

Ответ: $\rho = \rho_к P_в/(P_в - P_к) = 2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение самостоятельное. ***Указание***. См. задачу 12.35.

12.37. Медный шар с внутренней полостью весит в воздухе P_1 = = 270 Н, в воде P_2 = 225 Н. Определите объем внутренней полости шара.

Ответ: $V_п = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м³.

Решение. В воздухе $P_1 = mg = \rho_м g(V - V_п)$, откуда объем шара равен $V = \frac{P_1}{\rho_м g} + V_п$.

В воде $P_2 = mg - F_A = P_1 - \rho_в gV = P_1 - \rho_в g\left(\frac{P_1}{\rho_м g} + V_п\right)$, откуда объем полости $V_п = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g} - \frac{P_1}{\rho_м g} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м³.

12.38. Кусок металла, представляющий собой сплав меди и серебра, в воздухе весит P_1 = 245 мН, а при погружении в воду P_2 = = 220 мН. Сколько серебра и сколько меди в этом куске сплава?

Ответ: $m_с$ = 15 г и $m_м$ = 10 г.

Решение. В воздухе $P_1 = mg = (m_с + m_м)g = (\rho_с V_с + \rho_м V_м)g$. (1)

В воде $P_2 = mg - F_A = P_1 - \rho_в gV = P_1 - \rho_в g(V_с + V_м)$,

$V_с + V_м = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g}$; $V_с = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g} - V_м$. (2)

Подставим (2) в (1) и получим $V_м = \frac{\frac{\rho_с}{\rho_в}(P_1 - P_2) - P_1}{g(\rho_с - \rho_м)}$.

Масса меди $m_м = \rho_м V_м$ = 10 г.

Массу серебра найдем из (1): $m_с = \frac{P_1}{g} - m_м$ = 15 г.

12.39. Для определения плотности ацетона запаянный металлический цилиндр (высота h = 10 см и диаметр D = 7,0 см) был взвешен в воде и ацетоне. Разность в весе получилась ΔP = 0,75 Н. Какова плотность ацетона на основании данных опыта?

Ответ: $\rho_а = 0,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение. В воде $P_в = mg - F_{A_1} = mg - \rho_в gV$;

в ацетоне $P_а = mg - \rho_а gV$; $V = \frac{\pi D^2 h}{4}$; $\Delta P = P_а - P_в = \rho_в gV - \rho_а gV$;

откуда $\rho_а = \rho_в - \frac{4\Delta P}{\pi D^2 gh} = 0,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

12.40. Льдина равномерной толщины плавает, выступая над уровнем воды на высоту h = 2 см. Найти массу льдины, если площадь ее основания S = 200 см². Плотность льда $\rho_л = 0,9 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: m = 3,6 кг.

Решение. Условие равновесия $mg = F_A$, $\rho_л gSH = \rho_в gS(H - h)$, откуда толщина льдины равна $H = \frac{\rho_в h}{\rho_в - \rho_л}$. Тогда масса льдины

$m = \rho_л SH = \frac{\rho_в \rho_л Sh}{\rho_в - \rho_л}$ = 3,6 кг.

12.41. Кусок льда массой m = 3 кг плавает в цилиндрическом сосуде, наполненном жидкостью с плотностью $\rho_ж = 0,95 \cdot 10^3$ кг/м³. Площадь дна сосуда S = 50 см². На сколько изменится уровень жидкости, когда лед растает?

Ответ: Δh = –3,2 см; уровень понизится.

Решение. Лед плавает: $mg = \rho_ж gV_1$, откуда $V_1 = \frac{m}{\rho_ж}$ — объем части льда, находящейся в жидкости, m — масса льда.

$h_1 = \frac{V_1}{S} = \frac{m}{S\rho_ж}$ — изменение уровня жидкости в сосуде, когда лед плавает. Если лед растаял, то объем жидкости в сосуде увеличился на объем воды V_2, получившейся в результате таяния льда $V_2 = \frac{m}{\rho_в}$; тогда уровень жидкости стал $h_2 = \frac{m}{S\rho_в}$.

Изменение уровня жидкости, когда лед растаял:

$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho_в} - \frac{1}{\rho_ж}\right) = \frac{m(\rho_ж - \rho_в)}{S\rho_в\rho_ж}$ = –3,2 см, уровень жидкости понизился.

12.42. В цилиндрическом сосуде с водой плавает кусок льда, внутри которого вмерзла цинковая пластина. После полного таяния льда уровень воды в сосуде снизился на Δh = 3 см. Определите массу цинковой пластины. Внутренний диаметр сосуда d = 30 см.

Ответ: $m_ц$ = 2,5 кг.

Решение. Льдина массой $m_л$ с цинковой пластиной массой $m_ц$ плавает $(m_л + m_ц)g = \rho_в gSh_1$, откуда изменение уровня воды

$h_1 = \frac{m_л + m_ц}{\rho_в S}$, $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения сосуда.

Льдина растаяла, и пластина утонула, при этом уровень воды изменился на h_2: $h_2 = \frac{V_{ц}}{S} + \frac{m_{ц}}{\rho_в S}$.

Уровень воды снизился, т. е. $\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{m_л + m_ц}{\rho_в S} - \frac{V_ц}{S} - \frac{m_л}{\rho_в S}$,

откуда масса цинковой пластины $m_ц = \frac{\Delta h \pi d^2 \rho_в \rho_ц}{4(\rho_ц - \rho_в)} = 2,5$ кг.

12.43. Определите наименьшую площадь плоской льдины толщиной $h = 40$ см, способной удержать на воде человека массой $m = 75$ кг.

Ответ: $S = 1,88$ м².

Решение. Согласно закону Архимеда $(m_л + m)g = \rho_в g S h$;

$m_л = \rho_л S h$ — масса льдины, $\rho_л$ — плотность льда, тогда

$S = \frac{m}{h(\rho_в - \rho_л)} = 1,88$ м².

12.44. Бревно длиной $L = 3,5$ м и диаметром $d = 0,3$ м плавает в воде. Какой массы M человек может стоять на бревне не замочив ноги? Плотность дерева $\rho = 0,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: $M = \pi d^2 L(\rho_в - \rho)/4 \approx 74$ кг.

Решение самостоятельное. ***Указание.*** См. задачу 12.43.

12.45. Полый шар, отлитый из свинца, плавает в воде, погрузившись ровно наполовину. Найдите объем $V_п$ внутренней полости шара, если масса шара $m = 5,0$ кг.

Ответ: $V_п = 9,6 \cdot 10^{-3}$ м³.

Решение. По закону Архимеда $mg = F_А$; (1)

$F_А = \frac{1}{2}\rho_в g V_ш$, $mg = \frac{1}{2}\rho_в g V_ш$, (2)

$mg = \rho_{св} g (V_ш - V_п)$. (3)

Из (2) $V_ш = \frac{2m}{\rho_в}$, тогда с учетом (2) и (3) из (1) получим

$$\rho_{св} g\left(\frac{2m}{\rho_в} - V_п\right) = \frac{1}{2}\rho_в \frac{2m}{\rho_в}; \quad V_п = m\left(\frac{2}{\rho_в} - \frac{1}{\rho_{св}}\right) = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

12.46. Полый свинцовый шар плавает в ртути так, что 1/3 его объема находится в ртути. Чему равен объем воздушной полости внутри шара, если его радиус $R = 3$ см?

Ответ: $V = 4\pi R^3(\rho_{св} - \rho_{рт}/3)/3\rho_{св} \approx 67,7$ см³.

Решение самостоятельное. ***Указание.*** См. задачу 12.45.

12.47. Полый шар (внешний радиус R_1, внутренний R_2), сделанный из материала с плотностью ρ_1, плавает на поверхности жидкости с плотностью ρ_2. Какова должна быть плотность ρ вещества, которым следует заполнить внутреннюю полость шара, чтобы он находился в безразличном равновесии внутри жидкости?

Ответ: $\rho = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_2)(R_1/R_2)^3$.

Решение. Согласно закону Архимеда, если шар находится полностью в жидкости, тогда $mg = F_А$, следовательно,

$$\rho_1 g\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3 - \frac{4}{3}\pi R_2^3\right) + \rho g \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \rho_2 g \frac{4}{3}\pi R_1^3;$$

$$\rho_1(R_1^3 - R_2^3) + \rho R_2^3 = \rho_2 R_1^3; \text{ откуда } \rho = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_2)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3.$$

12.48. Каким должен быть минимальный объем баллона, наполненного водородом, чтобы он мог поднять человека массой $m_1 = 70$ кг на высоту $h = 100$ м за $t = 30$ с. Масса корзины $m_2 = 20$ кг.

Ответ: $V = 77$ м³.

Решение. Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения тела $F_A - (m_1 + m_2 + m)g = (m_1 + m_2 + m)a$, где $m = \rho_Н V$ — масса водорода, V — объем баллона, $a = \frac{2h}{t^2}$ — ускорение баллона с грузом, $F_А = \rho g V$ — сила Архимеда, ρ — плотность воздуха.

$\rho g V - (m_1 + m_2)g - \rho_Н g V = (m_1 + m_2 + \rho_Н V)\frac{2h}{t^2}$, откуда минимальный объем баллона $V \ge \frac{(m_1 + m_2)(gt^2 + 2h)}{(\rho - \rho_Н)gt^2 - 2\rho_Н h} = 77$ м³.

12.49. К концу однородной палочки, масса которой $M = 4,4$ г, подвешен на нити алюминиевый шарик радиусом $R = 0,5$ см (палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь такого положения равновесия, при котором погруженной в воду оказывается половина шарика). Определите, в каком отношении делится длина палочки точкой опоры. (рис. 12.12)

Ответ: $y/x = 1,52$.

Решение. Для шарика $F_А + T - mg = 0$ (рис. 12.12). $T = mg - F_А$;

$$F_А = \frac{1}{2}\rho_в g V; \ m = \rho_а \frac{4}{3}\pi R^3; \quad T = \rho_а g \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{2}\rho_в g \frac{4}{3}\pi R^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 g(2\rho_а - \rho_в).$$

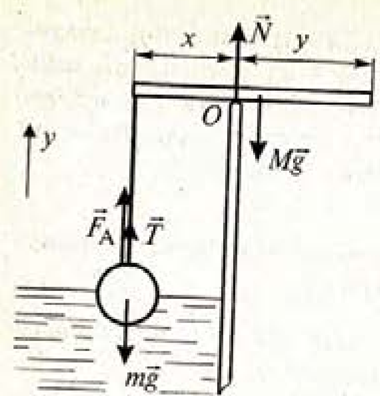


Рис. 12.12

Условие равновесия для палочки — уравнение моментов относительно точки O:

$$Tx = Mg\left(\frac{x+y}{2} - x\right),$$

откуда $\frac{y}{x} = \frac{2T + Mg}{Mg}$;

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{4\pi R^3(2\rho_ш - \rho_в)}{3M}; \quad \frac{y}{x} = 1{,}52.$$

12.50. Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец. Нижняя часть палочки погружена в воду, причем равновесие достигается тогда, когда палочка расположена наклонно к поверхности воды и в воде находится половина палочки. Какова плотность материала, из которого сделана палочка?

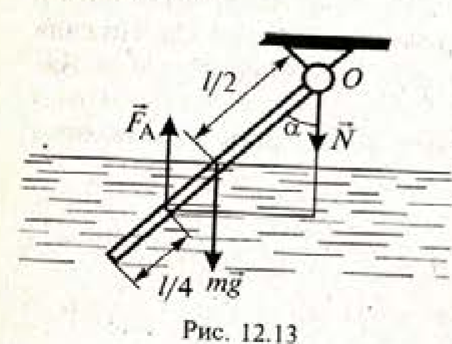


Рис. 12.13

Ответ: $\rho = 0{,}75 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение. Условие равновесия палочки — уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку O,

$$F_A \frac{3}{4} l \sin\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0$$

(рис. 12.13),

$$F_A = \rho_в g l S, \quad m = \rho l S,$$

где l и S соответственно длина и площадь поперечного сечения палочки, ρ — плотность материала, из которого сделана палочка.

Тогда $\rho_в g \frac{l}{2} S \cdot \frac{3}{4} l \sin\alpha - \rho l S g \frac{l}{2} \sin\alpha = 0$;

$\rho = \frac{3}{4}\rho_в = 0{,}75 \cdot 10^3$ кг/м³ (дерево).

12.51. Тонкая деревянная палочка длиной $L = 20$ см закреплена шарнирно на одном конце и опущена свободным концом в масло. Какая часть длины палочки l будет находится в масле при равновесии?

Ответ: $l = L\left(1 - \sqrt{1 - \rho/\rho_м}\right) = 12$ см.

Решение самостоятельное. ***Указание***. См. задачу 12.50.

12.52. На дне водоема установлена конструкция грибовидной формы, размеры которой указаны на рис. 12.14. Глубина водоема H. С какой силой давит конструкция на дно водоема? Плотность воды $\rho_в$, материала конструкции $2\rho_в$.

Ответ: $F = \rho_в g S(H + 5h)$.

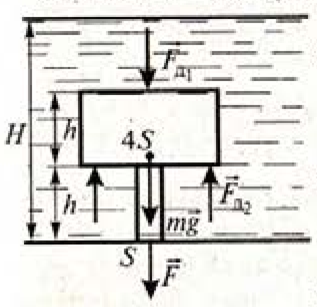


Рис. 12.14

Решение. Сила давления конструкции на дно сосуда равна (рис. 12.14)

$$|\vec{N}| = |\vec{F}| = F_{д_1} + mg - F_{д_2}, \qquad (1)$$

где $F_{д_1} = \rho_в g(H - 2h)4S$ — сила давления на верхнюю плоскость;

$$mg = \rho g(4Sh + Sh) = 2\rho_в \cdot 5Sh;$$

$F_{д_2} = \rho_в g(H - h)(4S - S)$ — сила давления на нижнюю плоскость конструкции.

Подставив приведенные выражения в (1), получим $F = \rho_в g S(H + 5h)$.

12.53. Кубик со стороной $a = 5{,}0$ см плавает между керосином и водой, находясь ниже уровня керосина на $h_1 = 2{,}5$ см. Нижняя поверхность кубика на $h_2 = 1{,}0$ см ниже поверхности раздела. Какова плотность кубика? Определить силы давления на верхнюю и нижнюю грани кубика. Изменится ли глубина погружения кубика в воду при доливании керосина?

Ответ: $\rho = 0{,}84 \cdot 10^3$ кг/м³; $F_{верхн} = F_{д_1} = 0{,}49$ Н; $F_{нижн} = F_{д_2} = 1{,}5$ Н, не изменится.

Рис. 12.15

Решение. Сила давления на верхнюю грань кубика (рис. 12.15)

$$F_{д_1} = \rho_к g h_1 a^2 = 0{,}49 \text{ Н},$$

$\rho_к$ — плотность керосина.

Сила давления на нижнюю грань кубика

$$F_{д_2} = \left(\rho_к(h_1 + a - h_2) + \rho_в h_2\right) g a^2 = 1{,}5 \text{ Н}.$$

Условие равновесия кубика

$$F_{д_1} + mg - F_{д_2} = 0.$$

$$\rho_к g h_1 a^2 + \rho g a^3 - \left(\rho_к(h_1 + a - h_2) + \rho_в h_2\right) g a^2 = 0,$$

откуда плотность материала кубика

$$\rho = \rho_к + (\rho_в - \rho_к) h_2 / a = 0{,}84 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

При доливании керосина глубина погружения кубика в воду не изменится, т. к. сила давления на верхнюю и нижнюю грани кубика увеличится на одну и ту же величину.

12.54. Стальной кубик плавает в ртути. Поверх ртути наливается вода так, что она покрывает кубик. Какова высота h слоя воды? Длина ребра кубика $a = 10$ см. Определите давление на нижнюю грань кубика.

Ответ: $h = 4{,}6$ см, $p = 7{,}64$ кПа.

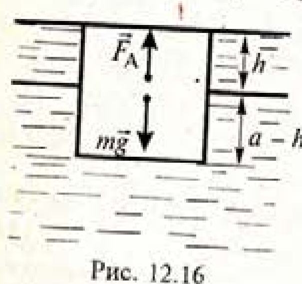


Рис. 12.16

Решение. Условие равновесия кубика (рис. 12.16) $mg - F_A = 0$;

$$F_A = \rho_в gha^2 + \rho_{рт} g(a-h)a^2; \quad m = \rho_{ст} a^3;$$

$$\rho_{ст} ga^3 - \rho_в gha^2 - \rho_{рт} g(a-h)a^2 = 0,$$

откуда $h = \dfrac{\rho_{рт} - \rho_{ст}}{\rho_{рт} - \rho_в} a = 4{,}6$ см (1)

Давление на нижнюю грань кубика равно

$$p = \rho_в gh + \rho_{рт} g(a-h). \quad (2)$$

Подставив значение h, найденное из (1) в (2), получим

$p = \rho_{ст} ga = 7{,}64$ кПа.

12.55. Льдина площадью поперечного сечения $S = 0{,}50$ м^2 и высотой $H = 40$ см плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

Ответ: $A = 3{,}92$ Дж.

Решение. Если льдина плавает, то $mg = F_A$ (рис. 12.17).

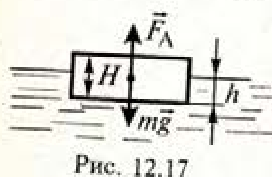


Рис. 12.17

$\rho_л gSH = \rho_в gSh$, $h = \dfrac{\rho_л}{\rho_в} H$ — высота части льдины, погруженной в воду.

При дальнейшем погружении льдины сила Архимеда увеличивается, т. к. изменяется объем льдины, погруженной в жидкость. Работа выполняется по преодолению силы, равной разности выталкивающей силы и веса льдины. Эта сила изменяется от нуля до $F = \rho_в gS(H-h)$ равномерно. Поэтому для вычисления работы используем среднее значение силы

$F_{ср} = \dfrac{1}{2} F = \dfrac{1}{2} \rho_в gS(H-h)$. Тогда

$$A = \frac{1}{2} F(H-h) = \frac{1}{2} \rho_в gS(H-h)^2 = \frac{1}{2} gSH^2 \frac{(\rho_в - \rho_л)^2}{\rho_в} = 3{,}92 \text{ Дж}.$$

12.56. Как изменится потенциальная энергия погруженного в жидкость тела, если его поднять в жидкости на высоту h. Плотность жидкости ρ_1, плотность тела ρ_2, объем тела V.

Ответ: $\Delta W_п = (\rho_2 - \rho_1) gVh$.

Решение. Нулевой уровень потенциальной энергии — дно сосуда (рис. 12.18). Работа по поднятию тела с уровня h_1 на уровень h_2, т. е. на высоту $h = h_2 - h_1$ равна изменению полной механической энергии тела. $A = \Delta W_k + \Delta W_п$.

Рис. 12.18

Если тело поднимается равномерно, то $\Delta W_k = 0$ и $A = \Delta W_п$.

При равномерном движении

$F + F_A - mg = 0$, (рис. 12.18),

откуда $F = mg - F_A$;

$A = F \cdot h = (mg - F_A)h$.

Учтем, что $m = \rho_2 gV$, $F_a = \rho_1 gV$, тогда

$$A = \Delta W_п = (\rho_2 - \rho_1) gVh. \quad (1)$$

При $\rho_2 > \rho_1$, $\Delta W_п > 0$ — потенциальная энергия увеличивается, при $\rho_2 < \rho_1$, $\Delta W_п < 0$ — потенциальная энергия уменьшается.

Из (1) следует, что потенциальная энергия на некоторой высоте H (от нулевого уровня энергии) равна $W_п = (mg - F_A)H$.

12.57. Стеклянный шарик массой $m = 100$ г, находящийся у поверхности глицерина, погружается на глубину $H = 1$ м. Найдите изменение потенциальной энергии шарика $\Delta W_п$. Плотность глицерина $\rho_1 = 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3, стекла $\rho_2 = 2{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $\Delta W_п = mgH(\rho_1/\rho_2 - 1) = -0{,}49$ Дж.

Решение самостоятельное.

12.58. Невесомый цилиндр диаметром D и высотой h погружают вертикально сначала в воду, а потом в ртуть до тех пор, пока верхнее основание цилиндра и поверхность жидкости не окажутся на одном уровне. Определите разность работ при этих погружениях.

Ответ: $\Delta A = (\rho_{рт} - \rho_в)\pi D^2 h^2 / 8$.

Решение. Выталкивающая сила, действующая на цилиндр при погружении в жидкость, $F = \rho g \dfrac{\pi D^2}{4} H$, где ρ — плотность жидкости, H — глубина погружения, т. е. $F \sim H$. Тогда средняя сила, действующая на цилиндр, $F = \dfrac{F_{max}}{2} = \rho g \dfrac{\pi D^2 h}{8}$.

Работа, затраченная на преодоление этой силы,

$$A = Fh = \rho g \frac{\pi D^2 h^2}{8}.$$

Разность работ $\Delta A = A_2 - A_1 = (\rho_{рт} - \rho_в) g \dfrac{\pi D^2}{8} h^2$.

12.59. Тело, имеющее массу $m = 2{,}0$ кг и объем $V = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ м³, находится в озере на глубине $h = 5{,}0$ м. Какая работа должна быть совершена при его подъеме на высоту $H = 5{,}0$ м над поверхностью воды? Равна ли эта работа изменению потенциальной энергии тела? Объясните результат.

Ответ: $A = 147$ Дж.

Решение. Смотри задачу 12.58

$A = (mg - F_A)h + mgH;$

$A = mg(H + h) - \rho_в gVh = 147$ Дж.

12.60. Сосуд с жидкостью движется горизонтально с ускорением a. Как расположена при этом свободная поверхность жидкости?

Ответ: Угол к горизонту $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g)$.

Решение. Движущийся с ускорением сосуд с водой удобно рассматривать как неинерциальную систему. В этом случае на любую частицу воды Δm кроме силы тяжести $\Delta m\vec{g}$ действует еще и сила инерции, равная взятому с обратным знаком произведению массы частицы на ускорение: $-\Delta m\vec{a}$ (рис. 12.19). Поверхность воды является плоскостью, перпендикулярной равнодействующей этих двух сил. Угол наклона поверхности к горизонтали определяем из соотношения $\operatorname{tg}\alpha = a/g$.

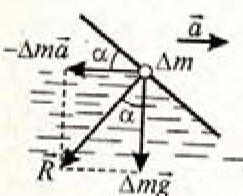


Рис. 12.19

12.61. Сосуд с жидкостью, плотность которой ρ, падает с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз. Определите давление жидкости на глубине h и силу, с которой жидкость давит на дно сосуда. Высота уровня жидкости в сосуде H, площадь дна сосуда S.

Ответ: $p = \rho(g - a)h$; $F = \rho(g - a)HS$.

Решение. В неподвижном сосуде зависимость давления от глубины $p = \rho gh$.

Ускоренно движущийся сосуд можно рассматривать как неинерциальную систему, движущуюся с ускорением $\vec{a}$. В такой системе вместо g следует брать $g - a$, поэтому $p = \rho(g - a)h$.

Если $a = g$, то $p = 0$.

Сила давления на дно равна $F = pS = \rho(g - a)HS$.

12.62. В дне цилиндрического сосуда диаметром D имеется малое круглое отверстие диаметром d. Найти зависимость скорости υ_1 понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня.

Ответ: $\upsilon_1 = \dfrac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}$.

Решение. Уравнение Бернулли для сосуда и отверстия

$$\frac{\rho_в \upsilon_1^2}{2} + \rho_в gh = \frac{\rho_в \upsilon_2^2}{2}; \quad \upsilon_1^2 + 2gh = \upsilon_2^2, \qquad (1)$$

где υ_2 — скорость вытекания воды из отверстия.

Условие неразрывности потока $S\upsilon_1 = S_2\upsilon_2$, $\upsilon_2 = \dfrac{S_1\upsilon_1}{S_2}$, (2)

где $S_1 = \dfrac{\pi D^2}{4}$ — площадь сечения сосуда, (3)

$S_2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$ — площадь отверстия. (4)

Подставив (2) в (1) и с учетом (3) и (4), получим

$$\upsilon_1 = \frac{S_2\sqrt{2gh}}{S_1^2 - S_2^2} = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}.$$

Учитывая, что $d^4 << D^4$, имеем $\upsilon_1 = \dfrac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}$.

12.63. Если в трюме судна имеется небольшая пробоина, то один человек не в состоянии преодолеть силу давления струи, чтобы закрыть пробоину доской. Однако, когда с помощью другого человека доска наложена, человек один может ее удержать. Почему?

Решение. Импульс силы давления струи, врывающейся в отверстие, $F\Delta t = \Delta m\upsilon$, где $\Delta m = \rho S\upsilon\Delta t$ — масса воды, втекающая в отверстие за время Δt. Тогда сила давления струи, бьющей из отверстия, $F = \rho S\upsilon^2$, где S — площадь сечения отверстия.

Учтем, что $\upsilon = \sqrt{2gh}$, откуда $F = 2\rho ghS$, где h — высота столба воды над отверстием.

Если отверстие закрыто доской, то на доску действует статическая сила $F_{ст} = \rho ghS = \dfrac{F}{2}$.

12.64. На гладкой горизонтальной поверхности стоит широкий сосуд с жидкостью. Уровень жидкости в сосуде h, масса сосуда с водой m. В боковой стенке у дна сосуда имеется отверстие с площадью S, заткнутое пробкой. При каком значении коэффициента трения между дном сосуда и подставкой сосуд начнет двигаться, если вынуть пробку?

Ответ: $\mu < 2\rho hS/m$.

Решение. См. задачу 12.63. Сила давления струи $F = 2\rho ghS$. Такая же сила действует со стороны струи на стенку сосуда, проти-

воположную отверстию. Движение сосуда начнется, если $\mu mg < 2\rho ghS$, т. е. $\mu < 2\rho hS/m$.

12.65. Небольшое легкое тело свободно падает с некоторой высоты на поверхность жидкости с известной плотностью ρ_0. Найти плотность ρ тела, если максимальная глубина его погружения в жидкость вдвое меньше высоты падения. Сопротивлением воздуха и жидкости пренебречь.

Ответ: $\rho = \rho_0/3$.

Решение. Энергия падающего тела в момент соприкосновения с поверхностью жидкости равна mgH. Она затрачивается на работу погружения тела на глубину $h = H/2$.

Подъемная сила $F = \rho_0 Vg - \rho Vg = (\rho_0 - \rho)Vg$,

$$mgH = Fh;\ \rho VgH = (\rho_0 - \rho)Vg\frac{H}{2},\ \text{откуда}\ \rho = \frac{\rho_0}{3}.$$

12.66. Скорость течения воды в широкой части трубы $\upsilon_1 = 10$ см/с. Какова скорость ее течения в узкой части, диаметр которой в 4 раза меньше диаметра широкой части?

Ответ: $\upsilon_2 = 1{,}6$ м/с.

Решение. Из уравнения неразрывности потока жидкости

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2,\ \upsilon_2 = \frac{S_1}{S_2}\upsilon_1,\ S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4};\ S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4};\ \upsilon_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2}\upsilon_1 = 16\upsilon_1 = 1{,}6\ \text{м/с}.$$

12.67. Если подключить шланг к выходному отверстию пылесоса и поместить в поток мячик от настольного тенниса (рис. 12.20), то мячик будет «парить» в потоке и во время движения шланга будет следовать за ним. Поясните это явление.

Рис. 12.20

Решение. Скорость потока воздуха в центре больше, чем по краю, в результате чего давление воздуха в центре потока меньше, чем с краю.

Когда шарик отклоняется от средней части потока, на него действует возвращающая сила за счет разности давлений, направленная в центр потока воздуха, что заставляет шарик следовать за струей.

12.68. Почему во время выпуска воды из ванной над сливным отверстием образуется водоворот, а иногда и воздушный канал?

Решение. Скорость движения воды в сточной трубе очень велика, а наибольшая она по центру трубы, благодаря чему давление в центре трубы уменьшается и может стать даже меньше, чем атмосферное.

12.69. На рис. 12.21а изображен план части футбольного поля. В каком направлении нужно заставить вращаться мяч во время углового удара из точки A, чтобы, он мог попасть в ворота?

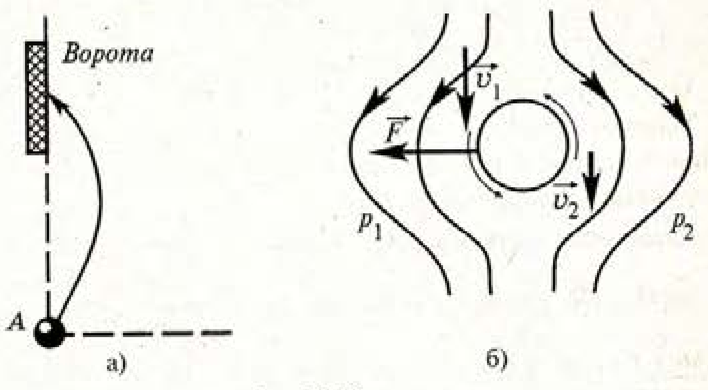


Рис. 12.21

Решение. Если мяч закрутить против часовой стрелки, то слева (рис. 12.21б) направление встречного потока воздуха совпадает с направлением потока воздуха, возникшего благодаря вращению мяча, скорость потока воздуха увеличится по сравнению со скоростью потока справа, где направление встречного потока и создаваемого за счет вращения мяча противоположны ($\upsilon_1 > \upsilon_2$).

Тогда давление слева станет меньше, чем справа $p_1 < p_2$ и появится сила, которая заставит мяч попасть в ворота. Этот эффект имеет название эффекта Магнуса.

ГИДРОМЕХАНИКА

Уровень II

1. В сосуд, имеющий форму прямого кругового усеченного конуса с радиусом дна $R = 10$ см, налита вода так, что ее уровень находится на высоте $h = 10$ см от дна. Определите силу F давления воды на боковую поверхность сосуда, если образующая конуса составляет угол $\alpha = 45°$ с его высотой.

Ответ: $F = 21{,}8$ Н.

Решение. Давление жидкости изменяется с глубиной по линейному закону, его среднее значение $p_{ср} = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}\rho gh$ (рис. 1).

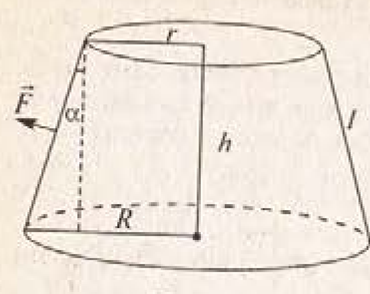


Рис. 1

Сила давления воды на боковую стенку сосуда $F = p_{ср}S_{бок}$; площадь боковой поверхности усеченного конуса равна $S_{бок} = \pi(R+r)l$; $l = \frac{h}{\cos\alpha}$;

$r = R - h\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

$S_{бок} = \pi(2R - h\,\mathrm{tg}\,\alpha)\frac{h}{\cos\alpha}$;

$F = \frac{\rho g h^2 \pi}{2\cos\alpha}(2R - h\,\mathrm{tg}\,\alpha) = 21{,}8$ Н.

2. ____ В дно бака, наполненного водой, впаяна труба диаметром d, прикрытая сверху цилиндрической пластинкой диаметром D и толщиной l (рис. 2). Какова должна быть минимальная плотность материала пластинки ρ, чтобы она не всплывала, если известно, что уровень воды в баке отстоит от верхнего основания пластинки на расстояние H. Давление воздуха в трубе равно атмосферному.

Ответ: $\rho = \frac{lD^2 - (H+l)d^2}{lD^2}\rho_в$.

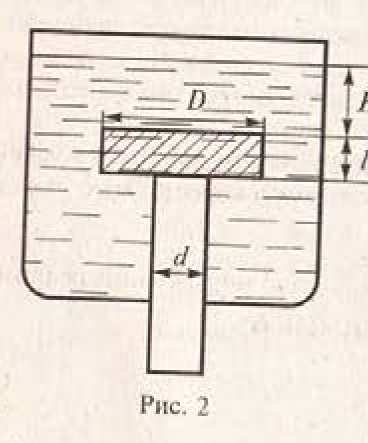


Рис. 2

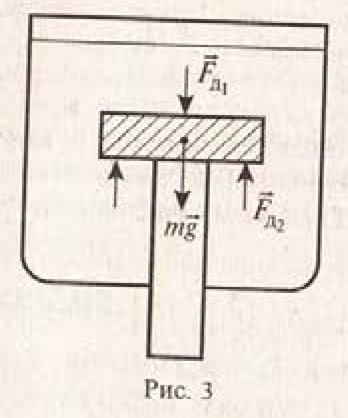


Рис. 3

Решение. Условие равновесия пластинки (рис. 3)

$mg + F_{д_1} - F_{д_2} = 0$, где $m = \rho V = \rho\frac{\pi D^2}{4}l$ — масса пластинки;

$F_{д_1} = \rho_в g H\frac{\pi D^2}{4}$ — сила давления на верхнюю поверхность пластинки; $F_{д_2} = \rho_в g(H+l)\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$ — сила давления на нижнюю поверхность пластинки.

Тогда $\rho g\frac{\pi D^2}{4}l + \rho_в g H\frac{\pi D^2}{4} - \rho_в g(H+l)\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 0$, откуда

$\rho = \frac{lD^2 - (H+l)d^2}{lD^2}\rho_в$.

3. ____ Какой силы тяжести камень надо положить на плоскую льдину, толщина которой $h = 0{,}2$ м, чтобы она вместе с камнем полностью погрузилась в воду? Площадь основания льдины $S = 1$ м², плотность камня $\rho_к = 2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м³. С какой силой камень давит на льдину?

Ответ: $m_к g = 0{,}36$ кН, $F_д = 0{,}2$ кН.

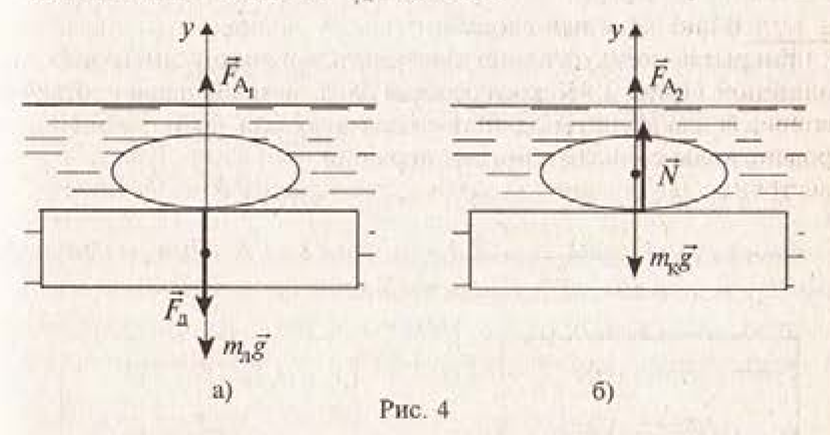


Рис. 4

Решение. В погруженном состоянии система находится в равновесии. Уравнения статики запишем для каждого тела.

Для льдины (рис. 4 а) $m_л\vec{g} + \vec{F}_{A_1} + \vec{F}_д = 0$.

$\vec{F}_д$ — сила давления камня, равная силе нормальной реакции опоры $\vec{N}$: $|\vec{F}_д| = |\vec{N}|$ — по третьему закону Ньютона:

(y): $F_{A_1} - m_л g - F_д = 0$; (1)

$F_{A_1} = \rho_в g h S$; $m_л = \rho_л h S$.

Из (1) $F_д = (\rho_в - \rho_л)ghS = 0{,}2$ кН.

Для камня (y): $F_{A_2} + N - m_к g = 0$

$F_{A_2} = \rho_в g V_к$; $m_к = \rho_к V_к$; $V_к = \frac{m_к}{\rho_к}$; $N = F_д$;

$\rho_в g\frac{m_к}{\rho_к} + (\rho_в - \rho_л)ghS - m_к g = 0$, откуда

$m_к g = \frac{(\rho_в - \rho_л)\rho_к ghS}{\rho_к - \rho_в} = 0{,}36$ кН.

4. ______ С вышки, расположенной на высоте h = 1,5 м над водой, падает вертикально тонкий алюминиевый стержень длиной l = 50 см. Какова скорость стержня в момент удара о дно водоема, если глубина водоема у вышки H = 3 м? Сопротивлением воздуха и воды движению стержня пренебречь.

Ответ: υ = 8,4 м/с.

Решение. Изменение кинетической энергии стержня равно работе всех сил, действующих на тело $\Delta W_к = A$. (1)

До момента достижения стержнем воды на него действует только сила тяжести $mg = \rho_а mglS$, где $\rho_а$ — плотность алюминия, S — площадь поперечного сечения стержня. Работа на этом участке пути равна $A_1 = mgh = \rho_а glSh$.

Когда стержень начинает погружаться в воду, на него действуют сила тяжести и выталкивающая сила, изменяющаяся линейно от 0 до $F_А = \rho_в glS$. Равнодействующая этих сил также меняется по линейному закону. Ее среднее значение

$$F_{ср} = (\rho_а glS + \rho_а glS - \rho_в glS)/2 = (\rho_а - \rho_в/2)glS.$$

Работа этой силы $A_2 = F_{ср}l = (\rho_а - \rho_в/2)gl^2S$. При дальнейшем движении стержня сила F не изменяется:

$$F = \rho_а glS - \rho_в glS = (\rho_а - \rho_в)glS.$$

Работа этой силы $A_3 = F(H-l) = (\rho_а - \rho_в)gl(H-l)S$.

Из (1) $\dfrac{m\upsilon^2}{2} = A_1 + A_2 + A_3$;

$$\frac{\rho_а lS\upsilon^2}{2} = \rho_а glSh + \left(\rho_а - \frac{\rho_в}{2}\right)gl^2S + (\rho_а - \rho_в)gl(H-l)S, \text{ откуда}$$

$$\upsilon = \sqrt{2g\left[h + H - \rho_в(H - 0,5l)/\rho_а\right]} = 8,4 \text{ м/с}.$$

5. ______ Медный цилиндр диаметром d = 3 см и высотой h = 20 см опущен в воду на тонкой цепочке длиной l = 1 м и массой m_1 = 100 г. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вынуть цилиндр из воды за цепочку?

Ответ: A = 14,4 Дж.

Решение. Чтобы работа была минимальна, скорость, с которой вытаскивают цилиндр, должна быть постоянна.

$A = A_1 + A_2$. $A_1 = m_1 g(l+h)$ — работа по вытаскиванию цепочки (при этом груз вытащен из воды). Выталкивающей силой воды, действующей на цепочку, пренебрегаем.

Работа A_2 по подъему цилиндра равна работе по преодолению силы тяжести на расстоянии $h + l$, минус работа постоянной выталкивающей силы на пути l (верхнее основание цилиндра доходит до поверхности воды) и работа переменной выталкивающей силы на перемещении, равном высоте цилиндра (здесь выталкивающая сила меняется линейно, берем ее среднее значение $F_{А_{ср}} = \dfrac{F_А}{2}$).

$$A_2 = m_2 g(l+h) - F_А l - F_А \frac{h}{2}, \text{ где } m_2 = \rho\frac{\pi d^2}{4}h; \ F_А = \rho_в g\frac{\pi d^2}{4}h.$$

Теперь $A = m_1 g(l+h) + \rho\dfrac{\pi d^2}{4}g(l+h)h - \rho_в g\dfrac{\pi d^2}{4}h\left(l + \dfrac{h}{2}\right) =$

$$= m_1 g(l+h) + \frac{\pi d^2}{4}gh\left[l(\rho - \rho_в) + h(\rho - 0,5\rho_в)\right] = 14,4 \text{ Дж}.$$

6. ______ Какую мощность потребляет мотор насоса, если при откачке воды из колодца глубиной H = 10 м через шланг сечения $S = 10^{-2}$ м² поступает Q = 10 кг/с воды?

Ответ: P = 1 кВт.

Решение. Пусть скорость течения воды υ. Полная энергия W жидкости в трубке тока между двумя фиксированными ее сечениями постоянна. Ее приращение происходит за счет работы, совершаемой силами давления в одном и другом поперечном сечениях при перемещении массы $m = Q\Delta t$ за интервал времени Δt. $\Delta W = A$;

$\Delta W = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + mgH$; $A = P\Delta t$, где P — мощность насоса.

$\dfrac{m\upsilon^2}{2} + mgH = P\Delta t$. Учтем, что $m = Q\Delta t = \rho_в S\upsilon\Delta t$,

тогда $P = \dfrac{Q^3}{2(\rho_в S)^2} + QgH = 1 \text{ кВт}$.

7. ______ Как объяснить хорошо известный факт, что чаинки в стакане чая, отошедшие при помешивании к стенке, собираются при прекращении помешивания к середине дна?

Решение. Когда чай в стакане при помешивании ложечкой начинает вращаться, в результате этого вращения давление на дно увеличивается от середины дна к стенкам. Когда ложечку вынули, будет происходить выравнивание давлений на дно, что приведет к образованию течений от стенок к середине дна, что и соберет там чаинки.

8. ______ Круглое отверстие в дне сосуда закрыто конической пробкой с сечением основания S (рис. 5). При какой наибольшей плот-

ности материала пробки можно, доливая воду, добиться всплытия пробки? Площадь отверстия S_0.

Ответ: $\rho = \rho_в\left[1 + 2\left(\frac{S_0}{S}\right)^{3/2} - 3\frac{S_0}{S}\right]$.

Решение. Условие всплывания пробки — равенство ее силы тяжести и максимальной выталкивающей силы. Выталкивающая сила максимальна, когда вода дойдет до верха пробки, при этом она равна весу воды в заштрихованном объеме пробки (рис. 5).

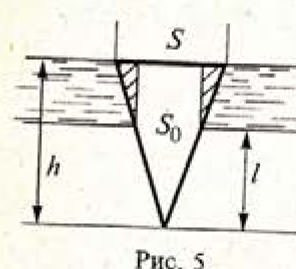


Рис. 5

Объем конуса равен $\frac{hS}{3}$. Тогда

$$\rho g\frac{hS}{3} = \rho_в g\left[\frac{hS}{3} - \frac{hS_0}{3} - (h-l)S_0\right];$$

$$\frac{hS}{3}(\rho_в - \rho)g - \frac{lS_0}{3}\rho_в g - (h-l)S_0\rho_в g = 0. \quad (1)$$

Обозначим выступающую часть пробки l. Из подобия геометрических тел $\frac{l^2}{h^2} = \frac{S_0}{S}$. (2)

С учетом (2) из (1) получим $\rho = \rho_в\left[1 + 2\left(\frac{S_0}{S}\right)^{3/2} - 3\frac{S_0}{S}\right]$.

9. Стальной кубик со стороной $a = 10$ см лежит на дне сосуда, наполненного жидкостью, плотность которой $\rho_0 = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м³. Высота уровня жидкости $h = 0{,}5$ м. Найдите силу, с которой кубик давит на дно сосуда без учета атмосферного давления.

Ответ: 1) $F_{д_1} = 123{,}5$ Н, 2) $F_{д_2} = 64{,}7$ Н.

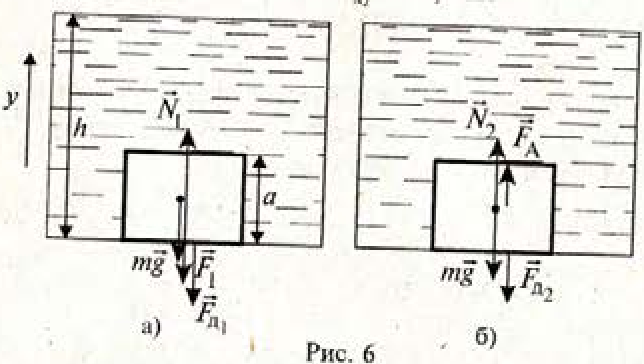


Рис. 6

Решение. Возможны две ситуации: 1) кубик плотно прилегает ко дну сосуда, так что жидкость под него не подтекает; 2) кубик неплотно прилегает ко дну, жидкость подтекает под него.

1) $F_A = 0$; $\vec{F}_1 + m\vec{g} + \vec{N}_1 = 0$ (рис. 6а)

Сила давления жидкости на кубик $F_1 = \rho_0 g(h-a)a^2$, $mg = \rho_{ст} g a^3$;

$N_1 = F_{д_1}$ — сила реакции дна равна силе давления на дно по третьему закону Ньютона.

(y): $F_{д_1} = N_1 = \rho_{ст} g a^3 + \rho_0 g(h-a)a^2 = 123{,}5$ Н.

2) Если жидкость подтекает под кубик, то на него действует еще сила Архимеда $F_A = \rho_0 g a^3$. $m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{N}_2 = 0$ (рис. 6б).

$F_{д_2} = N_2 = (\rho_{ст} - \rho_0) g a^3 = 64{,}7$ Н.

10. В одинаковых сообщающихся сосудах (рис. 7) находится вода. Кран K закрыли и воду в правом сосуде нагрели, вследствие чего ее уровень немного повысился. Станет ли вода переливаться из правого сосуда в левый, если открыть кран?

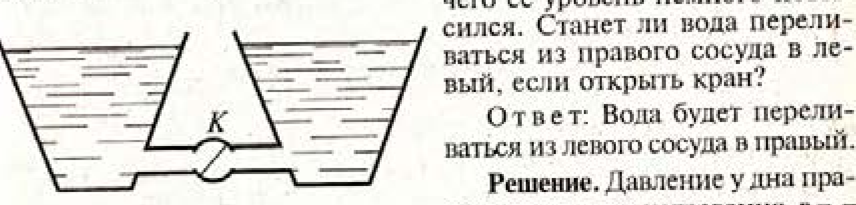


Рис. 7

Ответ: Вода будет переливаться из левого сосуда в правый.

Решение. Давление у дна правого сосуда до нагревания $p = \rho g h$, после нагревания $p' = \rho' g h'$, где ρ и h — плотность и высота холодной воды, ρ' и h' — горячей.

Тогда $\frac{p'}{p} = \frac{\rho'}{\rho}\cdot\frac{h'}{h}$. Масса воды неизменна $m = m'$; т. е. $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{V}{V'}$, где V и V' — объемы холодной и горячей воды, соответственно.

Тогда $\frac{p'}{p} = \frac{Vh'}{V'h}$; $V = \frac{1}{3}h\left(s + S + \sqrt{sS}\right)$; $V' = \frac{1}{3}h'\left(s + S' + \sqrt{sS'}\right)$, где s — площадь дна, а S и S' — площадь поверхности воды до нагревания и после. Следовательно, $\frac{p'}{p} = \frac{s + S + \sqrt{sS}}{s + S' + \sqrt{sS'}}$.

Так как $S < S'$, то $p' < p$, т. е. нагревание воды приводит к уменьшению давления, откуда следует, что вода будет переливаться из левого сосуда в правый.

11. В стенке сосуда с водой просверлены одно над другим два отверстия площадью $S = 0{,}2$ см² каждое. Расстояние между отверстиями $h_2 = 50$ см. Уровень воды в сосуде находится на высоте $h_1 = 30$ см над верхним отверстием. Найдите точку пересечения струй, вытекающих из отверстий в начальный момент.

Ответ: $H = 1{,}1$ м; $l = 1$ м.

Решение. В начальный момент пренебрегаем изменением уровня жидкости в сосуде. Скорость вытекания жидкости из первого отверстия (рис. 8) $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, из второго $v_2 = \sqrt{2g(h_1 + h_2)}$.

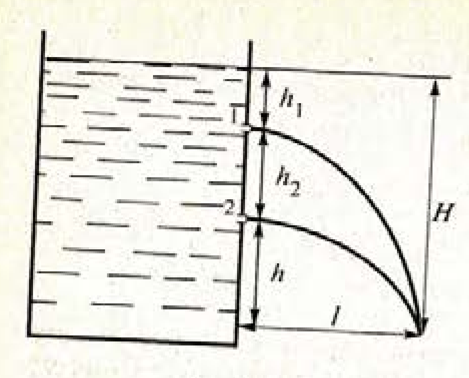


Рис. 8

Из законов кинематики

$$l = v_1 t_1 = v_2 t_2, \qquad (1)$$

где t_1 и t_2 время падения струй до точки их пересечения.

$$H = h_1 + h_2 + h;$$

$$h + h_2 = \frac{g t_1^2}{2}; \quad h = \frac{g t_2^2}{2};$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h+h_2)}{g}}; \quad t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Эти выражения подставим в (1)

$$v_1\sqrt{\frac{2(h+h_2)}{g}} = v_2\sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad \sqrt{2gh_1}\sqrt{\frac{2(h+h_2)}{g}} = \sqrt{2g(h_1+h_2)}\sqrt{\frac{2h}{g}};$$

Откуда $h = h_1 = 0{,}3$ м. Тогда $H = h_1 + h_2 + h = 1{,}1$ м.

$$l = v_1 t_1 = \sqrt{2gh_1}\sqrt{\frac{2(h+h_2)}{g}} = \sqrt{4h_1(h+h_2)} = 0{,}98 \text{ м} \approx 1 \text{ м}.$$

12. Площадь поршня в шприце $S_1 = 1{,}2$ см², а площадь отверстия $S_2 = 1$ мм². С какой скоростью и сколько времени будет вытекать из шприца жидкость, плотность которой равна ρ, если ход поршня $l = 4$ см и на него действуют с силой $F = 5$ Н? Шприц расположен горизонтально.

Ответ: $t \approx 0{,}52$ с.

Решение. Объем жидкости, вытекающей из шприца равен объему шприца $S_1 l = S_2 v_2 t$, где v_2 — скорость вытекания жидкости.

Тогда $t = \frac{S_1 l}{S_2 v_2}$. Скорость v_2 найдем из уравнения Бернулли

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Шприц горизонтален $h_1 = h_2$, $p_1 = \frac{F}{S_1} + p_{атм}$; $p_2 = p_{атм}$,

следовательно, из (1) $\frac{F}{S_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2}$. (2)

Из условия неразрывности потока жидкости $S_1 v_1 = S_2 v_2$ получим $v_1 = \frac{S_2 v_2}{S_1}$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$\frac{F}{S_1} + \frac{1}{2}\rho\frac{S_2^2}{S_1^2}v_2^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2$, отсюда $v_2 = \sqrt{\frac{2FS_1}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$, следовательно,

$$t = \frac{S_1 l}{S_2}\sqrt{\frac{\rho(S_1^2 - S_2^2)}{2FS_1}} = \frac{S_1 l}{S_2}\sqrt{\frac{\rho S_1}{2F}\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]}.$$

Так как $S_2 \ll S_1$, то слагаемым $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2$ можно пренебречь, в результате чего получим $t = \frac{S_1 l}{S_2}\sqrt{\frac{\rho S_1}{2F}} = 0{,}52$ с.

13. Модель водопровода. Из поднятого на некоторую высоту H резервуара выходит, магистальная труба постоянного сечения S_1, переходящая в короткую трубку сечением S_2, перекрытую краном. Найти давление в магистральной трубе при открытом кране.

Ответ: $p_1 = p_{атм} + \rho g H\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]$.

Решение. Пусть скорость воды в отверстии крана v_2, а в магистральной трубе v_1.

Пренебрегая изменением уровня воды в резервуаре, запишем уравнение Бернулли для трех точек: на поверхности воды в резервуаре, в трубе и в отверстии крана.

$$p_{атм} + \rho g H = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_{атм} + \frac{\rho v_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Добавим к этой системе уравнение непрерывности: $v_1 S_1 = v_2 S_2$.

Из системы трех уравнений находим: $p_1 = p_{атм} + \rho g H\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]$.

Из (1) видно, что манометр, помещенный в движущуюся воду, покажет давление на величину $\frac{\rho v_1^2}{2}$ меньшую, чем в неподвижной воде.

Рис. 9

14. Древнегреческие водяные часы (клепсидра) представляют собой сосуд с небольшим отверстием O (рис. 10). Время отсчитывается по уровню воды в сосуде. Какова должна быть форма сосуда, чтобы шкала времени была равномерной?

Ответ: $y = \frac{\pi^2 u^2}{2gS_1^2}x^4$.

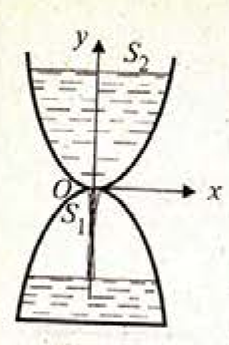


Рис. 10

Решение. Скорость истечения жидкости из верхнего сосуда $\upsilon = \sqrt{2gy}$, где y — толщина слоя воды в верхней части.

Из условия несжимаемости жидкости $S_1\upsilon = S_2u$, где S_1 — площадь отверстия, S_2 — площадь верхнего уровня воды, u — скорость его опускания. Сосуд имеет осевую симметрию, поэтому $S_2 = \pi x^2$, где x — горизонтальная координата стенки сосуда. Уровень воды должен опускаться с постоянной скоростью, поэтому

$$\frac{S_1}{u} = \frac{\pi x^2}{\sqrt{2gy}} = \text{const}.$$

Тогда форма сосуда определяется формулой

$y = bx^4$, где $b = \dfrac{\pi^2 u^2}{2gS_1^2}$.

МЕХАНИКА

Уровень III

1. ______ По окружности в противоположных направлениях движутся велосипедист и мотоциклист: первый — равномерно со скоростью υ_1, а второй — с ускорением a. В начальный момент они были оба в одной точке A и скорость мотоциклиста была $\upsilon_0 = 0$. Через какое время t_1 они встретятся впервые, если во второй раз они опять встретятся в точке A?

Ответ: $t_1 = \dfrac{\upsilon_1(\sqrt{5}-1)}{a}$.

Решение. До второй встречи велосипедист и мотоциклист прошли одинаковое расстояние и были в пути одинаковое время t. $\upsilon_1 t = \dfrac{at^2}{2}$; $t = \dfrac{2\upsilon_1}{a}$. До первой встречи они двигались одинаковое время t_1: $\upsilon_1 t_1 + \dfrac{at_1^2}{2} = \upsilon_1 t$; $\dfrac{at_1^2}{2} + \upsilon_1 t_1 - \dfrac{2\upsilon_1^2}{a} = 0$, откуда $t_1 = \dfrac{\upsilon_1(\sqrt{5}-1)}{a}$.

2. ______ На вогнутую сферическую поверхность радиусом R с высотой $H = R/8$ вблизи вертикальной оси симметрии падают с нулевой начальной скоростью маленькие шарики.

Считая удары шариков о поверхность абсолютно упругими, покажите, что после первого соударения каждый шарик попадает в низшую точку сферической поверхности. Считать, что шарики между собой не соударяются.

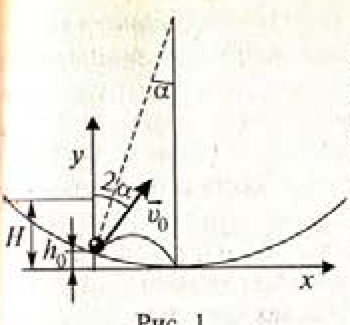


Рис. 1

Решение. Пусть шарик падает с высоты H (рис. 1). В момент удара скорость шарика $\upsilon_0 = \sqrt{2gH}$ (удар абсолютно упругий), угол между υ_0 и вертикалью равен 2a. Через время t шарик сместится по горизонтали на x, тогда $x = \upsilon_0 t \sin 2\alpha$.

Тогда $t = \dfrac{x}{\upsilon_0 \sin 2\alpha} = \dfrac{x}{\sqrt{2gH}\sin 2\alpha}$.

Высота, на которой будет находиться шарик спустя время t, равна $y = h_0 + \upsilon_0 t\cos 2\alpha - gt^2/2$.

Угол α мал, поэтому $h_0 \approx 0$; $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$; $\cos 2\alpha \approx 1$; $x \approx R\alpha$. С учетом всех соотношений найдем условие попадания шарика в низшую точку сферической поверхности.

При этом: $y = 0$, $t = \dfrac{x}{\sqrt{2gH}\sin 2\alpha} = \dfrac{R}{2\sqrt{2gH}}$;

$y = \upsilon_0 t - gt^2/2 = R/2 - R^2/16H = 0$, откуда $H = R/8$.

3. ______ На подвешенной нитке закреплено n свинцовых шариков так, что нижний шарик почти касается пола. Верхний конец нитки отпускают, и шарики один за другим падают на пол. Как должны относится расстояния между шариками и расстояния от шариков до пола, чтобы удары были слышны через одинаковые интервалы времени τ?

Решение. Высота n-го шарика над полом $h_n = \dfrac{1}{2}g(n\tau)^2$. Расстояние между двумя соседними шариками $h_n - h_{n-1} = \dfrac{1}{2}g\tau^2(n^2-(n-1)^2)$, тогда отношение расстояний между шариками $\dfrac{h_{n+1}-h_n}{h_n-h_{n-1}} = \dfrac{2n+1}{2n-1}$.

Отношение расстояний от шариков до пола $\dfrac{h_{n+1}}{h_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2}$, т. е. равно отношению квадратов целых чисел.

Рис. 2

4. ______ На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч. На обруче находится жук. Какие траектории будут описывать жук и центр обруча, если жук начнет двигаться по обручу. Масса обруча M, масса жука m, радиус обруча R.

Решение. На систему обруч—жук в горизонтальном направлении внешние силы не действуют. Поэтому центр тяжести системы (точка C на рис. 2) в горизонтальной плоскости перемещаться не будет. Расстояние от центра тяжести системы до центра обруча $CO = \dfrac{mR}{m+M}$. Так как оно постоянно, центр обруча O будет описывать относительно неподвижной точки C окружность радиусом CO'.

Траектория жука — окружность радиусом $AC = RM/(m + M)$.

5. Из начальной школы вы, вероятно, помните такую задачу: «К бассейну проведены две трубы. Первая может заполнить бассейн за 4 часа, вторая — опорожнить за 12 часов. Как быстро заполнится бассейн, если открыть обе трубы?». Решение в учебнике утверждает, что бассейн заполнится за 6 часов. Насколько это правильно с точки зрения физики?

Решение. Изменение уровня воды h в бассейне описывается уравнением: $\dfrac{dh}{dt} = a - b\sqrt{h}$, где a и b — постоянные, характеризующие натекание и вытекание воды.

Обозначим глубину бассейна H, а время его наполнения и опорожнения через $t_1 = 4$ ч и $t_2 = 12$ ч. Тогда $a = \dfrac{H}{t_1}$, а b можно определить из уравнения: $\dfrac{dh}{dt} = -b\sqrt{h}$. $\int\limits_H^0 \dfrac{dh}{\sqrt{h}} = -b\int\limits_0^{t_2} dt$, откуда $b = \dfrac{2\sqrt{H}}{t_2}$. Обозначим время наполнения бассейна, когда обе трубы открыты, t_3, тогда $\int\limits_0^H \dfrac{dh}{a - b\sqrt{h}} = \int\limits_0^{t_3} dt$, откуда

$$t_3 = \frac{2a}{b^2}\left(\ln\frac{a}{a - b\sqrt{H}} - \frac{b\sqrt{H}}{a}\right) = \frac{t_2^2}{2t_1}\left(\ln\frac{t_2}{t_2 - 2t_1} - \frac{2t_1}{t_2}\right) = 7{,}8 \text{ ч.}$$

Оказывается, что время t_3 не зависит от глубины бассейна H.

6. Для защиты самолета сзади было предложено установить в хвосте самолета реактивный снаряд. При испытании было обнаружено, что через некоторое время после пуска снаряда он разворачивался и догонял самолет. Как объясняется это явление?

Решение. Устойчивость ракеты обеспечивается хвостовыми стабилизаторами. При отклонении оси ракеты от направления вектора скорости, силы, действующие на стабилизаторы, создадут

возвращающий момент. Если ракету запустить хвостом вперед, то эти же моменты сил развернут ее. Это же явление наблюдалось при запуске ракеты с самолета. Скорость ракеты равна сумме скоростей: скорости движения самолета и скорости ракеты относительно самолета. Если скорость ракеты относительно самолета меньше скорости самолета, то результирующая скорость ракеты направлена в сторону полета самолета, при этом ракета, естественно, разворачивается и догоняет самолет.

Чтобы избежать этого явления, нужно увеличить ускорение ракеты или включать ее двигатель несколько раньше пуска, учитывая, что реактивная сила после пуска не сразу достигает максимальной величины.

7. В межзвездной среде с плотностью ρ вспыхнула новая звезда. Ее оболочка непрерывно расширяется. В момент вспышки масса оболочки равна M_0, а ее скорость v_0. Каков будет радиус оболочки R к тому моменту, когда ее скорость уменьшится в n раз?

Ответ: $R = (3M_0(n-1)/4\pi\rho)^{1/3}$.

Решение. Расширение оболочки происходит как за счет вещества, выброшенного из звезды, так и за счет межзвездного вещества, захватываемого оболочкой. Закон сохранения импульса для такой системы имеет вид $\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho + M_0\right)v = M_0 v_0$.

Учитывая, что $v = \dfrac{v_0}{n}$; $R = \left(\dfrac{(n-1)M_0}{\frac{4}{3}\pi\rho}\right)^{1/3} = (3M_0(n-1)/4\pi\rho)^{1/3}$.

8. Чем лучше замедляются нейтроны — блоком свинца или таким же по размерам блоком парафина (парафин состоит из водорода и углерода)?

Решение. Считаем взаимодействие нейтронов с неподвижными атомами защитного слоя абсолютно упругим центральным ударом. В этом случае законы сохранения импульса и энергии имеют вид:

$m_n v_n = m_n u_n + m_a u_a$; $m_n v_n^2 = m_n u_n^2 + m_a u_a^2$, где m_n и m_a — массы нейтрона и атома соответственно; v_n — скорость нейтрона до столкновения; u_n, u_a — скорости нейтрона и атома после удара. Получим скорость нейтрона после столкновения $u_n = v_n\dfrac{m_n - m_a}{m_n + m_a}$.

Если нейтрон сталкивается с атомом водорода, для которого $m_n = m_a$, нейтрон практически останавливается $u_n = 0$. Для свинца $m_a >> m_n$, тогда нейтрон продолжает движение и, столкнувшись

с ядрами еще несколько раз, может пройти через защитный сло[й]. Следовательно, парафин и другие соединения, содержащие водородные атомы, лучше замедляют нейтроны, чем свинец.

9. К тележке массой M, которая может кататься без трения, на длинной нити подвешен груз точно такой же массы M. Длина нити l. Тележку и груз отвезли в противоположные стороны и одновременно отпустили. Через некоторое время начали наблюдать за колебаниями системы. Считая эти колебания малыми, предскажите результат измерения периода колебаний (рис. 3).

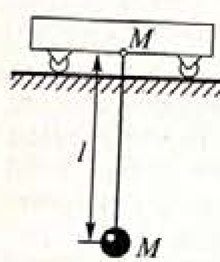


Рис. 3

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/2g}$.

Решение. Центр тяжести системы не должен перемещаться в горизонтальном направлении, т. к. в этом направлении никакие силы на систему в целом не действуют. Если максимальный угол отклонения маятника j$_0$, амплитуда вертикальных колебаний центра тяжести системы равна $\frac{l}{2}(1-\cos\varphi_0) = \frac{l}{2}\cdot\frac{\varphi_0^2}{2}$.

Так как колебания малы, то есть угол φ_0 мал, то в первом приближении центр тяжести можно считать неподвижным. Если закрепить нить в центре тяжести системы, то есть в середине нити, то теперь нижняя часть системы превратилась в математический маятник с длиной $l/2$ и периодом колебаний $T = 2\pi\sqrt{l/2g}$, который является и периодом колебаний всей системы.

10. Однородный стержень длиной $2a$ и весом P опирается одним концом на вертикальную стену, а другим концом на гладкий неподвижный профиль. Каким должен быть этот профиль, чтобы стержень в любом положении оставался в равновесии, даже в отсутствие трения?

Рис. 4

Ответ: $x^2 + 4(a-y)^2 = 4a^2$.

Решение. Состояние безразличного равновесия, в котором находится стержень, предполагает постоянство высоты центра тяжести стержня над землей.

Рассматривая крайнее положение стержня (когда он прислонен к вертикальной стенке), получаем, что ордината центра тяжести равна a. Тогда из рис. 4 получаем $\frac{y_1+y}{2} = a$, а также учитывая, что длина стержня равна $2a$: $x^2 + (y_1 - y)^2 = 4a^2$.

Отсюда уравнение профиля: $x^2 + 4(a-y)^2 = 4a^2$.

11. На лед плашмя падает хоккейная шайба под углом α со скоростью v_0. Определите ее скорость после n-го падения, если известно, что при падении перпендикулярно к поверхности льда происходит абсолютно упругий удар. Коэффициент трения между льдом и шайбой равен μ (рис. 5).

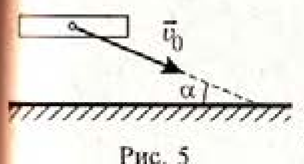


Рис. 5

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + 4v_0^2 n\mu\sin\alpha(n\mu\sin\alpha - \cos\alpha)}$;

Решение. По условию перпендикулярная к поверхности льда составляющая скорости $v_\perp$ до и после удара постоянна и равна $v_\perp = v_0\sin\alpha$. *Если удар длится время t,* тогда средняя сила нормальной реакции определяется из уравнения $N_{ср}\tau = 2mv_\perp = 2mv_0\sin\alpha$.

Так как коэффициент трения равен μ, то потеря горизонтальной составляющей импульса $\Delta p_{гор} = F_{тр}\tau = N_{ср}\mu\tau = 2mv_0\mu\sin\alpha$.

Считаем, что шайба проскальзывает, тогда ее горизонтальная скорость $v_\parallel = v_0\cos\alpha$. Если $mv_0\cos\alpha \le n\cdot 2mv_0\mu\sin\alpha$, то шайба «прыгает» вертикально, и $v = v_\perp = v_0\sin\alpha$.

Если же $mv_0\cos\alpha > n\cdot 2mv_0\mu\sin\alpha$, то горизонтальная составляющая скорости после n-го удара $v_{гор} = v_0\cos\alpha - 2v_0 n\mu\sin\alpha$.

Полная скорость $v = \sqrt{v_{гор}^2 + v_\perp^2} = \sqrt{v_0^2 + 4v_0^2 n\mu\sin\alpha(n\mu\sin\alpha - \cos\alpha)}$;

$\mathrm{tg}\,\alpha_n = v_\perp / v_{гор}$.

12. На край горизонтального стола с высоты H падает горизонтально расположенная гантеля, состоящая из двух одинаковых массивных маленьких шариков, насаженных на невесомый стержень длиной l. Какое расстояние пролетит гантеля после абсолютно упругого соударения со столом до того момента, когда она впервые опять примет горизонтальное положение (рис. 6)?

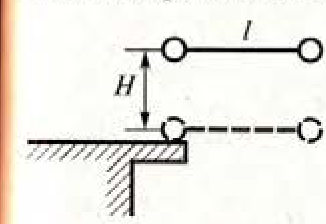


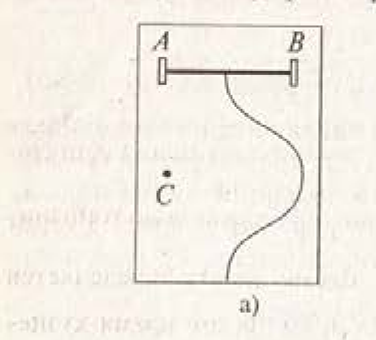
Рис. 6

Ответ: $h = \pi^2 l^2/16H$.

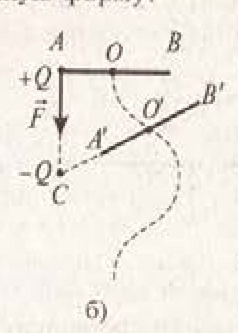
Решение. Скорость гантели в момент удара $v = \sqrt{2gH}$. После удара левый шар изменил направление скорости на противоположное. Удар происходит очень быстро, так что правый шар не успевает за время удара изменить свою скорость. Гантеля будет после удара вращаться. Угловая скорость вращения равна $\omega = 2v/l$. Время полупериода вращения T равно π/ω. За это время гантеля пролетит $h = gT^2/2$, отсюда $h = \pi^2 l^2/16H$.

13. На непроводящей оси свободно насажены два одинаковых колесика A и B, сделанные из металла. На колесико A помещен

заряд $+Q$. В точке C на наклонной плоскости находится заряд $-Q$. Было замечено, что центр этой системы при скатывании с наклонной плоскости движется по траектории, показанной на рис. 7а. Объясните, почему траектория имеет такую форму?



а)



б)

Рис. 7

Решение. В верхнем положении на точку A действует сила притяжения $\vec{F}$ со стороны заряда C (рис. 7б). Видно, что эта сила создает вращающий момент относительно центра тяжести O системы, закручивающий ее против часовой стрелки. Момент сил сменит направление после того, как система пройдет положение $A'B'$. После этого она станет вращаться по часовой стрелке, катясь одновременно вдоль наклонной плоскости.

14. На пути тела массой m, скользящего по гладкой плоскости, находится горка высотой H, массой M. При какой минимальной скорости v тело сможет преодолеть горку? Горка может скользить без трения по плоскости, не отрываясь от нее.

Ответ: $v_{\min} = \sqrt{2gH\,(1 + m/M)}$.

Решение. Используем закон сохранения полной энергии и горизонтальной составляющей импульса системы тело—горка. Потенциальная энергия горки постоянна, поэтому ее не учитываем.

В начальном состоянии импульс системы равен mv, а полная энергия системы $mv^2/2$ (горка неподвижна). В конечном состоянии тело находится на вершине горки (неподвижно относительно нее), а сама горка движется со скоростью u.

Импульс системы $(m + M)u$, а полная энергия

$\frac{1}{2}(m+M)u^2 + mgH$. Используя законы сохранения, получаем

$mv = (m+M)u;\quad \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}(m+M)u^2 + mgH$, откуда минимальная скорость тела равна $v_{\min} = \sqrt{2gH\,(1+m/M)}$.

Очевидно, что если $m \ll M$, то минимальное значение скорости $v = \sqrt{2gH}$, как и в случае закрепленной горки.

15. На одном из концов соломинки, лежащей на гладкой горизонтальной плоскости, сидит кузнечик. С какой наименьшей скоростью v он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец соломинки? Длина соломинки l, ее масса m, масса кузнечика M.

Ответ: $v_{\min} = \sqrt{gl/(1 + M/m)}$.

Решение. Кузнечик прыгает, имея горизонтальную скорость v_1, (относительно стола) и вертикальную составляющую v_2. Скорость соломинки u направлена против v_1. Из закона сохранения импульса в горизонтальном направлении следует, что $mu = Mv_1$.

Тогда относительно соломинки кузнечик движется по горизонтали со скоростью $v_1 + u = v_1\left(1 + \frac{M}{m}\right)$. Время полета определяется вертикальной скоростью кузнечика $t = 2v_2/g$. За это время кузнечик должен попасть на другой конец соломинки.

Значит, $(v_1 + u)t = v_1 v_2 \frac{2}{g}\left(1 + \frac{M}{m}\right) = l$, то есть $v_1 v_2 = \frac{gl}{2(1 + M/m)}$.

Нас интересует минимальная скорость, то есть минимум выражения $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, произведение $v_1 v_2$ задано.

Минимальное значение скорости достигается при $v_1 = v_2$.

Тогда $v_{\min} = v_1\sqrt{2} = \sqrt{gl/(1 + M/m)}$.

16. Для того, чтобы оторвать змею от добычи, нужно приложить к ее хвосту силу F. За какое наименьшее время эта змея, не отпуская добычи, может завязать узел посредине тела? Масса змеи M, длина L, диаметр d; $L \gg d$, трения нет, змея скользкая.

Ответ: $t = \sqrt{L/a} = \sqrt{2\pi Md/F}$.

Решение. Время завязывания узла минимально, если змея завяжет узел на хвосте, а затем равноускоренно перетянет его до середины. В этом случае передвигаемая масса минимальна. Масса узла

$m = \frac{M}{L}2\pi d$ (узел считаем тором, средний радиус которого $\approx d$).

Сила F может сообщить узлу ускорение $a = \frac{F}{m} = \frac{FL}{2\pi dM}$. Время перемещения узла к середине туловища можно найти из уравнения $\frac{at^2}{2} = \frac{L}{2}$, т. е. $t = \sqrt{L/a} = \sqrt{2\pi Md/F}$.

17. Через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь, перекинута замкнутая веревка массой M. За вертикальный участок веревки хватается обезьяна, пытаясь взобраться по ней

вверх. С каким ускорением движется веревка, если обезьяна все время остается на одной и той же высоте от пола? Масса обезьяны m. Трением в блоке пренебречь.

Через какое время обезьяна перестанет справляться со своей затеей, если она может развивать мощность не более P_{max}?

Ответ: $a = mg/M$, $t_{max} = \frac{P_{max} M}{m^2 g^2}$.

Решение. Очевидно, что ускорение, с которым движется веревка, равно $a = mg/M$. Скорость веревки в некоторый момент t равна $v = at = mgt/M$. Мощность, которую развивает обезьяна, $P = mg \cdot v = m^2 g^2 t/M$, следовательно, обезьяна перестанет справляться со своей затеей через время $t_{max} = \frac{P_{max} M}{m^2 g^2}$.

18. Тяжелая веревка подвешена за конец. В петле в ней вставлен невесомый обруч (рис. 8). С каким ускорением он будет падать? Трением пренебречь.

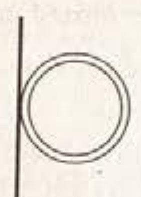


Рис. 8

Ответ: $a = g/2$.

Решение. Пусть обруч опустился на высоту h. В этот момент кинетическая энергия петли равна кинетической энергии ее поступательного движения $mv^2/2$ (m — масса петли, v — скорость ее центра) и энергии вращательного движения вокруг ее центра, равной тоже $mv^2/2$.

Из закона сохранения энергии $mv^2 = mgh$, откуда $v = \sqrt{gh}$. Следовательно, петля движется ускоренно с ускорением $a = g/2$.

19. Стержень длиной l упирается верхним концом в стену, а нижним — в пол (рис. 9). Конец, упирающийся в стену, равномерно опускается вниз. Будет ли движение другого конца равномерным?

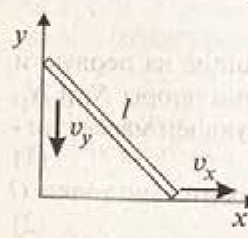


Рис. 9

Решение. Скорость движения нижнего конца стержня $v_x = dx/dt$ можно записать в виде $v_x = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dy}$. Учтем, что $x = \sqrt{l^2 - y^2}$, тогда $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}}$, откуда

$$v_x = -\frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{y|v_y|}{\sqrt{l^2 - y^2}}.$$

Скорость нижнего конца стержня непрерывно убывает и при $y = 0$ становится равной нулю.

20. На тележке лежит куб с ребром b (рис. 10). С каким ускорением a надо двигать тележку, чтобы куб опрокинулся? Трение между кубом и тележкой велико.

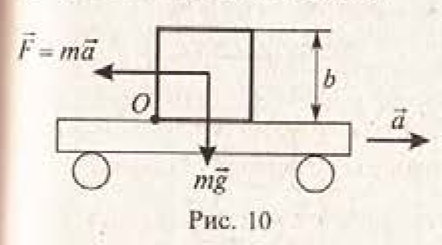


Рис. 10

Решение. Введем силу инерции $\vec{F} = m\vec{a}$ (рис. 10). Куб начнет вращаться вокруг оси O и, следовательно, опрокидываться, если момент силы инерции $\vec{F}$ будет больше (или в крайнем случае равен) моменту силы тяжести $m\vec{g}$: $ma\frac{b}{2} \geq mg\frac{b}{2}$. Отсюда $a \geq g$.

21. Две жестко связанные однородные палочки одинаковой длины массами m_1 и m_2 образуют угол $\pi/2$ и лежат на шероховатой горизонтальной поверхности (рис. 11а). Систему равномерно тянут с помощью нити, прикрепленной к вершине угла и параллельной поверхности. Определите угол α, который составляет нить с палочкой массой m_1.

Ответ: $\alpha = \pi/2 + \mathrm{arctg}(m_1/m_2)$.

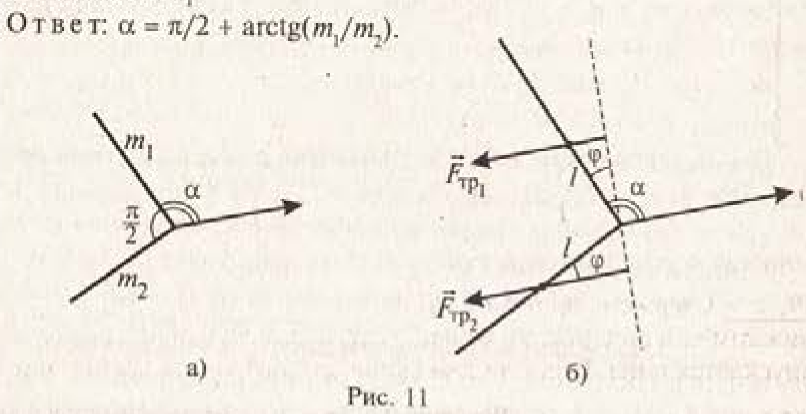


Рис. 11

Решение. Силы трения $F_{тр_1}$ и $F_{тр_2}$, действующие на первую и вторую палочки, пропорциональны силам реакции опоры N_1 и N_2, каждая из которых пропорциональна соответствующей массе, тогда $F_{тр_1}/F_{тр_2} = N_1/N_2 = m_1/m_2$. (1)

Учтем, что моменты сил трения $F_{тр_1}$ и $F_{тр_2}$ относительно точки O одинаковы (рис. 11б) $lF_{тр_1}\cos\varphi = lF_{тр_2}\sin\varphi$, (2)

где l — расстояние от вершины до центров масс палочек. Тогда из (1) и (2) получим $\mathrm{tg}\varphi = m_1/m_2$, где $\varphi = \alpha - \pi/2$, следовательно, угол $\alpha = \pi/2 + \mathrm{arctg}(m_1/m_2)$.

22. Для покоящейся системы, изображенной на рис. 12, а. Найдите ускорения для всех грузов сразу после того, как была перерезана удерживающая их нижняя нить. Считать, что нити невесомы и нерастяжимы, пружины невесомы, масса блока пренебрежимо мала, трение в блоке отсутствует.

Ответ: $a_1 = a_2 = a_3 = 0,\ \ a_4 = (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)\,g/m_4$.

а) Рис. 12 б)

Решение. Для выполнения условия равновесия необходимо, чтобы $m_1 + m_2 > m_3 + m_4$. Пока нить не перерезана, условия равновесия грузов такие: $m_2 g = T_1$; (1)

$m_3 g + T_2 - F_н = 0;\ \ F_н = (m_1 + m_2)g;$ (2)

откуда $T_2 = (m_1 + m_2 - m_3)g.$ (3)

После перерезания веревки уравнения движения грузов имеют вид: $m_1 a_1 = m_1 g + T_1 - F_н;\ \ m_2 a_2 = m_2 g - T_1;$

$m_3 a_3 = F_н - T_2 - m_3 g;\ \ m_4 a_4 = T_2 - m_4 g.$

Учитывая выражения (1), (2), (3), получим $a_1 = a_2 = a_3 = 0$,

$a_4 = (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)\,g/m_4$.

23. Груз подвешен на резиновом шнуре, длина которого в нерастянутом состоянии $l_0 = 70$ см. Груз отклоняют на $\alpha = 90°$, не натягивая шнур, и отпускают. Когда шнур проходит через вертикальное положение, его длина равна $l = 75$ см. Определите скорость груза в этот момент.

Ответ: $v = 3{,}6$ м/с.

Решение. Закон сохранения энергии $mgl = \dfrac{k(\Delta l)^2}{2} + \dfrac{mv^2}{2}$. В нижней точке равнодействующая силы тяжести mg и силы упругости $k\Delta l$ $(\Delta l = l - l_0)$ придает грузу центростремительное ускорение v^2/l.

$k\Delta l - mg = mv^2/l,\ \ 2mgl = (mg + mv^2/l)\Delta l + mv^2;$

$$2gl = g\Delta l + v^2\left(\frac{\Delta l}{l} + 1\right);\quad v = \sqrt{\frac{gl(2l - \Delta l)}{l + \Delta l}} = 3{,}6\ \text{м/с}.$$

24. Маленький шарик подвешен в точке A на нити, длина которой l. В точке O на расстоянии $l/2$ ниже точки A в стену вбит гвоздь. Шарик отводят так, что нить занимает горизонтальное положение, и отпускают (рис. 13). Как дальше будет двигаться шарик? До какой наивысшей точки поднимется шарик? В какой точке шарик пересечет вертикаль, проходящую через точку подвеса?

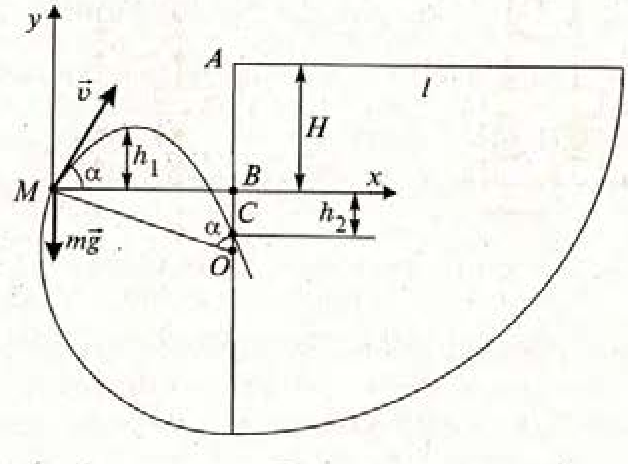


Рис. 13

Решение. Вначале шарик описывает четверть окружности радиусом, равным длине нити l. Затем нить задевает гвоздь O, вбитый в стену, и шарик описывает дугу окружности вдвое меньшего радиуса. Наконец в некоторой точке M сила натяжения нити обратится в нуль и шарик будет лететь только под действием силы тяжести. Уровень MB принимаем за нулевой уровень потенциальной энергии, тогда в точке M, согласно закону сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgH,\quad v^2 = 2gH,\ \text{где}\ H = AB = AO - BO = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha,$$

$$v^2 = 2g\frac{l}{2}(1 - \cos\alpha) = gl(1 - \cos\alpha). \qquad (1)$$

При движении тела по окружности на него действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, вызывающие ускорение, имеющее тангенциальную и нормальную составляющие.

В точке M $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$. Спроецировав это уравнение на MO (направление нормального ускорения) и учитывая, что в точке M $T = 0$, получаем: $ma_n = mg\cos\alpha$.

С учетом (1): $\frac{mv^2}{R} = \frac{2mg(l/2 - l/2\cos\alpha)}{l/2} = 2mg(1-\cos\alpha)$;

т. е. $mg\cos\alpha = 2mg(1-\cos\alpha)$; $\cos\alpha = 2/3$. (2)

Из точки M шарик летит как тело, брошенное под углом α к горизонту с начальной скоростью $\upsilon = \sqrt{gl/3}$ (из (1) и (2)). Если поместить начало координат в точку M, то в этом случае $h_1 = \frac{\upsilon^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{5l}{54}$, учтем, что $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{5}{9}$.

Вертикаль, проходящая через точку подвеса, находится от точки M на расстоянии $MB = \frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{6}l$. Для прохождения по горизонтали такого пути шарику требуется время $t = \frac{\frac{l}{2}\sin\alpha}{\upsilon\cos\alpha} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15l}{g}}$.

За это время шарик по оси y пройдет путь: $\upsilon\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2} = -\frac{5l}{96}$,

т. е. пересечет вертикаль AO в точке, лежащей на $h_2 = 5l/96$, ниже точки B.

25. Массы двух звезд равны m_1 и m_2, расстояние между ними равно r. Найдите период T обращения этих звезд по круговым орбитам вокруг их общего центра масс.

Ответ: $T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{G(m_1+m_2)}}$.

Решение. Система замкнута, поэтому звезды будут вращаться по концентрическим окружностям вокруг их общего центра масс. Уравнения движения звезд $m_1\omega_1^2 r_1 = F$; $m_2\omega_2^2 r_2 = F$, (1)

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости вращения звезд, r_1 и r_2 — радиусы их орбит, F — гравитационная сила взаимодействия звезд, $F = Gm_1m_2/r^2$.

Из определения центра масс $m_1r_1 = m_2r_2$, $r_1 + r_2 = r$. (2)

Тогда из (1) и (2) получим: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $\omega = \sqrt{G(m_1+m_2)/r^3}$,

период обращения звезд $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{G(m_1+m_2)}}$.

26. Резиновую нить массой m и жесткостью k подвешивают за один из концов.

Определите общее удлинение нити Δl.

Ответ: $\Delta l = mg/2k$.

Решение. Пусть длина нити в нерастянутом состоянии l. Выберем участок нити Δx, находящийся от точки подвеса на расстоянии x. Условие его равновесия $\frac{m}{l}\Delta xg + T(x+\Delta x) = T(x)$. Очевидно, что после подвешивания, натяжение по длине нити будет равномерно (линейно) падать от значения mg до нуля. Средняя сила натяжения, действующая на любой участок, равна $mg/2$. Тогда общее удлинение нити равно $\Delta l = mg/2k$.

27. На абсолютно гладком столе лежит цепочка, свешивающаяся наполовину с края стола. Как изменится время ее соскальзывания, если к концам цепочки прикрепить две одинаковые массы M?

Ответ: Увеличится.

Решение. Пусть масса всей цепочки m, длина l, масса единицы длины цепочки $m_0 = m/l$. В начальный момент со стола свисает часть цепочки $x = l/2$, а в некоторый момент свисает длина цепочки x. Сила, заставляющая цепочку двигаться, пропорциональна весу свисающей части m_0gx, тогда $F_1 = ma_1 = m_0gx$, $a_1 = \frac{m_0gx}{m}$.

Ускорение увеличивается от $g/2$ при $x = m/2$, т. е. оно переменно. Если к концам цепочки прикрепить одинаковые массы M, то в этом случае движущая сила $F_2 = (m+2M)a_2 = m_0xg + Mg = (m_0x + M)g$,

$a_2 = \frac{(m_0x+M)g}{m+2M}$. Сравним a_1 и a_2. Для этого приведем их к общему знаменателю и сравним числители.

Первый случай $a_1 = \frac{m_0xgm + 2m_0xgM}{m+2M}$, второй $a_2 = \frac{m_0xgm + Mgm}{m+2M}$,

очевидно, что $a_1 > a_2$, т. е. без масс на концах цепочки она соскользнет быстрее.

28. Невесомый стержень длиной l с небольшим грузом массой m на конце шарнирно закреплен в точке A (рис. 14а) и находится в строго вертикальном положении, касаясь при этом тела массой M. От небольшого толчка система приходит в движении. При каком отношении масс M/m стержень в момент отрыва от тела будет составлять с горизонтом угол $\alpha = \pi/6$? Чему будет равна в этот момент скорость u тела? Трением пренебречь.

Ответ: $M/m = 4$, $u = 0,5\sqrt{gl/2}$.

Решение. До момента отрыва груза от тела скорость и ускорение тела равны горизонтальной составляющей скорости и ускорения груза (рис. 14б).

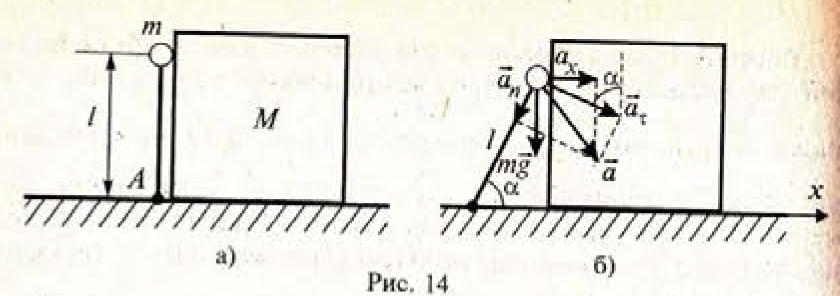


Рис. 14

Полное ускорение груза равно $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. $a_n = v^2/l$ — центростремительное ускорение груза при его движении по окружности радиусом l, v — скорость груза. Проекция полного ускорения $\vec{a}$ на ось x равна $a_x = a_\tau \sin\alpha - (v^2/l)\cos\alpha$. Уравнение движения тела $F_д = Ma_x = Ma_\tau \sin\alpha - M(v^2/l)\cos\alpha$, где $F_д$ — сила нормального давления на тело со стороны груза.

В момент отрыва груза $F_д = 0$ и $a_\tau \sin\alpha = (v^2/l)\cos\alpha$.

Также $a_\tau = g\cos\alpha$ и скорость груза в момент отрыва $v = \sqrt{gl\sin\alpha}$, а скорость тела в тот же момент $u = v\sin\alpha = \sin\alpha\sqrt{gl\sin\alpha}$.

По закону сохранения энергии $mgl = mgl\sin\alpha + mv^2/2 + Mu^2/2$. Учтя, что $\sin\alpha = \sin(\pi/6) = 0{,}5$, найдем M/m:

$M/m = (2 - 3\sin\alpha)/\sin^3\alpha = 4.$

Скорость тела в момент отрыва груза равна $u = 0{,}5\sqrt{gl/2}$.

29. На гладкой горизонтальной поверхности около стенки покоится симметричный брусок массой m_1, с углублением полусферической формы радиуса r (рис. 15). Из начального положения без трения соскальзывает маленькая шайба массой m_2. Найдите максимальную скорость бруска v_1 при его последующем движении.

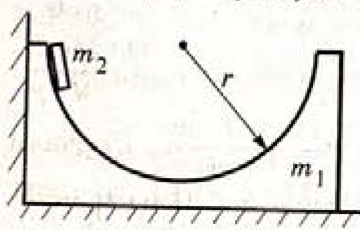


Рис. 15

Ответ: $v_{1\max} = \dfrac{2m_2\sqrt{2gr}}{m_1 + m_2}$.

Решение. Из закона сохранения энергии найдем скорость шайбы в наинизшем положении $v = \sqrt{2gr}$. До этого момента брусок будет касаться стены. При подъеме шайбы по правой половине бруска он будет ускоряться, пока их скорости не сравняются (шайба в точке наивысшего подъема). Потом шайба соскальзывает вниз и, пока она не пройдет свое низшее положение, брусок все еще будет ускоряться. Таким образом, брусок имеет максимальную скорость в моменты прохождения шайбой низшего положения при ее движении назад относительно бруска.

Для нахождения максимальной скорости бруска запишем закон сохранения импульса (брусок оторвался от стены):

$$m_2\sqrt{2gr} = m_1v_1 + m_2v_2, \qquad (1)$$

и закон сохранения энергии (шайба проходит наинизшее положение)

$$m_2gr = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}. \qquad (2)$$

Решение системы уравнений (1) и (2) имеет вид:

$v_1 = \dfrac{2m_2\sqrt{2gr}}{m_1 + m_2}$; $v_2 = \dfrac{(m_2 - m_1)\sqrt{2gr}}{m_1 + m_2}$, откуда максимальная скорость бруска $v_{1\max} = \dfrac{2m_2\sqrt{2gr}}{m_1 + m_2}$.

30. Две одинаковые упругие шайбы, массой M каждая, двигаются в одну сторону с одинаковыми скоростями v по гладкой горизонтальной поверхности вдоль линии, соединяющей центры шайб. Расстояние между шайбами равно L. Передняя шайба налетает на небольшое тело массой m, которое прилипает к шайбе. Через какое время после этого шайбы столкнутся между собой? Какие скорости они будут иметь после абсолютно упругого центрального соударения?

Ответ: $u_1 = \dfrac{2M - m}{2M + m}v$; $u_2 = \dfrac{2Mv}{2M + m}$.

Решение. Для абсолютно неупругого удара закон сохранения импульса $Mv = (M + m)v_1$; $v_1 = \dfrac{Mv}{M + m}$ — скорость передней шайбы с прилипшем телом m. Скорость второй шайбы $v > v_1$. Вторая шайба догоняет первую с относительной скоростью $v_0 = v - v_1 = \dfrac{mv}{M + m}$.

Соударение произойдет через время $t = \dfrac{l}{v_0} = \dfrac{l(M + m)}{mv}$. Скорости шайб после абсолютно упругого соударения u_1 и u_2. Найдем, исходя из законов сохранения, $Mv + (M + m)\dfrac{Mv}{M + m} = Mu_1 + (M + m)u_2$;

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{(M + m)M^2v^2}{2(M + m)^2} = \frac{Mu_1^2}{2} + \frac{(M + m)u_2^2}{2};$$

откуда $u_1 = \dfrac{2M - m}{2M + m}v$; $u_2 = \dfrac{2Mv}{2M + m}$.

31. Два тела массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг движутся навстречу друг другу во взаимно перпендикулярных направлениях со скорос-

тями $v_1 = 3$ м/с, $v_2 = 2$ м/с. Определите, какое количество теплоты Q выделится в результате абсолютно неупругого соударения.

Ответ: $Q \approx 4{,}3$ Дж.

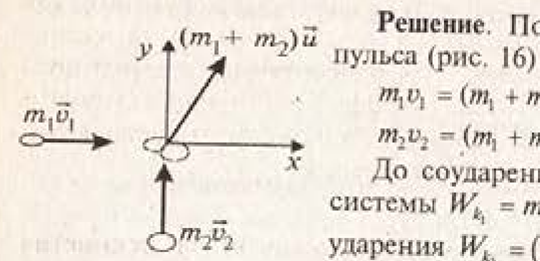


Рис. 16

Решение. По закону сохранения импульса (рис. 16)

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)u_x;$$

$$m_2v_2 = (m_1 + m_2)u_y.$$

До соударения кинетическая энергия системы $W_{k_1} = m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2$, а после соударения $W_{k_2} = (m_1 + m_2)u^2/2 =$

$$= (m_1 + m_2)\left(u_x^2 + u_y^2\right)/2 = \frac{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Тогда в результате соударения выделится количество теплоты

$$Q = W_{k_1} - W_{k_2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1^2 + v_2^2) \approx 4{,}3\ \text{Дж}.$$

32. Мяч падает на горизонтальную поверхность с высоты h и после упругого удара поднимается до высоты h_1. На какую высоту поднимется мяч после n-го удара, если коэффициент восстановления k (отношение скоростей после и до удара) считать постоянным?

Ответ: $h_n = h_1^n/\left(h^{n-1}\right)$.

Решение. Высоты, на которые поднимется мяч после последовательных ударов: $h = \frac{v^2}{2g}$; $h_1 = \frac{v_1^2}{2g}$; $h_2 = \frac{v_2^2}{2g}$; ... $h_n = \frac{v_n^2}{2g}$, где v_1 — скорость мяча после первого удара; v_2 — после второго и т.д., v_n — после n-го удара.

Учитывая значение коэффициента восстановления, напишем:

$$k = \frac{v_1}{v};\ k^2 = \frac{v_1^2}{v^2};\ k^2 = \frac{v_2^2}{v_1^2};\ k^2 = \frac{v_3^2}{v_2^2};\ \dots\ k^2 = \frac{v_n^2}{v_{n-1}^2}.$$

Перемножив эти равенства (кроме первого), получаем

$$k^{2n} = \frac{v_n^2}{v^2} = \frac{2gh_n}{2gh} = \frac{h_n}{h},\ \text{откуда}\ h_n = hk^{2n}. \qquad (1)$$

С другой стороны $k^2 = \frac{v_1^2}{v^2} = \frac{2gh_1}{2gh} = \frac{h_1}{h}$; $k = \left(\frac{h_1}{h}\right)^{1/2}$. (2)

Подставим (2) в (1) и получим $h_n = h\left(\frac{h_1}{h}\right)^n = \frac{h_1^n}{h^{n-1}}$.

33. У левого края тележки длиной $L = 0{,}2$ м и массой $M = 1$ кг лежит кубик массой $m = 0{,}3$ кг (рис. 17). Кубику толчком придают

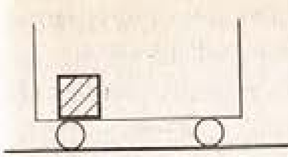


Рис. 17

горизонтальную скорость $v_0 = 1$ м/с вправо. Считая, что тележка в начальный момент неподвижна, определите, на каком расстоянии x от левого края тележки будет находиться кубик после того, как проскальзывание его относительно тележки прекратится. Коэффициент трения кубика о дно тележки $\mu = 0{,}1$. Удары кубика о стенки считать абсолютно упругими. Тележка едет по столу без трения.

Ответ: $x = 0{,}02$ м.

Решение. Согласно закону сохранения энергии убыль кинетической энергии системы равна работе силы трения скольжения на тормозном пути l:

$$\Delta W_k = \frac{(M+m)u^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F_{\text{тр}}l = -\mu mgl, \qquad (1)$$

где u — скорость системы после прекращения проскальзывания, которая определяется из закона сохранения импульса:

$$mv_0 = (M+m)u;\ u = \frac{mv_0}{M+m}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получим: $l = \frac{v_0^2}{2\mu g(1 + m/M)} = 0{,}38$ м.

Значит, кубик остановится на расстоянии $x = L - (l - L) = 0{,}02$ м от левого края тележки.

34. На нити подвешен груз массой m_2. Пуля, массой m_1, летящая горизонтально со скоростью v_0, попадает в груз. При этом возможны три случая: пуля, пробив груз и сохранив часть скорости, летит дальше, пуля застревает в грузе и пуля после удара отскакивает от груза. В каком из этих случаев груз отклонится на наибольший угол α и в каком — на наименьший?

Решение. По закону сохранения импульса

$$m_1v_0 = m_1u_1 + m_2u_2, \qquad (1)$$

где u_1 и u_2 — скорости пули и груза после взаимодействия.

Из (1) получим $u_2 = \frac{m_1(v_0 - u_1)}{m_2}$. (2)

Если пуля пробивает груз, то ее скорость u_1 заведомо больше, чем u_2. Обозначим $u_1 = u_2 + v$. Подставив в (1), получим

$$u_2 = \frac{m_1(v_0 - v)}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Если пуля застряла в грузе, то тогда $u_1 = u_2$ и $u_2 = \frac{m_1v_0}{m_1 + m_2}$. (4)

Если пуля отскакивает от груза, то ее скорость $u_1 < 0$, а (2) имеет вид $u_2 = \dfrac{m(v_0 + |u_1|)}{m_2}$. (5)

Сравнивая (3), (4) и (5), получаем, что наибольшую скорость, а следовательно, и наибольшее отклонение груз получит, если пуля отскакивает от него, и наименьшее, если пуля вылетит, пробив груз.

35. Центры шаров 1, 2 и 3 расположены на одной прямой (рис. 18). Шар 1 с начальной скоростью v_1, направленной по линии центров, ударяет шар 2. Шар 2, получив после удара скорость u_2, ударяет шар 3. Оба удара абсолютно упруги. Какой должна быть масса m_2 шара 2, чтобы при известных массах m_1 и m_3 шаров 1 и 3 последний после удара получил наибольшую скорость?

Рис. 18

Решение. После последовательных ударов шары 2 и 3 получают скорости

$$u_2 = \frac{2m_1u_1}{m_1 + m_2};$$

$$u_3 = \frac{2m_2u_2}{m_2 + m_3} = \frac{4m_1m_2v_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}.$$

Максимальное значение u_3 найдем, приравняв нулю производную $\dfrac{du_3}{dm_2} = 0$. $\dfrac{du_3}{dm_2} = \dfrac{4m_1v_1(m_1m_3 - m_2)}{[(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)]^2} = 0$. Отсюда $m_2 = \sqrt{m_1m_3}$.

Рассмотрим частные случаи.

1) $m_1 >> m_3$, тогда $u_3 = \dfrac{4m_1v_1}{m_1 + m_2}$.

Если при этом можно считать, что $m_1 >> m_2$, то $u_3 = 4v$.

Если бы шар 1 ударял шар 3 непосредственно (без промежуточного шара 2), то предельная скорость шара 3 при $m_1 >> m_3$ составляла бы $u_3 \approx 2v_1$.

2) $m_1 = m_3$. В этом случае $m_2 = m_1 = m_3$ и $u_3 = v_1$.

3) $m_1 << m_3$. Считая, что и $m_2 >> m_1$, получим $u_3 \approx \dfrac{4v_1m_1}{m_3}$.

Здесь скорость шара 3 тоже примерно в два раза больше, чем без промежуточного шара 2.

36. Оцените, на какую высоту H поднимется стрела, пущенная из лука вертикально вверх. Масса стрелы $m = 20$ г, длина тетивы $l = 1{,}2$ м. Тетиву оттягивают на $h_0 = 7$ см. Силу упругости натяжения тетивы считать постоянной и равной $T = 350$ Н.

Ответ: $H = 14{,}6$ м.

Решение. Энергия, полученная стрелой, равна работе силы $\vec{F}$, действующей на стрелу со стороны тетивы. Эта сила равна равнодействующей сил упругости обоих половин тетивы (рис. 19), откуда $F = 2T\sin\alpha$. Так как $h_0 << l$, то угол α — мал, тогда $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h_0}{l/2}$; и $F = 4T\dfrac{h_0}{l}$.

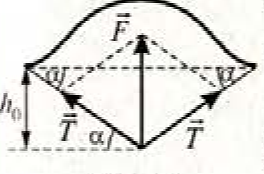


Рис. 19

Сила, действующая на стрелу, пропорциональна стреле прогиба h_0, поэтому работа этой силы равна среднему арифметическому значению силы, умноженной на h_0.

$$A = F_{ср}h_0 = 2T\frac{h_0^2}{l}.$$

Работа A равна кинетической энергии, приобретенной стрелой при выстреле. По закону сохранения энергии она равна потенциальной энергии стрелы в верхней точке подъема.

Тогда $mgH = 2T\dfrac{h_0^2}{l}$, откуда $H = \dfrac{2Th_0^2}{mgl} = 14{,}6$ м.

37. Два шарика одинаковой массы m, соединенные невесомой пружиной жесткостью k и длиной l, лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий шарик той же массы движется со скоростью v_0 по линии, соединяющей центры первых двух шаров, и упруго соударяется с одним из них (рис. 20). Определите максимальное и минимальное расстояние между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении.

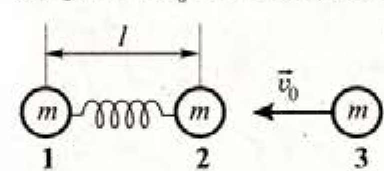


Рис. 20

Ответ: $l_{\substack{max\\min}} = l \pm \sqrt{\dfrac{mv_0^2}{2k}}$.

Решение. При упругом соударении 3-го и 2-го шариков можно воспользоваться законом сохранения импульса, т. к. за время соударения, которое очень мало, смещением второго шарика можно пренебречь. Выполнится также закон сохранения энергии.

Тогда $mv_0 = mu_0 + mu_2$; (1)

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu_0^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}, \quad (2)$$

здесь u_0 и u_2 соответственно скорости 3-го и 2-го шариков после соударения.

Из (1) и (2) следует $v_0^2 - u_0^2 = u_2^2$; (3)

$v_0 - u_0 = u_2$. (4)

Разделив (3) и (4), получим $v_0 + u_0 = u_2$, $v_0 - u_0 = u_2$, т. е. $u_0 = 0$, а $u_2 = v_0$. Второй шарик приобретает кинетическую энергию $\frac{mv_0^2}{2}$.

В момент максимального сжатия пружины скорости шариков одинаковы. Действительно, так как первый шарик вначале покоился, а второй имел начальную скорость v_0, пружина начнет сжиматься. Скорость 1-го шарика начнет возрастать, а 2-го — уменьшаться. Расстояние между шариками будет сокращаться до тех пор, пока их скорости не сравняются. Так как внешних сил нет, импульс системы сохраняется: $mv_0 = 2mu$, (5)

u — скорость шариков в момент максимального сближения. Шарики взаимодействуют друг с другом посредством внутренней силы упругости пружины. За счет работы этой силы изменяется кинетическая энергия шариков. Посчитаем эту работу в системе отсчета, связанной с первым шариком. Второй шарик сместится относительно первого на расстояние x_1, а сила упругости, противоположная направлению смещения, совершит работу $A_{упр} = -\frac{kx_1^2}{2}$. Следовательно,

$$2\frac{mu^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{упр} = -\frac{kx_1^2}{2}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) получаем $u = \frac{v_0}{2}$, $x_1 = \sqrt{\frac{mv_0^2}{2k}}$.

При растяжении пружины аналогично находим $x_2 = \sqrt{\frac{mv_0^2}{2k}}$.

Минимальное расстояние между шариками $l_{min} = l - \sqrt{\frac{mv_0^2}{2k}}$; максимальное $l_{max} = l + \sqrt{\frac{mv_0^2}{2k}}$.

38. Шайба ударяется о поверхность льда под углом $\alpha = 45°$ к вертикали и отскакивает под углом $\beta = 60°$, потеряв половину кинетической энергии. Найдите коэффициент трения шайбы о поверхность льда. Действие силы тяжести за время удара не учитывать. Движение шайбы считать поступательным.

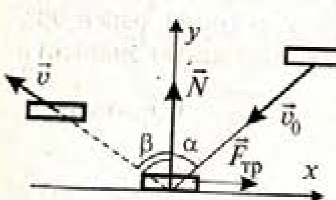


Рис. 21

Ответ: $m = 0{,}09$.

Решение. При ударе на шайбу действуют сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ со стороны поверхности льда и сила трения $F_{тр} = \mu N$ (рис. 21).

Считая время удара Δt, закон изменения импульса имеет вид $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$.

(x): $F_x\Delta t = \Delta p_x$; (y): $F_y\Delta t = \Delta p_y$.

Здесь $F_x = F_{тр} = \mu N$; $F_y = N$.

$\Delta p_x = -mv\sin\beta - (-mv_0\sin\alpha)$; $\Delta p_y = mv\cos\beta - (-mv_0\cos\alpha)$.

В результате получим $\mu N\Delta t = mv_0\sin\alpha - mv\sin\beta$;

$N\Delta t = mv_0\cos\alpha + mv\cos\beta$.

Отсюда коэффициент трения равен $\mu = \frac{v_0\sin\alpha - v\sin\beta}{v_0\cos\alpha + v\cos\beta}$.

Учтем, что при ударе шайба теряет половину кинетической энергии, $\frac{mv_0^2}{2} = 2\frac{mv^2}{2}$, тогда $v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\mu = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha - \sin\beta}{\sqrt{2}\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} = 0,09.$$

39. Два груза, массой m каждый, связаны нитью. Между грузами вставлена легкая упругая пружина, сжатая на величину x. Система движется со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярно ее оси (рис. 22а). Нить пережигают и грузы разлетаются под углом 90°. Найдите коэффициент упругости пружины k.

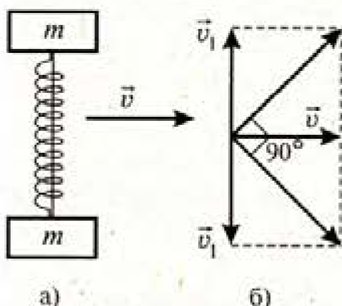


Рис. 22

Ответ: $k = \frac{2mv^2}{x^2}$.

Решение. В системе отсчета, связанной с центром масс системы грузов и движущейся поступательно в ту же сторону со скоростью $\vec{v}$, грузы покоятся. После пережигания нити они разлетятся с одинаковыми скоростями v_1 в противоположных направлениях (рис. 22б). Учитывая, что в неподвижной системе отсчета угол разлета грузов равен 90°, то очевидно, что $v_1 = v$. Закон сохранения механической энергии в движущейся системе отсчета имеет вид $\frac{kx^2}{2} = 2\cdot\frac{mv_1^2}{2}$. Следовательно, $kx^2 = 2mv^2$, $k = \frac{2mv^2}{x^2}$.

40. Шарик скользит без трения по внутренней поверхности конуса (рис. 23). Известны высоты h_1 и h_2 в точках наименьшего и наибольшего подъема. Найдите скорости шарика v_1 и v_2 в этих точках.

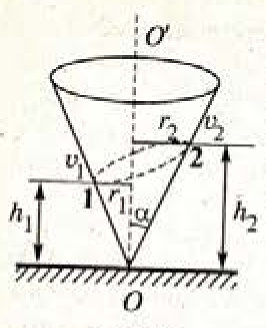


Рис. 23

Решение. В точках максимального и минимального подъемов векторы скоростей, и следовательно и импульсов шариков горизонтальны. Воспользуемся законами сохранения момента импульса (относительно оси OO') и энергии для точек 1 и 2.

$$mv_1r_1 = mv_2r_2. \qquad (1)$$

Учтем, что $r_1 = h_1 \operatorname{tg}\alpha$; $r_2 = h_2 \operatorname{tg}\alpha$;

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \qquad (2)$$

Из (1) получим $v_2 = \dfrac{h_1v_1}{h_2}$ и подставим в (2):

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{h_1^2v_1^2}{2h_2^2} + gh_2; \quad v_1^2\left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{2h_2^2}\right) = g(h_2 - h_1),$$

откуда $v_1 = h_2\sqrt{\dfrac{2g}{h_1 + h_2}}$; аналогично $v_2 = h_1\sqrt{\dfrac{2g}{h_1 + h_2}}$.

41. Почему сосиски при варке обычно лопаются вдоль, а не поперек?

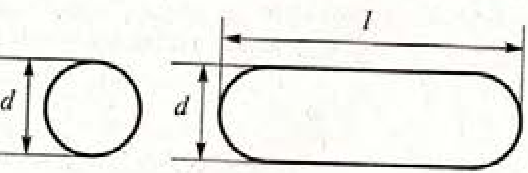


Рис. 24

Решение. Будем считать, что оболочка сосиски одинаково прочна во всех направлениях. Рассмотрим поперечный и продольный разрезы сосиски (рис. 24).

Предположим, что давление внутри равно p. Тогда сила, разрывающая сосиску поперек, равна $F_1 = pS = p\dfrac{\pi d^2}{4}$. На единицу длины оболочки тогда приходится сила $\dfrac{F_1}{\pi d} = \dfrac{pd}{4}$. Для продольного разреза полная сила равна $F_2 = pld$. А на единицу длины приходится $\dfrac{F_2}{2l + 2d} = \dfrac{pd}{2(1 + d/l)}$.

Учитывая, что $(d/l) << 1$, ясно, что вдоль сосиска порвется раньше, чем поперек $\dfrac{pd}{2} > \dfrac{pd}{4}$.

42. Цилиндрический сосуд закрыт сверху поршнем, имеющим площадь S и массу M. На поршне без потери энергии подпрыгивает n шариков, каждый массой m ($m << M$). Найдите давление газа под поршнем. Атмосферное давление равно p_0.

Ответ: $p = p_0 + \dfrac{(nm + M)g}{S}$.

Решение. Скорость шарика в момент падения на поршень равна v, тогда при ударе о поршень импульс шарика меняется на $\Delta p = 2mv$. Период движения шарика (время падения и время подъема шарика на ту же высоту) равен $t = \dfrac{2v}{g}$. Среднюю силу F_1, действующую на поршень при ударе шарика, находим из соотношения $Ft = \Delta p$, откуда $F_1 = \dfrac{2mv}{t} = mg$, для n шариков $F = nmg$. Следовательно, давление газа под поршнем должно быть равно $p = p_0 + \dfrac{(nm + M)g}{S}$.

43. Трубке радиусом r придана форма кольца радиусом R. Внутри трубки со скоростью v пропускается вода (плотность ее ρ). Определите продольное натяжение трубки. Радиус трубки много меньше радиуса кольца. Вязкостью жидкости пренебречь.

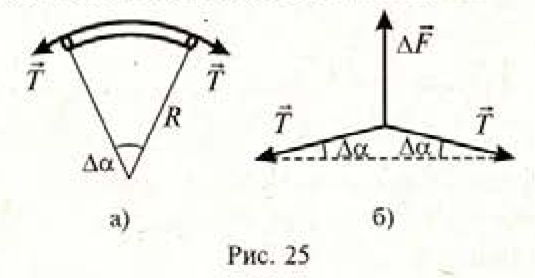


Рис. 25

Решение. Выделим малый элемент трубки длиной $R\Delta\alpha$ (рис. 25а). Под действием деформации стенки трубки жидкость, протекающая по этому элементу, приобретает ускорение $a = v^2/R$. По третьему закону Ньютона на элемент со стороны жидкости будет действовать сила $\Delta F = \Delta ma = \rho\pi r^2 R\Delta\alpha \cdot v^2/R$ (рис. 25б).

Сила ΔF уравновешивается силами натяжения кольца

$$\Delta F = 2T\sin(\Delta\alpha/2) = T\Delta\alpha, \text{ отсюда } T = \Delta F/\Delta\alpha = \rho\pi r^2 v^2.$$

44. На дне цилиндрического сосуда, заполненного водой и равномерно вращающегося вокруг вертикальной оси, прикреплен

кусочек пробки. В какой-то момент пробка отрывается от дна и всплывает. По какой траектории при этом движется пробка: приближаясь к стенке, приближаясь к оси или вертикально вверх?

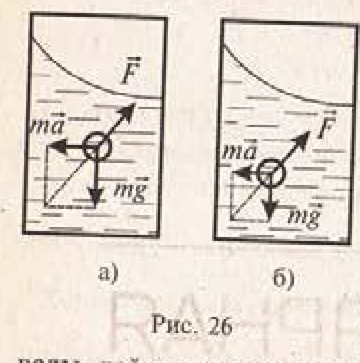


Рис. 26

Решение. Рассматриваем сосуд как неинерциальную систему. В этой системе на любой элемент массы воды (предположим, что объем его равен объему пробки) действуют три силы, под действием которых этот элемент находится в равновесии (рис. 26а)

$\vec{F} - m\vec{a} + m\vec{g} = 0$, F — сила давления окружающей воды, $-m\vec{a}$ — сила инерции, mg — сила тяжести. На пробку, помещенную на место этого элемента воды, действует такая же сила давления со стороны окружающей воды, но меньшие сила тяжести и сила инерции (рис. 26б).

Под действием разности между силой давления окружающей воды и силами тяжести и инерции пробка всплывает и приближается к оси сосуда. Аналогично, что если во вращающийся сосуд спустить тело с плотностью, большей плотности воды, то тело должно приближаться к стенке.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Уровень I

13. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВА. УПРУГИЕ И ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ЖИДКОСТИ

13.1. Вычислите массу молекулы воды. $N_А = 6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: $m = 3\cdot10^{-26}$ кг.

Решение. Масса молекулы воды $m = M\nu$, где ν — число молей молекулы воды, M — молярная масса воды. $\nu = N/N_А$, $M = M_Н + M_О$, следовательно $m = M(N/N_А)$.

13.2. Где больше атомов: в стакане воды или стакане ртути?

Ответ: $N_в > N_{рт}$.

Решение. $V_в = V_{рт}$, $V_в = V_1$, $V_{рт} = V_2$. $\rho_1 = 1,0\cdot10^3$ кг/м^3,

$\rho_2 = 13,6\cdot10^3$ кг/м^3, $M_1 = 18\cdot10^{-3}$ кг/моль, $M_2 = 201\cdot10^{-3}$ кг/моль.

$V_1 = V_2$, тогда $\dfrac{m_1}{\rho_1} = \dfrac{m_2}{\rho_2}$. Если учесть, что $\dfrac{m}{M} = \dfrac{N}{N_А}$ и что молекула воды содержит 3 атома, то $\dfrac{M_1 N_в}{3N_А\rho_1} = \dfrac{M_2 N_{рт}}{N_А\rho_2}$. Отсюда $\dfrac{N_в}{N_{рт}} = 2,46$.

13.3. Оцените для железа: 1) число атомов в объеме $V = 1\,см^3$; 2) расстояние между центрами соседних атомов.

Ответ: $N = 8,4\cdot10^{22}$; $r = 2,3\cdot10^{-10}$ м.

Решение. 1) Число атомов $N = \nu N_А$, где $\nu = \dfrac{m}{M}$, а $m = V\rho$, $\rho = 7,87\cdot10^3$ кг/м^3. Тогда $N = \dfrac{N_А V\rho}{M}$.

2) Расстояние между центрами соседних атомов при условии плотного прилегания атомов друг к другу равно диаметру атома $V_1 = r^3$. Отсюда $r = \sqrt[3]{V_1}$. Так как полный объем $V = NV_1$, то $r = \sqrt[3]{V/N}$.

13.4. Определите плотность углекислого газа при нормальных условиях.

Ответ: $\rho = 1,97\,кг/м^3$.

Решение. Плотность вещества $\rho = \frac{m}{V}$. $V_0 = 22{,}4$ л $= 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3, $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Объем вещества $V = V_0\nu$, где V_0 — объем, занимаемый одним молем вещества при нормальных условиях, $\nu = \frac{m}{M}$. Тогда $V = V_0 \frac{m}{M} = V_0 \frac{V\rho}{M}$. Отсюда $\rho = \frac{M}{V_0}$.

13.5. Сколько молей содержится в 1 кг воды?

Ответ: $\nu = 55{,}6$.

Решение. Число молей вещества $\nu = m/M$, где M — молярная масса вещества.

13.6. Какой объем имеют $N = 1{,}0 \cdot 10^{22}$ атомов алмаза?

Ответ: $V = 0{,}57 \cdot 10^{-7}$ м^3.

Решение. Алмаз состоит из молекул углерода $M = 12 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\rho = 3{,}52 \cdot 10^3$ кг/м^3. Число молей $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$, масса $m = V\rho$.

Тогда $V = \frac{NM}{N_A\rho}$.

13.7. Железную линейку длиной $l = 30$ см при 0 °С нагревают на $\Delta T = 10$ °С. Железный стержень длиной $l = 30$ см при 10 °С нагревают на $\Delta T = 10$ °С. На сколько увеличиваются длины линейки и стержня при этом?

Ответ: $\Delta l_1 = 36$ мкм, $\Delta l_2 = 36$ мкм.

Решение. Зависимость линейного размера от температуры имеет вид: $l = l_0(1 + \alpha T)$, где α — коэффициент линейного расширения вещества, l_0 — длина при $t = 0$ °С или 273 К, $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ К$^{-1}$.

$l_1 = l_{01}(1 + \alpha\Delta T_1)$; $\Delta l_1 = l_1 - l_{01} = l_0\alpha\Delta T_1$.

$l_2 = l_{02}\left[1 + \alpha(T_2 - T_1)\right] = l_{02}(1 + \alpha\Delta T_2)$; $\Delta l_2 = l_2 - l_{02} = l_{02}\alpha\Delta T_2$.

13.8. Как должны относиться длины l_1 и l_2 двух стержней, сделанных из разных материалов, с коэффициентами линейного расширения α_1 и α_2, чтобы при любой температуре разность длин стержней оставалась постоянной?

Ответ: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Решение. При нагревании на Δt стержни будут иметь длины $l_1' = l_1(1 + \alpha_1\Delta T)$ и $l_2' = l_2(1 + \alpha_2\Delta T)$. По условию задачи $l_2' - l_1' = l_2 - l_1$, откуда $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

13.9. Стальная струна длиной $l = 3$ м, площадью поперечного сечения $S = 1$ мм^2, натянута между двумя стержнями. На сколько изменится сила натяжения струны при охлаждении ее на $\Delta T = 30$ К? Как изменится потенциальная энергия струны? Точки закрепления считать неподвижными. $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\alpha = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

Ответ: $\Delta F = 66$ Н; $\Delta W^п = 32{,}7$ мДж.

Решение. При понижении температуры струны на ΔT, ее длина уменьшается на Δl. Относительное укорачивание струны $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\Delta F}{S}$, где E — модуль Юнга стали, ΔF — изменение силы натяжения, S — площадь поперечного сечения струны. Так как $\Delta l = l_0\alpha\Delta T$, то $\Delta F = E\alpha\Delta TS$. $\Delta F = 66$ Н. Изменение потенциальной энергии струны $\Delta W^п = \frac{k\Delta l^2}{2}$, где k — коэффициент упругости (жесткость) пружины. Из закона Гука $\left|\Delta \vec{F}\right| = k\Delta l$ следует: $k = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{E\alpha\Delta TS}{l_0\alpha\Delta T} = \frac{ES}{l_0}$. Тогда $\Delta W^п = \frac{ESl_0\alpha_0^2\Delta T^2}{2}$.

13.10. Покажите, что коэффициент объемного расширения β в три раза больше коэффициента линейного расширения α с достаточно большой точностью.

Решение. Относительное линейное расширение $\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha t$, где α — коэффициент линейного расширения. Относительное объемное расширение $\frac{\Delta V}{V_0} = \beta t$, где β — коэффициент объемного расширения. Так как $V_0 = l_0^3$, а $V = V_0(1 + \beta t)$ и $l = l_0(1 + \alpha t)$, то нетрудно получить $\Delta V = (l_0 + \Delta l)^3 - l_0^3 = 3l_0^2\Delta l$. $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3l_0^2\Delta l}{l_0^3} = \frac{3\Delta l}{l_0}$, т. е. $\beta t = 3\alpha t$, отсюда $\beta = 3\alpha$, что и требовалось доказать.

13.11. В железный бидон емкостью $V_0 = 10$ л налит до самого верха керосин при температуре 5 °С. Какой объем керосина вытечет, если поместить бидон в комнате, где температура 20 °С? Расширение бидона не учитывать. $\beta = 10 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$.

Ответ: $\Delta V = 15 \cdot 10^{-5}$ м^3.

Решение. При нагревании объем керосина увеличился и стал равным $V = V_0(1 + \beta\Delta T)$, где $\Delta T = T_1 - T_0 = 15$ К. $\Delta V = V_0\beta\Delta T$.

13.12. Найдите плотность ртути при температуре 100 °C. $\rho_0 = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\beta = 1,8 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$.

Ответ: $\rho = 13,36$ кг/м^3.

Решение. При нагревании объем увеличивается по закону $V = V_0(1+\beta t)$. Так как $\rho = \frac{m}{V}$, то $\rho = \frac{\rho_0}{1+\beta t}$.

13.13. Вес бензина при 0 °C $P_1 = 88$ Н. При 60 °C вес бензина, занимающего тот же объем, $P_2 = 83$ Н. Определите коэффициент объемного расширения бензина.

Ответ: $\beta = 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Решение. Из условия $V_1 = V_2$ следует $\frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_2}{\rho_2}$, где ρ_1, ρ_2 — плотности бензина при T_1 и T_2 соответственно. Так как $m_1 = \frac{P_1}{g}$, а $m_2 = \frac{P_2}{g}$ и $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1+\beta\Delta T}$, то $P_1 = P_2(1+\beta\Delta T)$, а $\beta = \frac{P_1 - P_2}{P_2\Delta T}$, где $\Delta T = T_2 - T_1 = 60$ K.

13.14. Разность температур в коленах сообщающегося сосуда равна ΔT. При этом в одном колене высота жидкости h_1, в другом — h_2. Определить коэффициент объемного расширения жидкости. Чем удобен этот метод определения коэффициентов объемного расширения жидкостей?

Ответ: $\beta = \frac{h_2 - h_1}{h_1\Delta T}$.

Указание. См. задачу 13.11. $\Delta V = V\beta\Delta T$, $\Delta V = S(h_2 - h_1)$, $V = Sh_1$. Откуда следует $\beta\Delta T = \frac{(h_2 - h_1)S}{Sh_1}$, тогда $\beta = \frac{h_2 - h_1}{h_1\Delta T}$.

13.15. Два одинаковых стальных моста должны быть построены — один на севере, другой на юге. Каковы должны быть при 0 °C зазоры, компенсирующие удлинение моста при изменении температуры, если на юге возможны колебания от −10 до +50 °C, а на севере от −50 до +20 °C? При 0 °C длина моста $L_0 = 100$ м, коэффициент линейного расширения стали $\alpha = 10^{-5}$ К$^{-1}$.

Ответ: $\Delta L_1 = 50$ мм для моста на юге, $\Delta L_2 = 20$ мм — на севере.

Решение. Зазор увеличивается при понижении температуры ниже 0 °C. Следовательно, размеры зазора должны определяться только максимальной температурой выше нуля. $\Delta L_1 = L_0\alpha t_1$, $\Delta L_2 = L_0\alpha t_2$.

13.16. При температуре $t_0 = 0$ °C длины алюминиевого и железного стержней $l_{0_а} = 50$ см и $l_{0_ж} = 50,05$ см. Сечения стержней одинаковы. При какой температуре t_1 длины стержней и при какой температуре t_2 их объемы будут одинаковы? Коэффициенты линейного расширения алюминия и железа $\alpha_а = 2,4 \cdot 10^{-7}$ К$^{-1}$, $\alpha_ж = 1,2 \cdot 10^{-7}$ К$^{-1}$.

Ответ: $t_1 = 83,4$ °C; $t_2 = 27,8$ °C.

Указание. Использовать решение задачи 13.10. $\beta = 3\alpha$. При $l_а = l_ж$, $t_1 = \frac{l_{0_ж} - l_{0_а}}{l_{0_а}\alpha_а - l_{0_ж}\alpha_ж}$. При $V_а = V_ж$, $t_2 = \frac{t_1}{3}$.

13.17. Две линейки — одна медная, другая железная — наложены одна на другую так, что они совпадают только с одной стороны. Определите длины линеек при 0 °C, зная, что разность их длин при любой температуре составляет $\Delta l = 10$ см, коэффициент линейного расширения меди $\alpha_1 = 17 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}, железа — $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}.

Ответ: $l_{10} = 24$ см; $l_{20} = 34$ см.

Решение. Длины медной и железной линеек при любых температурах будут равны $l_{1t} = l_{10}(1+\alpha_1 t)$, $l_{2t} = l_{20}(1+\alpha_2 t)$. По условию задачи $l_{2t} - l_{1t} = l_{20} - l_{10} = \Delta t$. Следовательно $\frac{l_{10}}{l_{20}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, тогда $l_{10} = \frac{\Delta l\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$, $l_{20} = \frac{\Delta l\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$.

13.18. При температуре 0 °C период колебаний математического маятника равен 2 с. Чему равен период колебаний при 20 °C, если коэффициент линейного расширения а нити, на которой подвешен маятник, равен $1,8 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}.

Ответ: $T_2 = 2,00036$ с.

Решение. Периоды колебаний маятника при температуре t_1 и t_2 соответственно равны $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0(1+\alpha t_2)}{g}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} \cdot \sqrt{1+\alpha t_2} = T_1\sqrt{1+\alpha t_2}$.

13.19. Железный маятник при температуре 30 °C имеет период колебаний 1 с. При какой температуре период колебаний маятника уменьшается на 10^{-4} с? $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}.

Ответ: $t_2 = 13,3$ °C.

Решение. Периоды колебаний маятника при температуре t_1 и t_2 соответственно равны $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = T_1(1 - \frac{1}{n})$, где l_1 и l_2 — длины маятников при температурах t_1 и t_2. Тогда $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = \frac{n-1}{n}$ или $\frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{l_2}{l_1}$. С другой стороны $\frac{l_2}{l_1} = \frac{l_0(1+\alpha t_2)}{l_0(1+\alpha t_1)} = 1 + \alpha(t_2 - t_1)$.

Поэтому $\frac{(n-1)^2}{n^2} = 1 + \alpha(t_2 - t_1)$. Откуда следует, что $t_2 = \frac{(n-1)^2}{n^2} + t_1 - \frac{1}{\alpha}$.

13.20. На сколько часы будут уходить вперед за сутки при $t_0 = 0$ °C, если они выверены при $t_1 = 20$ °C и материал, из которого сделан маятник, имеет коэффициент линейного расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}?

Ответ: $\tau = 10{,}4$ с.

Решение. Отношение периодов колебаний маятника при 0 °C и 20 °C будет равно $\frac{T_1}{T_0} = \sqrt{\frac{l_1}{l_0}} = \sqrt{1+\alpha t} = 1 + \frac{\alpha t}{2}$, где $l_0 = \frac{l_1}{1+\alpha t}$ — длина маятника при 0 °C. За сутки маятник сделает $n = \frac{24 \cdot 3600}{T_1}$ колебаний и уйдет вперед на $\tau = n\Delta T = n(T_1 - T_0)$ секунд.

13.21. Толщина биметаллической пластинки, составленной из одинаковых полосок стали и цинка, равна $a = 0{,}1$ см. Определите радиус кривизны пластинки при повышении температуры на $\Delta t = 11$ °C. Коэффициент линейного расширения цинка $\alpha_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}, стали — $\alpha_2 = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}.

Ответ: $R = 3{,}2$ м.

Указание. $l_1 = l_0(1 + \alpha_1\Delta t)$, а $l_2 = l_0(1 + \alpha_2\Delta t)$. Но $l_1 = (R - \frac{d}{2})\beta$, а $l_2 = (R + \frac{d}{2})\beta$, $R = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1 + \alpha_2\Delta t}{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t}$.

13.22. К резиновому шнуру прикреплен шарик массой 50 г. На сколько удлинится шнур при вращении шарика со скоростью 180 об/мин? Длина шнура в нерастянутом состоянии 30 см. Растяжение считать пропорциональным приложенной силе. Под влиянием силы, равной 10 Н, шнур растягивается на 1 см.

Ответ: $\Delta l = 5{,}5 \cdot 10^{-3}$ м.

Решение. Согласно закону Гука $F_{упр} = -k\Delta l$, где k — жесткость упругого тела, Δl — удлинение шнура. Сила упругости сообщает шарику центростремительное ускорение $a_ц = -\frac{v^2}{l + \Delta l}$. Тогда $k\Delta l = \frac{mv^2}{l + \Delta l}$, где $v = \omega(1 + \Delta l) = 2\pi n(1 + \Delta l)$. Отсюда $\Delta l = \frac{4\pi^2 n^2 ml}{k - 4\pi^2 n^2 m}$.

13.23. К проволоке был подвешен груз. Затем проволоку согнули вдвое и подвесили тот же груз. Сравните абсолютное и относительное удлинение проволоки в обоих случаях.

Ответ: $\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = 4$, $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 2$.

Решение. Согнутая вдвое проволока имеет в два раза меньшую длину и в 2 раза большую площадь поперечного сечения. Механическое напряжение $\sigma_1 = \frac{F}{S_1}$. По закону Гука $\sigma_1 = E\varepsilon_1$, $\frac{F}{S_1} = E\varepsilon_1$; $\varepsilon_1 = \frac{F}{ES_1}$. Аналогично $\varepsilon_2 = \frac{F}{ES_2}$. Тогда $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{S_2}{S_1}$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 2$. По определению $\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2}$, откуда следует: $\Delta l_1 = \varepsilon_1 l_1$; $\Delta l_2 = \varepsilon_2 l_2$. $\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{\varepsilon_1 l_1}{\varepsilon_2 l_2} = \frac{2\varepsilon_2 \cdot 2l_2}{\varepsilon_2 l_2}$.

13.24. Во сколько раз изменится абсолютное удлинение проволоки, если, не изменяя нагрузку, заменить ее проволокой из того же материала, но имеющей вдвое большую длину и в 2 раза больший диаметр?

Ответ: $\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{1}{2}$.

Решение. См. решение предыдущей задачи. $\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{\varepsilon_2 l_2}{\varepsilon_1 l_1}$; $\varepsilon = \frac{F}{ES}$, $S = \pi\frac{d^2}{4}$, тогда $\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{S_1 l_2}{S_2 l_1} = \frac{d_1^2 l_2}{d_2^2 l_1} = \frac{d_1^2 2l_1}{4d_1^2 l_1} = \frac{1}{2}$.

13.25. В современном строительстве часто в качестве несущих частей используют железобетонные колонны. Для чего нужна железная арматура?

Ответ: Арматура нужна для придания колонне прочности, для увеличения сопротивления деформации сжатия. Деформация не приведет к разрушению, если сжатие бетона и арматуры одинако-

во (что имеет место при стальной арматуре) и если нагрузка не превосходит предела их упругости.

13.26. На железный цилиндр плотно надето серебряное кольцо при комнатной температуре. Что надо сделать, чтобы кольцо можно было снять?

Ответ: Надо нагреть одновременно цилиндр и кольцо.

13.27. На железобетонную колонну высотой $h = 10 м$ действует сила $F = 4 \cdot 10^6$ Н. Найдите деформацию колонны, если площадь поперечного сечения колонны, занятая бетоном, $S_б = 0,09 м^2$; площадь, занятая стальной арматурой, $S_{ст} = 0,01 S_б$; модуль упругости бетона $E_б = 0,1 E_{ст}$. Массой колонны пренебречь.

Ответ: $\Delta l = 2,02$ см.

Решение. Сила, действующая на железобетонную колонну, $F = F_1 + F_2$, где F_1 — сила, действующая на бетон, F_2 — сила, действующая на стальную арматуру. Из закона Гука $\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{E_1 S_1}$, $\Delta l_2 = \frac{F_2 l}{E_2 S_2}$. Так как $\Delta l_1 = \Delta l_2$, то $F_1 = \frac{\Delta l E_1 S_1}{l}$, $F_2 = \frac{\Delta l E_2 S_2}{l}$. Тогда $F = \frac{\Delta l}{l}(E_1 S_1 + E_2 S_2)$, откуда $\Delta l = \frac{Fl}{E_1 S_1 + E_2 S_2}$; или $\Delta l = \frac{Fl}{E_б S_б + E_{ст} S_{ст}} = \frac{Fl}{0,1 E_{ст} \cdot S_б + E_{ст} \cdot 0,01 S_б}$.

13.28. Медную проволоку сечением S, длиной l_1 и стальную проволоку такого же сечения и длиной l_2 соединили между собой так, что общая длина проволоки $l = l_1 + l_2$. Какую силу F надо приложить к этой проволоке, чтобы увеличить ее длину на q процентов? Модуль Юнга для меди E_1, для стали E_2.

Ответ: $F = \frac{q \cdot S E_1 E_2 (l_1 + l_2)}{E_2 l_1 + E_1 l_2}$.

Решение. Относительное удлинение проволоки $\frac{\Delta l}{l} \cdot 100\% = q$, где $l = l_1 + l_2$. Абсолютное удлинение $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$, где Δl_1 и Δl_2 — абсолютное удлинение медной и стольной проволок соответственно. Относительные удлинения каждой из проволок равны $\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{F}{E_1 S}$, $\frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{F}{E_2 S}$. Откуда следует: $\Delta l_1 = \frac{F l_1}{E_1 S}$, $\Delta l_2 = \frac{F l_2}{E_2 S}$. Тогда $\Delta l = \frac{F}{S}(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2})$, а $q = \frac{F}{S}\frac{(E_2 l_1 + E_1 l_2)}{E_1 E_2 (l_1 + l_2)}$. Отсюда находим F.

13.29. Определите потенциальную энергию упругой деформации стальной проволоки, растянутой на $\Delta l = 0,01 м$. Площадь поперечного сечения проволоки $S = 3 мм^2$, начальная длина $l = 2 м$. $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Ответ: $W^п = 15$ Дж.

Решение. Потенциальная энергия упругой деформации $W^п = \frac{k \Delta l^2}{2}$. Жесткость стали находится из закона Гука $k = \frac{F}{\Delta l}$. Относительное удлинение проволоки $\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{ES}$. Тогда $W^п = \frac{ES \Delta l^2}{2l}$.

13.30. Медная проволока длиной $l = 1,5$ м и сечением $S = 0,2 см^2$ при растяжении удлинилась на $q = 0,01$ своей начальной длины. Найдите работу растяжения проволоки. $E = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па.

Ответ: $A = 180$ Дж.

Решение. Работа растяжения проволоки A равна потенциальной энергии упругой деформации $A = \frac{k \Delta l^2}{2}$, где k — жесткость меди, Δl — абсолютное удлинение проволоки. Из закона Гука $k = \frac{F}{\Delta l}$. Если учесть, что $q = \frac{\Delta l}{l}$, то $k = \frac{F}{ql}$, а относительное удлинение $\frac{\Delta l}{l} = q = \frac{F}{ES}$. Откуда $F = qES$. Тогда $A = \frac{qESq^2 l^2}{2ql} = \frac{ESlq^2}{2}$.

13.31. Чему равно удлинение латунного стержня длиной 4 м, имеющего площадь сечения $0,4 см^2$, под действием силы 1 кН? $E = 0,9 \cdot 10^{11}$ Па.

Ответ: $\Delta l = 1,1 \cdot 10^{-3}$ м.

Решение. По закону Гука абсолютное удлинение тела $\Delta l = \frac{1}{E}\sigma l_0 = \frac{F l_0}{ES}$, где E и σ — модуль Юнга и напряжение латуни.

13.32. Какая требуется сила F, чтобы стальной стержень длиной $l = 1$ м с площадью поперечного сечения $S = 1 см^2$ удлинить на $\Delta l = 1$ мм? При какой наименьшей нагрузке F_{min} стержень разорвется, если предел прочности стали $\sigma_{пр} = 7,85 \cdot 10^8$ Па? $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Ответ: $F = 2 \cdot 10^4$ Н; $F_{min} = 78,5$ кН.

Решение. Согласно закону Гука относительное удлинение стержня $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\cdot\frac{F}{S}$, где E — модуль Юнга стали. Тогда $F = \frac{E\Delta l S}{l} = 2\cdot 10^4$ Н. Предельная нагрузка, то есть сила, при которой разорвется стержень, $F_{min} = \sigma_{пр}S$, где $\sigma_{пр}$ — предельное механическое напряжение.

13.33. Стальной брус вплотную помещен между каменными неподвижными стенами при 0 °С. Найти напряжение материала бруса при 20 °С. $\alpha = 1{,}1\cdot 10^{-5}\ К^{-1}$, $E = 2\cdot 10^{11}$ Па.

Ответ: $\sigma = 44$ МПа.

Решение. После нагревания свободного бруса на ΔT его длина будет равна $l = l_0(1+\alpha\Delta T)$, а $\Delta l = l - l_0 = l_0\alpha\Delta T$, где α — коэффициент линейного расширения стали, l_0 — длина бруса при T_0. Из закона Гука следует, что напряжение бруса при $T = 293$ К $\sigma = \frac{E\Delta l}{l_0}$, где E — модуль Юнга для стали. Тогда $\sigma = \frac{E\alpha l_0\Delta T}{l_0} = E\alpha(T - T_0)$.

13.34. Почему резцы не изготовляют из стекла, твердость которого равна твердости инструментальной стали?

Ответ: Стекло обладает низкой прочностью на растяжение (изгиб) при комнатной температуре по сравнению со сталью.

14. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

14.1. Во сколько раз изменится давление газа при уменьшении его объема в 3 раза? Средняя скорость движения молекул остается неизменной.

Ответ: $p_2/p_1 = 3$.

Решение. В соответствии с основным уравнением МКТ $p = \frac{nm_0\overline{v^2_{кв}}}{3}$. Концентрация газа $n = N/V$. По условию задачи $V_1/V_2 = 3$, тогда $p_2/p_1 = n_2/n_1 = NV_1/NV_2 = 3$.

14.2. Сравните давление кислорода и водорода при одинаковых концентрациях молекул и равных средних квадратичных скоростях их движения.

Ответ: $p(O_2)/p(H_2) = 16$.

Решение. Воспользуйтесь основным уравнением МКТ $p = \frac{nm_0\overline{v^2_{кв}}}{3}$, учитывая, что масса одной молекулы $m_0 = M/N_A$. Тогда $p(O_2)/p(H_2) = M(O_2)/M(H_2) = 16$.

14.3. Найдите давление азота, если средняя квадратичная скорость его молекул 300 м/с, а его плотность 1,35 кг/м³.

Ответ: $p = 40$ кПа.

Решение. Основное уравнение МКТ $p = \frac{nm_0\overline{v^2_{кв}}}{3}$, концентрация азота $n = N/V$, масса $m = N\cdot m_0$, плотность $\rho = m/V$, тогда $p = \frac{\rho\overline{v^2_{кв}}}{3} = 40$ кПа.

14.4. Какова средняя квадратичная скорость движения молекул газа, если он имеет массу 6 кг, объем 5 м² при давлении 200 кПа?

Ответ: $\overline{v}_{кв} = 700$ м/с.

Указание. См. предыдущую задачу. $\overline{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3Vp}{m}} = 700$ м/с.

14.5. Найдите концентрацию молекул кислорода, если при давлении 0,2 МПа он имеет среднюю квадратичную скорость 700 м/с.

Ответ: $n = 2{,}5\cdot 10^{25}\ м^{-3}$.

Указание. Воспользуйтесь основным уравнением МКТ.

14.6. Найдите среднюю кинетическую энергию молекулы одноатомного газа при давлении 20 кПа. $n = 3\cdot 10^{25}\ м^{-3}$.

Ответ: $\overline{E} = 10^{-21}$ Дж.

Решение. Из основного уравнения МКТ $p = \frac{nm_0\overline{v^2_{кв}}}{3}$. $\overline{E} = \frac{m_0\overline{v^2_{кв}}}{2}$, $p = \frac{2}{3}n\overline{E}$, откуда $\overline{E} = \frac{3p}{2n} = 10^{-21}$ Дж.

14.7. Во сколько раз измениться давление одноатомного газа в результате уменьшения его объема в 3 раза и увеличения средней кинетической энергии его молекул в 2 раза?

Ответ: $p_2/p_1 = 6$.

Решение. Основное уравнения МКТ в данном случае будет выглядеть как $p = \frac{2}{3}n\overline{E}$, $n = N/V$, $p = \frac{2}{3}\cdot\frac{N}{V}\overline{E}$, следовательно, $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\overline{E}_2}{\overline{E}_1}\cdot\frac{V_1}{V_2}$.

14.8. Определите среднюю квадратичную скорость молекул кислорода при 20 °С. $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Ответ: $\bar{v}_{кв} = 480$ м/с.

Решение. Средняя кинетическая энергия одной молекулы $\bar{E} = \frac{m_0\overline{v^2_{кв}}}{2}$. Согласно МКТ $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$. Масса одной молекулы $m_0 = M/N_A$. Отсюда $\bar{v}_{кв} = \sqrt{3kTN_A/M} = \sqrt{3RT/M}$.

14.9. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода равна 500 м/с?

Ответ: $T = 320$К.

Указание. См. предыдущую задачу $T = \frac{\overline{v^2_{кв}}M}{3R} = 320$ К.

14.10. Найдите среднюю квадратичную скорость молекул воздуха при 17 °С, $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $\bar{v}_{кв} = 500$ м/с.

Указание. См. задачу 14.8.

14.11. Найдите отношение средних квадратичных скоростей молекул гелия и азота при одинаковых температурах.

Ответ: $\bar{v}_{1_{кв}}/\bar{v}_{2_{кв}} = 2{,}65$.

Указание. См. задачу 14.8.

14.12. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа равна 450 м/с. Давление газа $5 \cdot 10^4$ Па. Найдите плотность газа.

Ответ: $\rho = 0{,}74$ кг/м^3.

Решение. Основное уравнение МКТ $p = \frac{nm_0\overline{v^2_{кв}}}{3}$, $n = N/V$, $m_0 = m/N$. Тогда $\rho = \frac{3p}{\overline{v^2_{кв}}} = 0{,}74$ кг/м^3.

14.13. Найдите импульс молекулы водорода при температуре 20 °С. Скорость молекулы считать равной средней квадратичной скорости.

Ответ: $p = 6{,}3 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с.

Решение. Импульс молекулы $p = m_0\bar{v}_{кв}$; $m_0 = M/N_A$, $\bar{v}_{кв} = \sqrt{3RT/M}$. Тогда $p = \sqrt{3RTM}/N_A = 6{,}3 \cdot 10^{-24}$ кг м/с.

14.14. При какой температуре средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул будет равна $6{,}21 \cdot 10^{-21}$ Дж? $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Ответ: $T = 300$ К.

Решение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$. Откуда $T = \frac{2\bar{E}}{3k} = 300$ К.

14.15. При какой температуре средняя кинетическая энергия молекул одноатомного газа будет втрое больше чем при температуре -53 °С?

Ответ: $T_2 = 660$ К.

Решение. См. решение задачи 14.14. $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_1}$, $T_2 = 3T_1 = 600$ К.

14.16. Во сколько раз увеличится кинетическая энергия молекул газа при увеличении его температуры от 12 до 36 °С?

Ответ: в 3 раза.

Указание. См. решение задачи 14.14. $E_2/E_1 = T_2/T_1 = 3$.

14.17. Найдите давление газа, концентрация которого при температуре 300 К равна 10^{24} м$^{-3}$.

Ответ: $p = 4{,}1$ кПа.

Решение. Основное уравнение МКТ $p = \frac{2}{3}n\bar{E}$, $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$, $p = nkT = 4{,}1$ кПа.

14.18. Найдите концентрацию молекул одноатомного газа при температуре 290 К и давления 0,8 МПа.

Ответ: $n = 2 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$.

Решение. Давление и концентрация связаны соотношением $p = nkT$, $n = p/kT = 2 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$.

14.19. Найдите температуру газа при давлении 100 кПа и концентрации 10^{25} м^3.

Ответ: $T = 725$ К.

Указание. См. решение задачи 14.17.

14.20. Определите среднюю кинетическую энергию молекул одноатомного газа с концентрацией $2 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$ при давлении 0,8 МПа.

Ответ: $6 \cdot 10^{-21}$ Дж.

Решение. Средняя кинетическая энергия молекул газа $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$. Давление $p = nkT$. Откуда $\bar{E} = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{n} = 6 \cdot 10^{-21}$ Дж.

14.21. Найдите число молекул n_0 в единице объема газа при нормальных условиях. Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: $n_0 = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ (постоянная Лошмидта).

Решение. Число молекул в единице объема газа (концентрация молекул) $n=\frac{N}{V}$. Количество вещества $\nu=\frac{N}{N_A}=\frac{V}{V_{0\mu}}$, где $V_{0\mu}$ — объем, занимаемый 1 молем газа при нормальных условиях. $V_{0\mu}=22{,}4\cdot10^{-3}$ м³/моль. Тогда $\frac{N}{V}=\frac{N_A}{V_{0\mu}}$ и $n_0=\frac{N_A}{V_{0\mu}}=2{,}7\cdot10^{5}$ м⁻³.

14.22. В цилиндре под поршнем находится газ при нормальных условиях. Сначала объем газа увеличивали в $k=10$ раз, затем газ нагрели при постоянном давлении до температуры $t=127$ °С. Найдите число молекул n в единице объема газа в конечном состоянии.

Ответ: $n=1{,}83\cdot10^{-24}$ м⁻³.

Решение. Объем, занимаемой газом при нормальных условиях $V_0=V_{0\mu}\frac{N}{N_A}$. Увеличение объема в k раз соответствует уменьшению давления в k раз $p_0V_0=pkV_0$, то есть $V=kV_0$, а $p=\frac{p_0}{k}$. При изобарном процессе нагрев газа сопровождается его расширением $\frac{PV}{T_0}=\frac{PV_1}{T_1}$ или $\frac{kV_{0\mu}N}{T_0N_A}=\frac{V_1}{T}$, отсюда $V_1=\frac{kV_{0\mu}NT}{N_AT_0}$, а $n=\frac{N}{V_1}=\frac{N_AT_0}{kV_{0\mu}T}=1{,}83\cdot10^{-24}$ м⁻³.

14.23. Диаметр молекулы азота $d=0{,}3$ нм. Считая, что молекулы имеют сферическую форму, найдите, какая часть объема, занимаемого газом, приходится на объем самих молекул при нормальных условиях ($T_0=273$К, $p_0=0{,}1$ МПа), а также при давлении $p=500p_0$. Считать, что при этих давлениях газ не отличается от идеального.

Ответ: $\frac{V}{V_{0\mu}}=0{,}038$ %; $\frac{V}{V_\mu}=19$ %.

Решение. Один моль азота при нормальных условиях занимает объем $V_{0\mu}=22{,}4\cdot10^{-3}$ м³/моль, а при давлении p и той же температуре согласно закону Бойля-Мариотта занимает объем $V=\frac{V_{0\mu}p_0}{p}$. В одном моле азота содержится число молекул $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль⁻¹. Объем каждой из них равен $\pi d^3/6$ и их суммарный объем $V=\frac{\pi d^3N_A}{6}$. На объем самих молекул при давлении p_0 приходится часть объема $\frac{V}{V_{0\mu}}=\frac{\pi d^3N_A}{6V_{0\mu}}\cdot100\%=0{,}038\%$, а при давлении p — часть объема

$$\frac{V}{V_\mu}=\frac{\pi d^3N_Ap}{6V_{0\mu}p_0}\cdot100\%=19\%.$$

14.24. В сосуде находится газ при давлении $p=0{,}15$ МПа и температуре $t=273$ °С. Какое число n молекул находится при этих условиях в единице объема сосуда?

Ответ: $n=2\cdot10^{25}$ м⁻³.

Решение. Число молекул в единице объема $n=\frac{N}{V}$. Воспользовавшись уравнением состояния $pV=\frac{N}{N_A}RT$, получим $n=\frac{pN_A}{pT}=2\cdot10^{25}$ м⁻³.

14.25. Какова температура T газа, находящегося под давлением $p=0{,}5$ МПа, если в сосуде объема $V=15$ л содержится $N=1{,}8\cdot10^{24}$ молекул?

Ответ: $T=301$К.

Указание. См. задачу 14.24. $T=\frac{pVN_A}{NR}=301$ К.

14.26. В сосуде объемом $V=1$ л при температуре $t=183$ °С находится $N=1{,}62\cdot10^{22}$ молекул газа. Каково будет давление p газа, если объем сосуда изотермически увеличить в $k_1=5$ раз? Число молекул в единице объема сосуда при нормальных условиях $n_0=2{,}7\cdot10^{25}$ м⁻³.

Ответ: $p_2=20$ кПа.

Указание. Воспользовавшись уравнением состояния $p_1V=\frac{NRT}{N_A}$ и законом Бойля-Мариотта $p_1V=p_2kV$, получим $p_2=\frac{NRT}{N_AVk}=20$ кПа.

14.27. Вычислить среднюю квадратичную скорость атомов гелия при температуре 27 °С.

Ответ: $\bar{v}_{кв}=1370$ м/с.

Решение. Средняя квадратичная скорость молекул идеального газа $\bar{v}_{кв}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=1370$ м/с.

14.28. При повышении температуры идеального газа на $\Delta T_1=150$ К средняя квадратичная скорость его молекул увеличилась с $v_1=400$ м/с до $v_2=500$ м/с. На сколько нужно нагреть этот газ, чтобы увеличить среднюю квадратичную скорость с $u_1=500$ м/с до $u_2=600$ м/с?

Ответ: $\Delta T_2=183$К.

Указание. Из формулы для $\bar{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ выразить T_1, T_2, T_3 и T_4 соответствующим v_1, v_2, u_1, u_2 соответственно. Найдите ΔT_2 и ΔT_1 и взять их отношение. $\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{v_2^2 - v_1^2}$, откуда $\Delta T_2 = \Delta T_1 \cdot \frac{u_2^2 - u_1^2}{v_2^2 - v_1^2} = 183$ К.

14.29. Два одинаковых сосуда, содержащих одинаковое количество молекул азота, соединены краном. В первом сосуде средняя квадратичная скорость молекул равна $v_1 = 400$ м/с, во втором — $v_2 = 500$ м/с. Какая установится скорость, если открыть кран, соединяющий сосуды?

Ответ: $\bar{v}_{кв} = 453$ м/с.

Решение. Давление смеси газов с одинаковым числом частиц и объемом равно $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$, $p = nkT$, т.е. $p \sim T$. Установится температура $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$, $\overline{v_{кв}^2} \sim T$, следовательно, $\overline{v_{кв}^2} = \frac{\overline{v_{кв_1}^2} + \overline{v_{кв_2}^2}}{2}$,

$\bar{v}_{кв} = \sqrt{\frac{\overline{v_{кв_1}^2} + \overline{v_{кв_2}^2}}{2}} = 453$ м/с.

14.30. В закрытом сосуде находится идеальный газ. Как изменится его давление, если средняя квадратичная скорость его молекул увеличится на 20 %?

Ответ: $\Delta p = 44$ %.

Решение. Средняя квадратичная скорость $\bar{v}_1 = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}}$, $\bar{v}_2 = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}}$.

$v_2 = 1{,}2v_1$; $v_2^2 = 1{,}44v_1^2$, следовательно, $\frac{T_2}{T_1} = 1{,}44$. Для изохорного процесса $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}$; $p_2 = 1{,}44p_1$. $\Delta p = p_2 - p_1$, $\Delta p = 0{,}44p_1$.

14.31. Во сколько раз средняя квадратичная скорость молекулы воздуха в летний день при температуре 30 °C больше, чем в зимний день при температуре −30 °C?

Ответ: $\bar{v}_{кв_1}/\bar{v}_{кв_2} = 1{,}12$.

Решение. $\bar{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, тогда $\frac{\bar{v}_{кв_1}}{\bar{v}_{кв_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 1{,}12$.

14.32. Какая температура соответствует средней квадратичной скорости молекул углекислого газа $v = 720$ км/ч?

Ответ: $T = 71$ К.

Указание. См. задачу 14.27. $T = \frac{mv^2}{3R} = 71$ К.

14.33. Кислород при температуре 77 °C и давлении 0,2 МПа занимает объем 10 л. Какова его масса?

Ответ: $m = 22$ г.

Решение. Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$ следует $m = \frac{pVM}{RT} = 22$ г.

14.34. Два моля газа находятся в баллоне, объем которого 35 л под давлением 10^5 Па. Какова температура газа?

Ответ: T = 211 К.

Решение. Из уравнения состояния $pV = \nu RT$, где ν — число молей, равное $\nu = \frac{m}{M}$, следует $T = \frac{pV}{R\nu} = 211$ К.

14.35. Какое количество вещества находится в газе, если при давлении 200 кПа и температуре 240 К его объем равен 0,04 м³?

Ответ: $\nu = 4$ моля.

Решение. $pV = \frac{m}{M}RT$, где $\frac{m}{M} = \nu$. Тогда $\nu = pV/RT = 4$ моля.

14.36. До какого давления сжат воздух массой 2 кг, находящийся в баллоне объемом 0,02 м³, при температуре 285 К? Молярная масса воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $p = 8{,}2 \cdot 10^6$ Па.

Решение. Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$ следует $p = \frac{m}{MV}RT = 8{,}2 \cdot 10^6$ Па.

14.37. Найдите массу природного газа объемом 64 м³, считая, что объем указан при нормальных условиях. Молярную массу природного газа считать равной молярной массе метана (CH_4).

Ответ: $m = 45{,}7$ кг.

Решение. При нормальных условиях $p_0 = 101325$ Па, $T = 273$К. Молярная масса $M(CH_4) = M(C) + 4M(H)$. Масса газа $m = \frac{pVM}{RT} = 45{,}7$ кг.

14.38. Какой емкости нужен баллон для содержания в нем 50 молей газа, если при максимальной температуре 360 К давление не должно превышать 6 МПа?

Ответ: $V = 25 \cdot 10^{-3}$ м³.

Решение. $pV = \nu RT$, откуда $V = \nu RT/p = 25 \cdot 10^{-3}$ м³.

14.39. В одинаковых баллонах при одинаковой температуре находятся равные массы водорода и углекислого газа. Какой из газов и во сколько раз производит большее давление на стенки сосуда?

Ответ: Водород, в 22 раза.

Решение. Для водорода $p_1V = \frac{m}{M_1}RT$, для углекислого газа $p_2V = \frac{m}{M_2}RT$. Очевидно $\frac{p_1}{p_2} = \frac{M_2}{M_1} = 2,2$.

14.40. Зная плотность воздуха при нормальных условиях, найдите молярную массу воздуха.

Ответ: M = $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение. $pV = \frac{m}{M}RT$, $m = V\rho$, $M = \frac{\rho RT}{p}$. Давление при нормальных условиях равно $1,013 \cdot 10^5$ Па, температура 273 К.

14.41. Найдите объем некоторой массы газа при нормальных условиях, если при давлении 0,2 МПа и температуре 15 °С газ занимает объем 5 л.

Ответ: $V_2 = 9,4$ л.

Решение. Воспользуйтесь объединенным газовым законом. $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_0V_2}{T_0}$, $V_2 = \frac{p_1V_1T_0}{p_0T_1} = 9,4$ л.

14.42. При увеличении абсолютной температуры идеального газа в 2 раза давление газа увеличилось на 25 %. Во сколько раз изменится объем?

Ответ: Увеличится в 1,6 раз.

Решение. Масса газа не изменяется. $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$; $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1T_2}{p_2T_1} = 1,6$.

14.43. При уменьшении объема газа в 2 раза давление увеличилось на 120 кПа, а абсолютная температура возросла на 10 %. Каким было первоначальное давление?

Ответ: $p_1 = 100$ кПа.

Решение. Масса газа постоянная $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$, $T_2 = T_1 + \Delta T$, где $\Delta T = 0,1T_1$, $p_2 = p_1 + \Delta p$, $p_1 = \frac{\Delta p}{1,2} = 100$ кПа.

14.44. Найдите массу водорода, находящегося в баллоне объемом 20 л под давлением 830 кПа при температуре 17 °С. Молярная масса водорода 0,002 кг/моль.

Ответ: $m = 138$ г.

Решение. Из уравнения состояния идеального газа найдем $m = \frac{MpV}{RT} = 138$ г.

14.45. Открытый сосуд содержит воздух при температуре 17 °С. Какая часть массы воздуха останется в нем при нагревании до температуры 450 °С? Тепловым расширением сосуда пренебречь.

Ответ: $m_2/m_1 = 0,415$.

Решение. $pV = \frac{m_1}{M}RT_1$, $pV = \frac{m_2}{M}RT_2$, $\frac{m_2}{m_1} = \frac{T_1}{T_2} = 0,415$.

14.46. На сколько увеличится масса гелия, находящегося в баллоне объемом 0,2 м³ при давлении 0,1 МПа и температуре 17 °С, если его давление повысить до 0,3 МПа, а температуру до 47 °С? Молярная масса гелия 0,004 кг/моль.

Ответ: $\Delta m = 57$ г.

Решение. $\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{MV}{R}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right) = 57$ г.

14.47. При давлении 1 МПа и температуре 112 °С кислород занимает объем 1600 см³. Найдите его массу.

Ответ: $m = 16$ г.

Решение. $m = \frac{pVM}{RT} = 16$ г.

14.48. Найдите плотность азота при температуре 27 °С и давлении 0,1 МПа. Молярная масса азота 0,028 кг/моль.

Ответ: $\rho = 1,12$ кг/м³.

Указание. Из уравнения состояния $\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT} = 1,12$ кг/м³.

14.49. При каком давлении плотность газообразного азота при температуре –73 °С составляет 0,4 плотности воды, при комнатной температуре равной 10^3 кг/м³?

Ответ: $p = 24$ МПа.

Указание. См. задачу 14.48. $p = \dfrac{0,4RT\rho_0}{M} = 24$ МПа.

14.50. Из баллона со сжатым водородом ёмкостью 10 л вследстви неисправности вентиля утекает газ. При температуре 7 °С маномет показал $5 \cdot 10^5$ Па. Через некоторое время при температуре 17 °С манометр показал такое же давление. Сколько утекло газа?

Ответ: $\Delta m = 1,48$ г.

Решение. $\Delta m = m_1 - m_2 = \dfrac{pVM(T_2 - T_1)}{RT_1T_2} = 1,48$ г.

14.51. По газопроводной трубе сечением 5 см^2 течет углекислый газ при давлении $3,9 \cdot 10^5$ Па и температуре 7 °С. Какова скорость движения газа в трубе, если за 10 минут протекает 2 кг углекислого газа?

Ответ: $\upsilon = 0,9$ м/с.

Решение. $pV = \dfrac{m}{M}RT$, где $V = Sl$, а $\dfrac{l}{\tau} = \upsilon$. Получаем $\upsilon = \dfrac{mRT}{MpS\tau} = 0,9$ м/с.

14.52. Баллон объемом $V_1 = 40$ л содержит сжатый воздух при давлении $p_1 = 15$ МПа и температуре $t_1 = 27$ °С. Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если лодка находится на глубине $h = 20$ м, где температура $t_2 = 7$ °С? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, атмосферное давление $p_0 = 0,1$ МПа.

Ответ: $V = 1,85$ м^3.

Решение. Согласно объединенному газовому закону $\dfrac{p_1V_1}{T_1} = \dfrac{p_2V_2}{T_2}$, после расширения воздух займет объем $V_2 = V + V_1$, а давление на глубине h $p_2 = p_0 + \rho gh$. Тогда $V = \dfrac{p_1V_1T_2}{(p_0 + \rho gh)T_1} - V_1 = 1,85$ м^3.

14.53. Изобразить в координатах $p - V$, $p - T$ и $V - T$ изотермический, изохорный и изобарный процессы.

Решение. См. рис. 14.1.

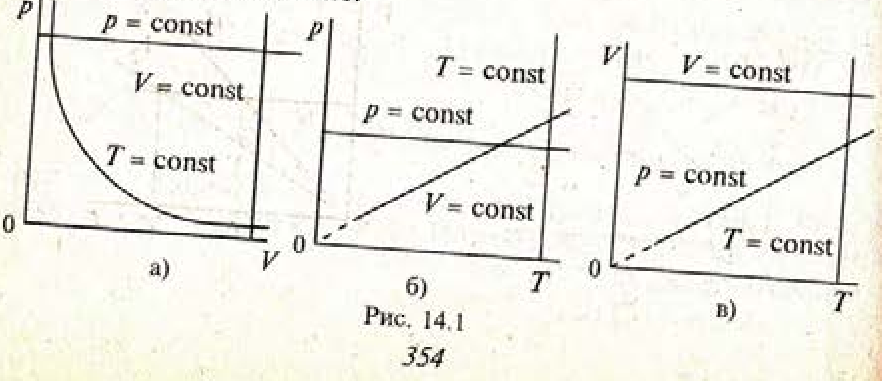


Рис. 14.1

14.54. Какая из изотерм, приведенных на рис. 14.2а, соответствует более высокой температуре?

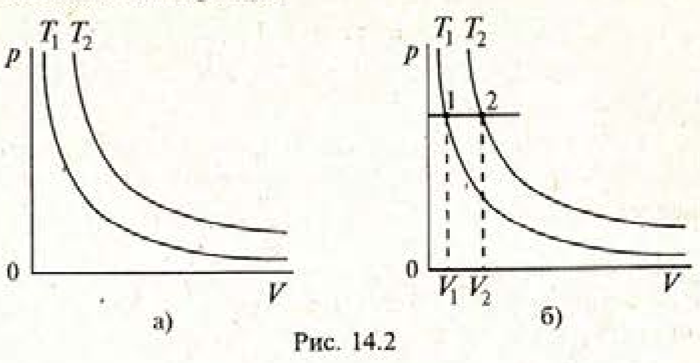


Рис. 14.2

Решение. Проведем изобару до пересечения с изотермами (рис. 14.2б). Для точек 1 и 2 $V_2 > V_1$, следовательно $T_2 > T_1$.

14.55. Покажите графически, какая из проведенных на рис. 14.3а изобар соответствует более высокому давлению.

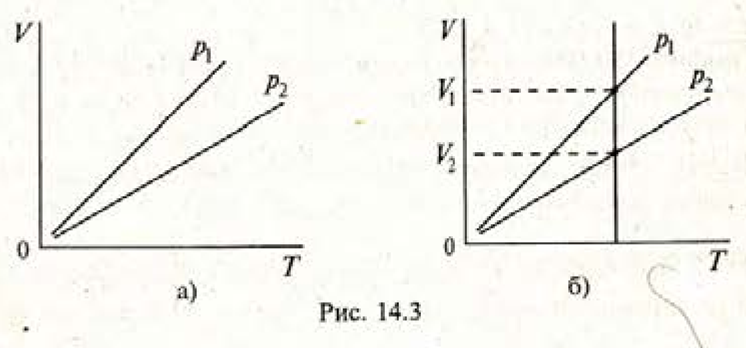


Рис. 14.3

Решение. Проведите изотерму до пересечения с изобарами (рис. 14.3б). Очевидно, $V_1 > V_2$, следовательно, $p_2 > p_1$.

14.56. Какая из приведенных на рис. 14.4а изохор соответствует более высокому объему?

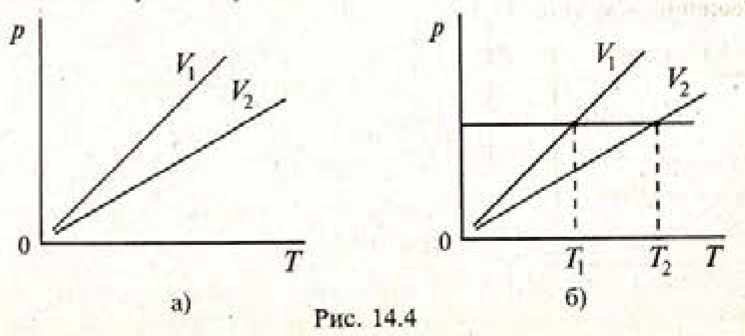


Рис. 14.4

Решение. Проведите изобару до пересечения с изохорами (рис. 14.4б). $T_2 > T_1$, следовательно, $V_2 > V_1$.

14.57. Как по графику, приведенному на рис. 14.5а, определить характер изменения температуры газа? График симметричен относительно начала координат.

Ответ: Температура повышалась от точки 1 до точки 3, затем падала до первоначальной температуры в точке 2.

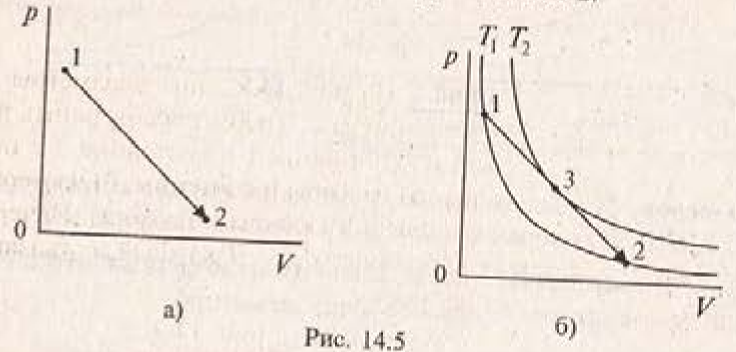


Рис. 14.5

Решение. Проведем изотерму через точки 1 и 2. Все последующие изотермы будут пересекать график в двух точках и только одна коснется графика в точке 3 (рис. 14.5б).

14.58. По графикам, приведенным на рис. 14.6а, 14.6б, определите как изменится объем идеального газа при переходе из состояния 1 в состояние 2.

Ответ: а) объем увеличивается; б) объем уменьшается.

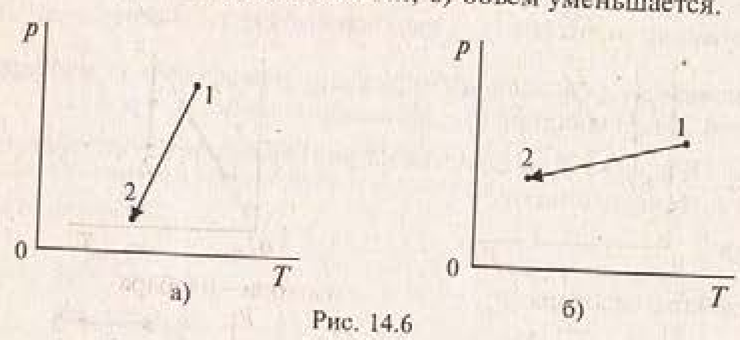


Рис. 14.6

Указание. Через точки 1 и 2 провести изохоры.

14.59. Как изменялось давление идеального газа при переходе из состояния 1 в состояние 2 (рис. 14.7).

Указание. Через точки 1 и 2 проведите изобары. Убедитесь, что в первом случае давление увеличивалось, а во втором — уменьшалось.

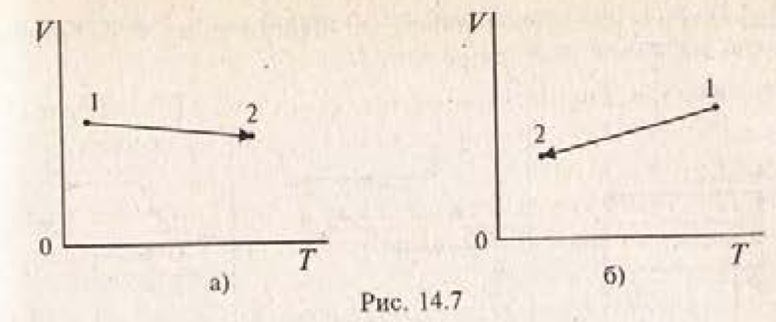


Рис. 14.7

14.60. На рис. 14.8 даны параметры двух состояний газа. Требуется совершить переход из состояния 1 в состояние 2 с помощью: а) изобары и изотермы; б) изотермы и изохоры; в) изобары и изохоры. Начертить в координатах $p - T$ каждый из указанных переходов.

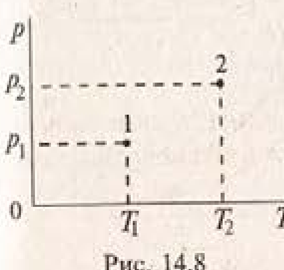
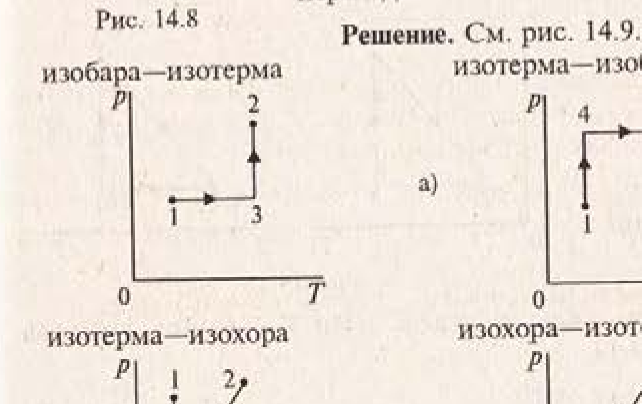
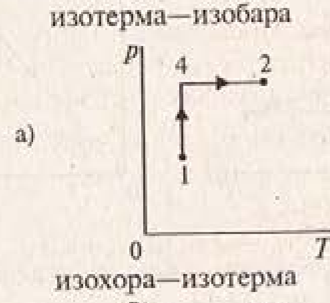
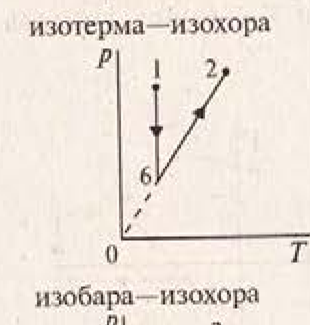


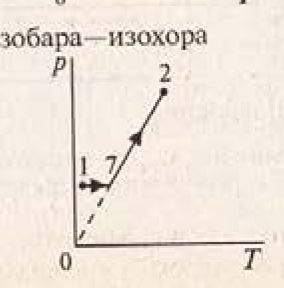
Рис. 14.8

Решение. См. рис. 14.9.









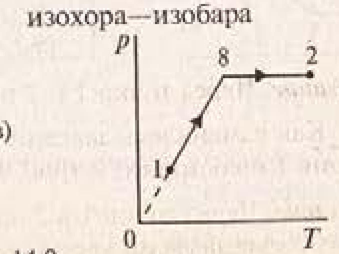


Рис. 14.9

14.61. На рис. 14.10 представлен замкнутый цикл. Начертите диаграмму в координатах $p - T$ и $V - T$.

Решение. См. рис. 14.11.

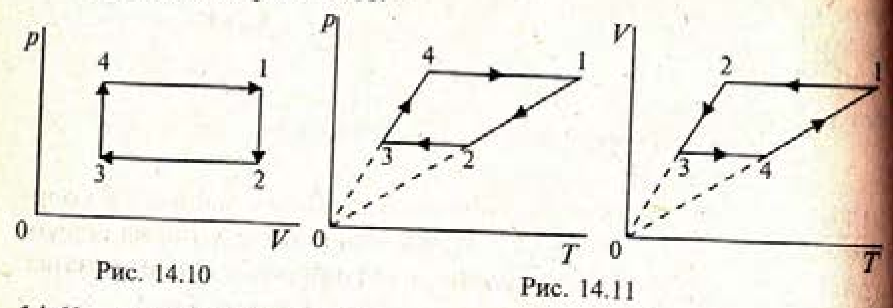


Рис. 14.10 Рис. 14.11

14.62. На рис. 14.12 изображен замкнутый цикл, состоящий из изохоры, изобары и изотермы. Представьте этот цикл координатами $p - T$ и $V - T$.

Решение. См. рис. 14.13.

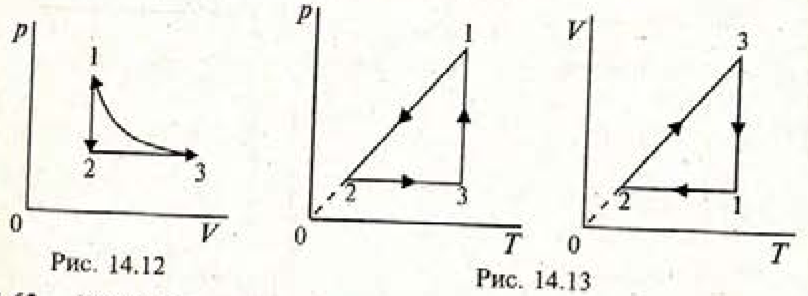


Рис. 14.12 Рис. 14.13

14.63. Изобразите в координатах $p - V$ и $V - T$ цикл, представленный на рис. 14.14.

Решение. См. рис. 14.15.

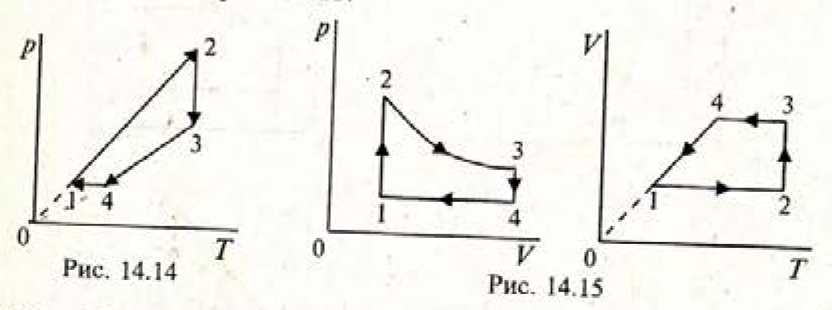


Рис. 14.14 Рис. 14.15

14.64. Изобразите в координатах $p - T$ и $p - V$ цикл, представленный на рис. 14.16.

Решение. См. рис. 14.17.

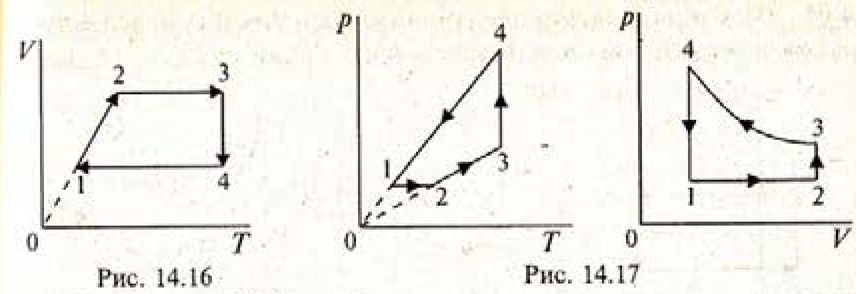
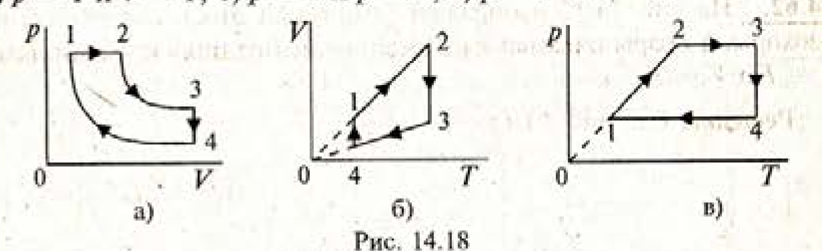


Рис. 14.16 Рис. 14.17

14.65. На рис. 14.18 изображены три круговых процесса в координатах $p - V$, $V - T$ и $p - T$. Криволинейные участки на первом рисунке — изотермы. Изобразите те же процессы в координатах: а) $p - T$ и $V - T$; б) $p - V$ и $p - T$; в) $p - V$ и $V - T$.



а) б) в)

Рис. 14.18

Решение. См. рис. 14.19.

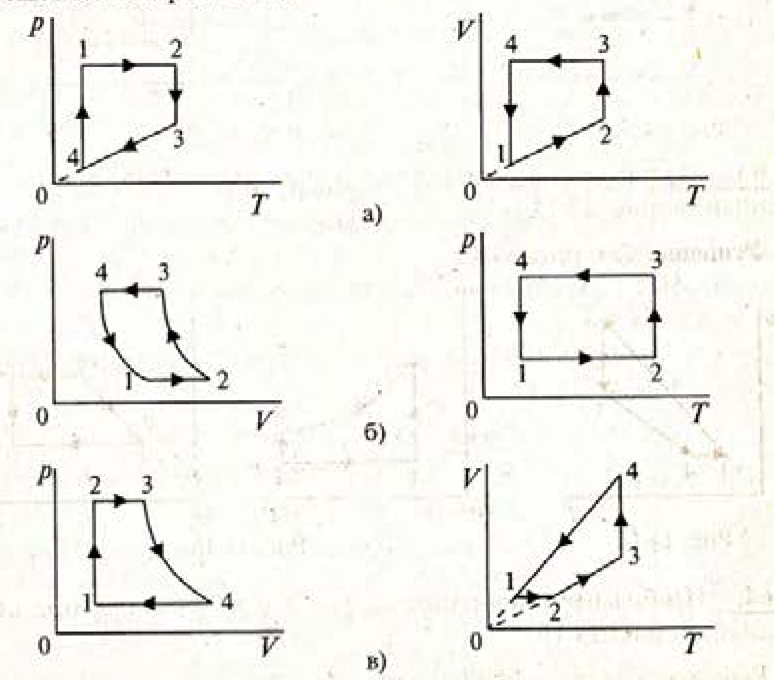


Рис. 14.19

14.66. Как менялась температура идеального газа при процессе, график которого в координатах $p - V$ изображен на рис. 14.20а?

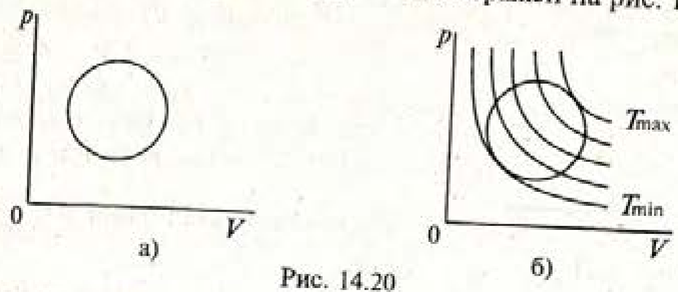


Рис. 14.20

Указание. Нарисовав семейство гипербол (рис. 14.20б), находим ответ.

14.67. С некоторой массой идеального газа был произведен замкнутый процесс, изображенный на рис. 14.21а. Объясните, как изменился объем газа при переходах 1—2, 2—3, 3—4, 4—1.

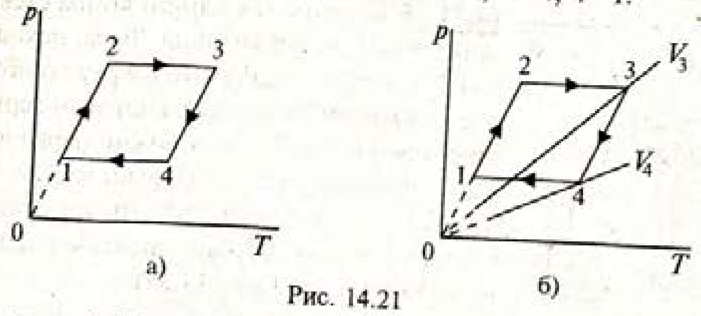


Рис. 14.21

Решение. 1—2 — процесс изохорный, $V_1 = V_2$.

2—3 — процесс изобарный, температура увеличивается, увеличивается и объем $V_3 > V_2$.

3—4, построим изохоры, проходящие через точки 3 и 4; $V_4 > V_3$ (см. задачу 14.56).

4—1 — процесс изобарный, температура уменьшается, уменьшается и объем $V_1 < V_4$.

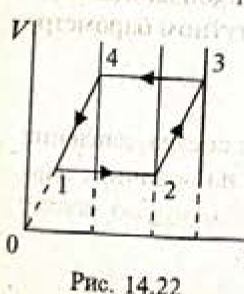


Рис. 14.22

14.68. По графику, приведенному на рис. 14.22, определите как изменялась температура идеального газа.

Решение. 1—2 — процесс изохорный, $T_2 > T_1$.

2—3, проведем изотермы через точки 2 и 3; $T_3 > T_2$.

3—4, $T_4 < T_3$ и $T_1 < T_4$.

14.69. При расширении газа при постоянной температуре была получена зависимость p от V, приведенная на рис. 14.23. Что происходило с газом?

Рис. 14.23

Ответ: Масса газа увеличивалась.

Решение. Если бы масса газа была постоянной, график имел бы вид гиперболы, а поскольку при $T = \text{const}$ растут и p и V, то согласно уравнению состояния $pV = \frac{m}{M}RT$ m — растет.

14.70. При изобарном нагревании была получена зависимость V от T, изображенная на рис. 14.24. Что происходило с газом?

Рис. 14.24

Ответ: Уменьшалась масса газа.

Указание. См. предыдущую задачу.

14.71. В запаянной с одного конца стеклянной трубке, длина которой 70 см, находится столбик воздуха, запертый сверху столбиком ртути высотой 20 см, доходящим до верхнего края трубки. Трубку осторожно переворачивают, причем часть ртути выливается. Найдите высоту оставшегося в трубке столбика ртути, если атмосферное давление равняется $p_0 = 75$ см рт. ст. (рис. 14.25).

Рис. 14.25

Ответ: $x = 3{,}6$ см.

Решение. $p_1V_1 = p_2V_2$. Так как в задаче речь идет о ртути, то представив давление в см рт. столба, имеем: $p_1 = p_0 + h$; $p_2 = p_0 - x$; $V_1 = (l - h)s$, $V_2 = (l - x)s$. $(p_0 + h)(l - h) = (p_0 - x)(l - x)$. Откуда находим x.

14.72. Стеклянную трубку длиной $L = 10$ см на 1/3 погружают в ртуть. Затем ее закрывают пальцем и вынимают. Какой длины столбик ртути останется в трубке? Столбик ртути в ртутном барометре находится на высоте $H = 75$ см.

Ответ: $x = 3{,}1$ см.

Указание. После того как трубку вынимают из сосуда, давление воздуха в ней становится меньше атмосферного на величину давления оставшегося в трубке столбика ртути. Поэтому, по закону Бойля-Мариотта $(L - x)(H - x) = H\frac{2}{3}L$.

14.73. Барометрическая трубка опущена в вертикальный сосуд с ртутью. Столб ртути в трубке имеет высоту $h_1 = 40$ мм, а столб воздуха над ртутью $h_2 = 19$ см. На сколько надо опустить трубку, чтобы столбики ртути оказались на одном уровне? Ртуть в ртутном барометре находится на высоте $H = 76$ см.

Ответ: $\Delta h = 5$ см.

Указание. Из закона Бойля-Мариотта следует, что $(H - h_1)h_2 = H(h_1 + h_2 - \Delta h)$. Откуда $\Delta h = (Hh_1 + h_1h_2)/H = 5$ см.

14.74. Электрическая лампочка емкостью $V = 0,5$ л наполнена азотом при давлении $p = 76$ кПа. Какое количество воды войдет в лампу, если у нее отломить кончик под водой на глубине $h = 1,4$ м? Атмосферное давление нормальное.

Ответ: $m = 0,17$ кг.

Решение. Давление газа в баллоне лампочки после заполнения части баллона водой станет равным $p_0 + \rho gh$, а объем $V - \dfrac{m}{\rho}$. Считая процесс изотермическим и воспользовавшись законом Бойля-Мариотта, получим $pV = (p_0 + \rho gh)(V - \dfrac{m}{\rho})$, откуда найдем

$$m = \rho\frac{V(p_0 + \rho gh) - pV}{p_0 + \rho gh} = 0,17 \text{ кг}.$$

14.75. Газ сжат изотермически от объема $V_1 = 8$ л до объема $V_2 = 6$ л. Давление при этом возросло на $\Delta p = 4$ кПа. Каким было первоначальное давление p_1?

Ответ: $p_1 = 12$ кПа.

Решение. Согласно закону Бойля-Мариотта $p_1V_1 = (p_1 + \Delta p)V_2$. Отсюда $p_1 = \dfrac{\Delta pV_2}{V_1 - V_2} = 12$ кПа.

14.76. Каково давление газа в цилиндре под поршнем, если поршень удерживается в равновесии при помощи стержня, вдоль которого действует сила $F = 9,8$ Н (рис. 14.26)? Площадь поршня $S = 7$ см². Стержень составляет с нормалью к поршню угол $\alpha = 30°$. Атмосферное давление $p_0 = 0,1$ МПа. Трением пренебречь.

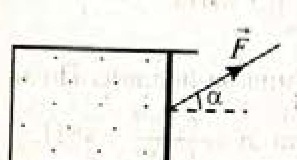


Рис. 14.26

Ответ: $p = 110$ кПа.

Решение. $p = p_0 + \dfrac{F\cos\alpha}{S} = 110$ кПа.

14.77. В баллоне объемом $V = 10$ л находится кислород, масса которого $m = 12,8$ г. Давление в баллоне измеряется U-образным манометром, заполненным водой. Какова разность уровней Δh воды в трубках манометра при температуре газа $t = 27$ °С? Атмосферное давление $p_0 = 0,1$ МПа. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³, молярная масса кислорода $M = 0,032$ кг/моль.

Ответ: $\Delta h = 2,9$ см.

Решение. Согласно закону Менделеева-Клапейрона давление в сосуде $p = \dfrac{m}{MV}RT$. Измеренное U-образным манометром оно равно $p = p_0 + \rho g\Delta h$, где Δh — разность уровней воды в трубках манометра. Тогда $\dfrac{m}{MV}RT = p_0 + \rho g\Delta h$. Откуда следует $\Delta h = \dfrac{mRT - MVp_0}{MV\rho g} = 2,9$ см.

14.78. В цилиндре под поршнем массой $m = 6$ кг со скошенной внутренней поверхностью находится воздух. Площадь сечения цилиндра $S_0 = 20$ см². Атмосферное давление $p_0 = 0,1$ МПа. Найдите массу M груза, который надо положить на поршень, чтобы объем воздуха в цилиндре изотермически сжать в 2 раза. Трением пренебречь.

Ответ: $M = 26$ кг.

Решение. Давление p внутри цилиндра без груза определяется из условия равновесия поршня $pS\cos\alpha = mg + p_0S_0$, где $S = S_0/\cos\alpha$ — площадь внутренней скошенной поверхности поршня; $p = (mg/S_0) + p_0$. Давление p' внутри цилиндра при наличии груза на поршне определяется аналогично: $p' = \dfrac{(mg + Mg)}{S} + p_0$. По закону Бойля-Мариотта $pV = p'\dfrac{V}{2}$. Из этих уравнений получим $M = (p_0S_0/g) + m = 26$ кг.

14.79. Один конец цилиндрической трубки длиной $l = 25$ см и радиусом $r = 1$ см закрыт пробкой, а в другой вставлен поршень, который медленно вдвигают в трубку. Когда поршень подвинется на расстояние $\Delta l = 8$ см, пробка вылетает. Считая температуру неизменной, найдите силу трения F пробки о стенки трубки в момент вылета пробки. Атмосферное давление $p_0 = 0,1$ МПа.

Ответ: $F = 46$Н.

Решение. Сила трения равна силе давления на поршне. По закону Бойля-Мариотта $p_0Sl = \dfrac{F}{S}S(l - \Delta l)$ или $F = \dfrac{p_0\pi r^2 l}{l - \Delta l} = 46$ Н.

14.80. Узкая цилиндрическая трубка длиной L, закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного столбиком ртути

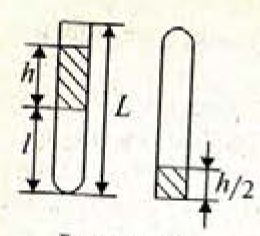


Рис. 14.27

длиной h. Трубка расположена открытым концом вверх. Какова была длина l столбика воздуха в трубке, если при перевертывании трубки открытым концом вниз из трубки вылилась половина ртути? Плотность ртути — ρ. Атмосферное давление — p_0 (рис. 14.27).

Решение. Согласно закону Бойля-Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$, где $p_1 = p_0 + \rho gh$, $V_1 = Sl$; $p_2 = p_0 - \frac{\rho gh}{2}$, $V_2 = S\left(L - \frac{h}{2}\right)$.

После подстановки p_1, V_1 и p_2, V_2, получим $l = \frac{\left(p_0 - \frac{\rho gh}{2}\right)\left(L - \frac{h}{2}\right)}{p_0 + \rho gh}$.

14.81. Посередине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтально расположенной трубки длиной $L = 1$ находится столбик ртути длиной $h = 20$ см. Если трубку поставить вертикально, столбик ртути сместится на расстояние $l = 10$ см. До какого давления p откачана трубка? Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: $p = 50$ кПа.

Решение. В обоих концах трубки воздух первоначально находился под давлением p и занимал объем $V = S\frac{L-h}{2}$. Когда трубку поставили вертикально, в верхней части трубки давление стало равным p_1, а объем воздуха $V_1 = S\left(\frac{L-h}{2} + l\right)$; в нижней части давление стало равным p_2, а объем воздуха $V_2 = S\left(\frac{L-h}{2} - l\right)$. Согласно закону Бойля-Мариотта $(L-h)p = (L-h+2l)p_1$ — для верхней части трубки, $(L-h)p = (L-h-2l)p_2$ — для нижней части трубки. Столбик ртути находится в равновесии при условии $p_2 = p_1 + \rho gh$. Решив совместно последние 3 уравнения, найдем $p = \rho gh\frac{(L-h)^2 - 4l^2}{4l(l-h)} = 50\,\text{кПа}$.

14.82. Открытую с обоих концов трубку длиной $L = 2$ м погружают в вертикальном положении на половину ее длины в сосуд с ртутью. В трубку вдвигают поршень. На каком расстоянии l от поверхности ртути в сосуде должен находиться поршень, чтобы уровень ртути в трубке опустился на величину $h = 1$ м? Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м³. Атмосферное давление $p_0 = 0{,}1$ МПа.

Ответ: $l = -57$ см.

Решение. Давление воздуха в трубке до вдвижения в нее поршня было $p_1 = p_0$. Объем $V_1 = S\frac{L}{2}$. После вдвижения поршня $p_2 = p_0 + \rho gh$, а $V_2 = S(h+l)$. По закону Бойля-Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$ или $p_0\frac{L}{2} = (p_0 + \rho gh)(h+l)$. Отсюда $l = \frac{p_0L}{2(p_0 + \rho gh)} - h = 57\,\text{см}$.

14.83. Компрессор засасывает из атмосферы каждую секунду 4 л воздуха, которые подаются в баллон емкостью 120 л. Через сколько времени давление в баллоне будет превышать атмосферное в 9 раз? Начальное давление в баллоне равно атмосферному.

Ответ: $t = 4{,}5$ мин.

Решение. Исходя из закона Бойля-Мариотта можно написать: $t\frac{V_1}{c}p_0 = 9Vp_0'$, $t = 270$ с, где $\frac{V_1}{c}$ — объем, засасываемый компрессором в 1 секунду.

14.84. Сколько надо сделать ходов поршня, чтобы насосом емкостью $\Delta V = 0{,}5$ л откачать воздух в колбе объемом $V_0 = 5$ л от нормального давления p_0 до давления $p_n = 50$ Па?

Ответ: $n = 80$.

Решение. Процесс откачки можно считать изотермическим. При первом взмахе поршень насоса освобождает объем ΔV. В результате этого, давление в откачиваемом сосуде, первоначально равное p_0, падает до p_1, определяемого из условия $p_0V_0 = p_1(V_0 + \Delta V)$. Откуда $p_1 = p_0\frac{V_0}{V_0 + \Delta V}$. После второго взмаха давление упадет до значения p_2, определяемого из условия $p_1V_0 = p_2(V_0 + \Delta V)$, $p_2 = p_1\frac{V_0}{V_0 + \Delta V} = p_0\left(\frac{V_0}{V_0 + \Delta V}\right)^2$. После третьего взмаха давление будет равно $p_3 = p_0\left(\frac{V_0}{V_0 + \Delta V}\right)^3$, а после n взмахов $p_n = p_0\left(\frac{V_0}{V_0 + \Delta V}\right)^n$. Логарифмируя последнее равенство и решая его относительно n, получаем $n = \frac{\ln\frac{p_n}{p_0}}{\ln\frac{V_0}{V_0 + \Delta V}} = 80$.

14.85. Воздух в открытом сосуде медленно нагрели до $T_1 = 400$ К, затем, герметически закрыв, сосуд охладили до $T_2 = 280$ К. На сколь-

ко при этом изменилось давление в сосуде по отношению к первоначальному?

Ответ: $\Delta p/p = 30$ %.

Решение. Процесс изохорный: $p_1/T_1 = p_2/T_2$. Отсюда $p_2 = \frac{T_2 p_1}{T_1}$, $\Delta p = p_1 - p_2 = p_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}$. Тогда $\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 30\%$.

14.86. Манометр в баллоне с газом в помещении с температурой $T_1 = 17$ °С показывает давление $p_1 = 350$ кПа. На улице манометр показывает $p_2 = 300$ кПа. Какова температура окружающего воздуха?

Ответ: $T_2 = 248$К.

Указание. См. предыдущую задачу. $T_2 = \frac{T_1 p_2}{p_1} = 248$ К.

14.87. Какая масса воздуха выйдет из комнаты, если температура воздуха возросла с $t_1 = 10$ °С до $t_2 = 20$ °С? Объем комнаты $V = 60$ м^3. Давление нормальное.

Ответ: $\Delta m = 2{,}5$ кг.

Решение. Записав дважды уравнение Менделеева-Клапейрона можно найти $\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{pVM}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 2{,}5$ кг.

14.88. Внутри закрытого с обоих концов горизонтального цилиндра имеется тонкий поршень, который может скользить в цилиндре без трения. С одной стороны поршня находится водород массой $m_1 = 3$ г, с другой — азот массой $m_2 = 23$ г. Какую часть цилиндра занимает водород?

Ответ: $V_1/V = 0{,}65$.

Решение. Поршень будет скользить в цилиндре до тех пор, пока давление газов по обе стороны от него не станет равным. Выразив p_1 и p_2 из соответствующих уравнений состояния идеального газа, получим $\frac{m_1}{M_1 V_1} RT = \frac{m_2}{M_2(V - V_1)} RT$. Откуда $\frac{V_1}{V} = \frac{m_1 M_2}{M_1 m_2 + m_1 M_2} = 0{,}65$.

14.89. В стальной баллон емкостью $V = 10$ л нагнетается водород при температуре $T = 290$ К. Сколько водорода можно поместить в баллон, если допустимое давление на стенки баллона $p = 50$ МПа?

Ответ: $m = 0{,}41$ кг.

Указание. Воспользуйтесь уравнением Менделеева-Клапейрона. $m = \frac{pVM}{RT} = 0{,}41$ кг.

14.90. Баллон, содержащий $m_а = 1$ кг азота, при испытаниях взорвался при температуре $T_1 = 630$ К. Какое количество водорода можно хранить в таком же баллоне при температуре $T_2 = 270$ К, имея десятикратный запас прочности?

Ответ: $m_в = 17$ г.

Решение. Согласно условию задачи $10p_в = p_а$. Так как $p_а V = \frac{m_а}{M_а} RT_1$, а $p_в V = \frac{m_в}{M_в} RT_2$, то $\frac{m_а T_1 M_в}{m_в M_а T_2} = 10$. Откуда $m_в = \frac{m_а T_1 M_в}{10 M_а T_2} = 17$ г.

13.91. В сосуд с ртутью погружена в вертикальном положении трубка с поршнем, открытая с нижнего конца. Если поршень находится на расстоянии $l_0 = 1$ см от поверхности ртути в сосуде, то уровни ртути в сосуде и трубке одинаковы. Найдите давление воздуха p в трубке после подъема поршня над уровнем ртути в сосуде до высоты $l = 75$ см. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Атмосферное давление $p_0 = 0{,}1$ МПа.

Ответ: $p = 11{,}6$ кПа.

Решение. Согласно закону Бойля-Мариотта $p_0 V_0 = pV$, где p_0 — давление воздуха в трубке до подъема поршня, а $V_0 = Sl_0$ — занимаемый воздухом объем; $p = p_0 - \rho gh$ — давление воздуха в трубке после подъема поршня, $V = s(l - h)$ — занимаемый воздухом объем в этом случае. Высота подъема ртути в трубке $h = \frac{p_0 - p}{\rho g}$. Тогда $p_0 \rho g l_0 = p(\rho g l - p_0 + p)$; откуда находим $p = \frac{p_0 - \rho g l}{2} \pm \sqrt{\frac{(p_0 + \rho g l)^2}{4} + p_0 \rho g l_0} = 11{,}6$ кПа.

14.92. Со дна водоема глубиной $H = 80$ м поднимается вверх шарообразный пузырек воздуха. На какой глубине h радиус этого пузырька увеличится в $k = 2$ раза? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Температуру считать постоянной.

Ответ: $h = 1{,}25$ м.

Решение. Давление воздуха в пузырьке на глубине H: $p_1 = p_0 + \rho gH$, его объем $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$, на глубине h давление $p_2 = p_0 + \rho gh$, а объем $V_2 = \frac{4}{3}\pi (kr)^3$. Согласно закону Бойля-Мариотта $(p_0 + \rho gH)\frac{4}{3}\pi r^3 = (p_0 + \rho gh)\frac{4}{3}\pi (kr)^3$. Откуда $h = \frac{H}{k^3} - \frac{(k^3 - 1)p_0}{\rho g k^3} = 1{,}25$ м.

14.93. Пузырек воздуха поднимается со дна водоема, имеющего глубину H. Найдите зависимость радиуса пузырька r от глубины h

его местонахождения в данный момент времени, если его объем на дне водоема равен V. Силы поверхностного натяжения не учитывать.

Ответ: $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V(p_0 + \rho gh)}{4\pi(p_0 + \rho gh)}}$.

Указание. См. задачу 14.92.

14.94. Открытую стеклянную трубку длиной 1 м наполовину погружают в ртуть. Затем трубку закрывают и вынимают. Найдите длину столбика ртути, оставшегося в трубке. Атмосферное давление равно 75 см рт. ст.

Ответ: $h = 25$ см.

Указание. См. решение задачи 14.72. $(l-h)(H-h) = H\dfrac{l}{2}$, где h — высота оставшегося столбика ртути.

14.95. Барометрическая трубка погружена в глубокий сосуд с ртутью так, что уровни ртути в трубке и в сосуде совпадают. При этом воздух в трубке занимает столб длиной $l = 30$ см. Трубку поднимают на $l_1 = 10$ см. На сколько сантиметров поднимется ртуть в трубке? Атмосферное давление равно $H = 75$ см рт. ст.

Ответ: $x = 7$ см.

Указание. Из закона Бойля-Мариотта следует, что

$$(H-x)(l+l_1-x) = Hl,\ x = \frac{1}{2}(H+l+l_1) - \sqrt{(H+l+l_1)^2 - 4l_1H} = 7\,\text{см}.$$

14.96. В сосуд с ртутью опускают открытую стеклянную трубку, оставляя над поверхностью конец длиной 60 см. Затем трубку закрывают и погружают еще на 30 см. Определить высоту столба воздуха в трубке. Атмосферное давление равно 760 мм рт. ст.

Ответ: 48,3 см.

Решение самостотельное.

14.97. Цилиндрический сосуд делится на две равные части подвижным поршнем. Каково будет равновесное положение поршня, когда в каждую из частей сосуда будет помещено одинаковое количество кислорода и водорода соответственно? Общая длина сосуда равна 85 см.

Ответ: $x = 0{,}05$ м.

Решение. Уравнение состояния кислорода и водорода

$$p(xS) = \frac{m}{M_1}RT \text{ и } p(l-x)S = \frac{m}{M_2}RT.\ \frac{x}{l-x} = \frac{M_2}{M_1},\ x = l\frac{M_2}{M_1+M_2} = 0{,}05\,\text{м},$$

где x — длина части сосуда, заполненной кислородом.

14.98. В условии предыдущей задачи найдите, при каких температурах кислорода T_1 и водорода T_2 поршень будет делить цилиндр на равные части.

Ответ: $\dfrac{T_1}{T_2} = 16$.

Решение. Положив в уравнениях состояния (см. предыдущую задачу) $x = \dfrac{l}{2}$, $T = T_1$ — для кислорода, и $T = T_2$ — для водорода, можно найти $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{M_1}{M_2} = 16$. При любых температурах, для которых выполняется это условие, поршень будет делить цилиндр на две равные части.

14.99. Имеется два мяча различных радиусов, давление воздуха в которых одинаково. Мячи прижимают друг к другу. Какой формы будет поверхность соприкосновения?

Ответ: Поверхность соприкосновения выгнута в сторону большего мяча.

Указание. У меньшего мяча относительное изменение объема будет больше.

14.100. Сколько ртути войдет в стеклянный баллончик объемом 5 см³, нагретый до $t_1 = 400$ °С при его остывании до $t_2 = 16$ °С, если плотность ртути при $t_2 = 16$ °С равна $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: $m = 39$ г.

Решение. Ртуть будет втягиваться в шар вследствие уменьшения давления воздуха внутри стеклянного шара при его остывании. Процесс остывания изобарный. Масса ртути, вошедшей в шар,

$$m = \rho\Delta V,\ \text{где}\ \Delta V = V_1 - V_2 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).\ \text{Тогда}\ m = \rho\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 39\,\text{г}.$$

14.101. При какой температуре находился газ, если при нагревании его на 22° при постоянном давлении объем удвоился?

Ответ: $T = 22$ К.

Решение. Из закона Гей-Люссака $\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{\Delta T}{T}$. Отсюда $T = \dfrac{\Delta TV}{\Delta V} = 22$ К.

14.102. До какой температуры нужно нагреть воздух, взятый при 20°, чтобы его объем удвоился, если давление останется постоянным.

Ответ: $T_2 = 313$ °С.

Указание. Воспользуемся законом Гей-Люссака в форме $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1}$.

Отсюда $T_2 = \dfrac{V_2 T_1}{V_1} = 313$ °С.

14.103. В ртутный барометр попал пузырек воздуха, вследствие чего барометр показывает давление меньше истинного. При сверке его с точным барометром оказалось, что при давлении $p_1 = 768$ мм рт. ст. барометр показывает $p_1' = 748$ мм рт. ст., причем расстояние от уровня ртути до верхнего основания трубки $l = 80$ мм. Каково истинное давление p_2, если барометр показывает $p_2' = 734$ мм рт. ст.? Температура воздуха постоянна.

Ответ: $p_2 = 751$ мм рт. ст.

Указание. Добавление воздуха, находящегося в барометре над ртутью, равно разности атмосферного давления, показываемого барометром.

14.104. Закрытый цилиндр, расположенный горизонтально, разделен на две части подвижным поршнем. Одна часть цилиндра заполнена некоторым количеством газа при температуре $t_1 = -73$ °С, другая — таким же количеством газа при температуре $t_2 = 27$ °С. Поршень находится в равновесии. Найти объемы V_1 и V_2, занимаемые газом в двух частях цилиндра, если общий объем газа $V = 500$ см³.

Ответ: $V_1 = 200$ см³; $V_2 = 300$ см³.

Решение. Так как поршень находится в равновесии, то $p_1 = p_2$. Записав уравнение Менделеева-Клапейрона для обоих частей цилиндра и определив из них p_1 и p_2, получим $p_1 = mRT_1/MV_1$ и $p_2 = mT_1/(V - V_1)M$. Откуда $V_1 = VT_1/(T_1 + T_2)$; $V_2 = V - V_1$.

14.105. В трубке длиной $L = 1{,}73$ м, заполненной газом, находится столбик ртути длиной $h = 30$ мм. Когда трубка расположена вертикально, ртуть делит трубку на две равные части. Давление газа над ртутью $p = 8$ кПа. На какое расстояние l сдвинется ртуть, если трубку положить горизонтально? Плотность ртути равна $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м³. Температура постоянна.

Ответ: $l = 17$ см.

Решение. При горизонтальном расположении трубки давление по обе стороны от столбика ртути одинаково. Пусть процесс перевода трубки из вертикального в горизонтальное положение происходит против часовой стрелки. Исходя из закона Бойля-Мариотта для левой части трубки, получим $p\dfrac{L-h}{2} = p_1\left(\dfrac{L-h}{2} - l\right)$, а для правой $\dfrac{(p+\rho gh)(L-h)}{2} = p_2\left(\dfrac{L-h}{2} + l\right)$. Так как $p_1 = p_2$, то нетрудно получить $l = \dfrac{\rho gh(L-h)}{2(2p+\rho gh)} = 17$ см.

14.106. Открытую пробирку с воздухом при давлении p_1 медленно нагрели до температуры T_1, затем герметически закрыли и охладили до температуры $T_2 = 283$ К. Давление при этом упало до $p_2 = 0{,}7p_1$. До какой температуры T_1 была нагрета пробирка? Тепловым расширением пробирки пренебречь.

Ответ: $T_1 = 404$ К.

Решение. $T_1 = p_1T_2/p_2$.

14.107. Газ, занимающий при температуре $T_1 = 400$ К и давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа объем $V_1 = 2$ л, изотермически сжимают до объема V_2 и давления p_2, затем изобарно охлаждают до температуры $T_3 = 200$ К, после чего изотермически изменяют объем до $V_4 = 1$ л. Найдите конечное давление p_4.

Ответ: $p_4 = 0{,}1$ МПа.

Решение. Изотермическое сжатие $p_1V_1 = p_2V_2$, изобарное охлаждение $V_2/T_1 = V_3/T_3$, изотермическое сжатие $p_2V_3 = p_4V_4$. Откуда $p_4 = p_1V_1T_3/T_1V_4 = 0{,}1$ МПа.

14.108. Некоторый газ массой $m_1 = 7$ г при температуре $t_1 = 27$ °С создает в баллоне давление $p_1 = 50$ кПа. Водород массой $m_2 = 4$ г при температуре $t_2 = 60$ °С создает в том же баллоне давление $p_2 = 444$ кПа. Какова молярная масса M_1 неизвестного газа? Молярная масса водорода $M_2 = 0{,}002$ кг/моль.

Ответ: $M_1 = 0{,}028$ кг/моль.

Указание. Записав дважды уравнение Менделеева-Клапейрона и разделив одно на другое, получим $M_1 = m_1M_2p_2/m_2p_1T_2 = 0{,}028$ кг/моль.

14.109. Из баллона со сжатым кислородом израсходовали столько кислорода, что его давление упало со значения $p_1 = 9{,}8$ МПа до $p_2 = 7{,}84$ МПа. Какая часть массы кислорода израсходована?

Ответ: $\dfrac{m_1 - m_2}{m_1} = 0{,}2$.

Указание. Применив уравнение Менделеева-Клапейрона, получим $\dfrac{m_1 - m_2}{m_1} = 0{,}2$.

14.110. Внутри закрытого цилиндра, расположенного горизонтально, имеется тонкий теплонепроницаемый поршень. В одной части цилиндра находится кислород при температуре $t_1 = 127$ °С, в другой — водород при температуре $t_2 = 27$ °С. Массы обоих газов одинаковы. На каком расстоянии l от торца цилиндра в части, в которой находится водород, расположен поршень? Длина цилиндра $L = 65$ см. Молярные массы кислорода и водорода $M_1 = 0{,}032$ кг/моль и $M_2 = 0{,}002$ кг/моль.

Ответ: $l = 60$ см.

Решение. Так как давления по обе стороны от перегородки равны, то $\frac{m}{M_1(L-l)S}T_1 = \frac{m}{M_2 lS}T_2$, откуда $l = \frac{M_1 L T_2}{M_1 T_2 + M_2 T_1} = 60$ см.

14.111. В каждую из четырех шин автомобиля накачан объем $V_1 = 200$ л воздуха при температуре $t_1 = 17$ °С. Объем шины $V_2 = 54{,}6$ л, площадь сцепления шины с грунтом при температуре $t_2 = 0$ °С $S = 290$ см². Найдите массу m автомобиля. Атмосферное давление $p_0 = 0{,}1$ МПа.

Ответ: $m = 4000$ кг.

Решение. На автомобиль действует сила тяжести mg, направленная вниз. Очевидно $mg = 4N$, где N — сила реакции опоры со стороны грунта на каждую из шин, направленная вверх. Внутри шины действует сила давления воздуха, которая уравновешивается силой реакции опоры N со стороны грунта. Давление воздуха при температуре T_2 равно $p = \frac{N}{S} = \frac{mg}{4S}$. Согласно объединенному газовому закону $\frac{pV_2}{T_2} = \frac{p_0 V_1}{T_1}$ или $\frac{mgV_2}{4ST_2} = \frac{p_0 V_1}{T_1}$, отсюда $m = \frac{4ST_2 p_0 V_1}{V_2 T_1 g} = 4000$ кг.

14.112. В трубке высота столба воздуха $l = 30$ см, а высота столба ртути $h = 14$ см (рис. 14.28). Температура воздуха $t_1 = 27$ °С, а давление атмосферы соответствует уровню ртути в барометре $H = 76$ см. Как изменится уровень ртути, если давление атмосферы останется прежним, а температура понизится до $t_2 = 12$ °С?

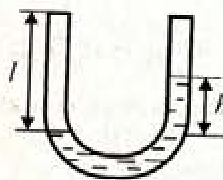


Рис. 14.28

Ответ: Опустится в правом колене на $b = 9{,}1$ мм.

Решение. Согласно уравнению состояния идеального газа $\frac{p_1 Sl}{T_1} = \frac{p_2 S(l-b)}{T_2}$, где $p_1 = H + h$, $p_2 = H + h - 2b$. Решив квадратное уравнение $2b^2 - (2l + h + H)b + (h + H)l\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 0$, получим $b = \frac{1}{4}\left(2l + h + H - \sqrt{(2l + h + H)^2 - 8(h + H)l(1 - T/T_1)}\right)$. Уровень ртути опустился в правом колене на $b = 9{,}1$ мм.

14.113. Два одинаковых сосуда, содержащие газ при температуре $T = 290$ К, соединены горизонтальной трубкой диаметром $d = 4$ мм, посередине которой находится капелька ртути. Объем сосудов вместе с трубкой равен $V = 0{,}4$ л. На какое расстояние переместится капелька ртути, если температуру одного из сосудов повысить на $\Delta T = 1$ К, а другого на столько же понизить? Расширением стенок сосуда пренебречь.

Ответ: $\Delta l = 5{,}5$ см.

Решение. Согласно закону Шарля $\frac{V}{2T} = \frac{V/2 + \Delta V}{T + \Delta T}$; $\Delta V = S\Delta l = \frac{\pi d^2 \Delta l}{4}$. Нетрудно найти, что $\Delta l = \frac{2V\Delta T}{T\pi d^2} = 5{,}5$ см.

14.114. Определите молярную массу газа, свойства которого соответствуют свойствам смеси 160 г кислорода и 120 г азота.

Ответ: $M_{см} = 30{,}2 \cdot 10^3$ кг/моль.

Решение. Число молей смеси $\nu = \nu_1 + \nu_2$, где ν_1 и ν_2 — количество молей компонентов смеси. $\nu_1 = \frac{m_1}{M_1}$, $\nu_2 = \frac{m_2}{M_2}$, $\nu = \frac{m}{M_{см}}$ и $m = m_1 + m_2$; $M_{см} = \frac{(m_1 + m_2)M_1 M_2}{m_1 M_2 + m_2 M_1} = 30{,}2 \cdot 10^3$ кг/моль.

14.115. Какой объем занимает смесь азота и гелия массой по 1 кг каждого при нормальных условиях?

Ответ: $V = 6{,}4$ м³.

Решение. Нормальные условия соответствуют $p_0 = 10^5$ Па, $T = 273$ К. Из уравнения состояния $V = \frac{mRT}{M_{см} p_0}$. Для нахождения $M_{см}$ воспользуемся решением предыдущей задачи.

14.116. Определите плотность смеси 4 г водорода и 32 г кислорода при температуре 7°С и давлении 10^5 Па.

Ответ: $\rho = 0{,}51$ кг/м³.

Решение. Из уравнения состояния $\rho = \frac{pM_{см}}{RT}$,

где $M_{см} = \frac{(m_1 + m_2)M_1 M_2}{m_1 M_2 + m_2 M_1}$.

14.117. В баллонах объемом $V_1 = 20$ л и $V_2 = 44$ л содержится газ. Давление в первом баллоне $p_1 = 2{,}4$ МПа, во втором $p_2 = 1{,}6$ МПа. Определите общее давление p и парциальные p_1' и p_2' после соединения баллонов, если температура газа осталась прежней.

Ответ: $p_1' = 0{,}76$ МПа; $p_2' = 1{,}12$ МПа; $p = 1{,}88$ МПа.

Решение. Согласно закону Дальтона $p = p_1' + p_2'$. Парциальное давление найдем из закона Бойля-Мариотта $p_1' = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2}$, $p_2' = \frac{p_2 V_2}{V_1 + V_2}$.

14.118. Три баллона емкостью 3 л, 7 л и 5 л наполнены соответственно кислородом ($2 \cdot 10^5$ Па), азотом ($3 \cdot 10^5$ Па) и углекислым газом ($0,6 \cdot 10^5$ Па) при одной и той же температуре. Баллоны соединяют между собой, причем образуется смесь той же температуры. Каково давление смеси?

Ответ: $p_{см} = 2 \cdot 10^5$ Па.

Указание. Воспользуйтесь законом Дальтона.

14.119. В 1 кг сухого воздуха содержится $m_1 = 232$ г кислорода и $m_2 = 768$ г азота (массами других газов можно пренебречь). Определите относительную молекулярную массу воздуха.

Ответ: $M_{см} = 28,8$.

Указание. Относительная молекулярная масса воздуха $M_r = \frac{M_{см}}{10^{-3}}$. Молекулярная масса смеси газов $M_{см} = \frac{(m_1 + m_2) M_1 M_2}{m_1 M_2 + m_2 M_2} = 28,8$ (см. задачу 14.114).

14.120. Баллон вместимостью 5 л содержит смесь гелия и водорода при давлении 600 кПа. Масса смеси 4 г, массовая доля гелия равна 0,6. Определите температуру смеси.

Ответ: $T = 258$ К.

Решение. Из уравнения состояния $T = \frac{pVM_{см}}{mR}$. При нахождении $M_{см} = \frac{(m_1 + m_2) M_1 M_2}{m_1 M_2 + m_2 M_2}$ учесть $m_1 = 0,6m$, $m_2 = 0,4m$.

14.121. Два сосуда, содержащих одинаковую массу одного и того же газа, соединены трубкой с краном. В первом сосуде давление $p_1 = 10^5$ Па, а во втором $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Па. Температура одинакова. Какое установится давление после открытия крана?

Ответ: $p = 0,15$ МПа.

Решение. Согласно закону Дальтона давление $p = p_1' + p_2'$ или $p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}$. V_1 и V_2 выразим из уравнения Менделеева-Клапейрона. Получим $p = \frac{2 p_1 p_2}{p_1 + p_2} = 0,15 \text{МПа}$.

14.122. В сосуд объемом $V = 1$ л помещают кислород массой $m_1 = 2$ г и азот массой $m_2 = 4$ г. Каково давление смеси при температуре $T = 273$К?

Ответ: $p = 0,46$ МПа.

Указание. Необходимо найти молярную массу смеси $\frac{m_1 + m_2}{M_{см}} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}$ и подставить в уравнение Менделеева-Клапейрона $pV = \frac{(m_1 + m_2) RT}{M_{см}}$. Получим $p = \frac{(m_1 M_2 + m_2 M_1) RT}{M_1 M_2 V} = 0,46 \text{МПа}$.

14.123. В сосуде объемом $V = 1,5$ л находится смесь кислорода и углекислого газа. Масса смеси $m = 40$ г, температура $T = 300$ К, давление $p = 2$ МПа. Найдите массу каждого из газов.

Ответ: $m_{у.г.} = 5,5$ г; $m_к = 34,5$ г.

Решение. Согласно закону Дальтона $p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V}$, где $p_1 V_1 = \frac{m_к RT}{M_1}$, $p_2 V_2 = \frac{(m - m_к) RT_2}{M_2}$. Решив эти уравнения относительно $m_к$, получим $m_к = \frac{pVM_1 M_2 - RTM_1 m}{RT(M_2 - M_1)}$. $m_{у.г.} = m - m_к$.

15. ТЕПЛОТА И РАБОТА. ПРОЦЕСС ТЕПЛООБМЕНА.

15.1. В калориметре находится два слоя одной и той же жидкости: внизу более холодная, вверху — теплая. Изменится ли общий объем жидкости при выравнивании температур?

Ответ: Не изменится.

Указание. Начальные объемы жидкостей $V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_1(1 + \beta t_1)}{\rho_0}$, $V_2 = \frac{m_2(1 + \beta t_2)}{\rho_0}$. После смешивания $V_1' = \frac{m_1(1 + \beta t)}{\rho_0}$ и $V_2' = \frac{m_2(1 + \beta t)}{\rho_0}$. Так как $cm_1 t_1 + cm_2 t_2 = c(m_1 + m_2)t$, то легко доказать, что $V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$.

15.2. В условии предыдущей задачи в сосуде находятся равные массы воды при температурах 0 и 8 °С.

Ответ: Уменьшится.

Решение. Установившаяся температура воды будет равна 4 °С, при этой температуре плотность воды наибольшая, поэтому при выравнивании температур объем жидкости в сосуде уменьшится.

15.3. Можно ли передать некоторое количество теплоты веществу, не вызывая этим повышения его температуры?

Ответ: Можно.

Решение. Если вещество будет совершать работу или претерпевать фазовый переход, то ему можно передать количество теплоты без повышения температуры.

15.4. Шарик для игры в настольный теннис радиуса 15 мм и массы 5 г погружен в воду на глубину $h = 30$ см. Когда шарик опустили, он выпрыгнул из воды на высоту $h_1 = 10$ см. Какая энергия перешла в теплоту вследствие трения шарика о воду?

Ответ: $Q = 2,2 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Решение. Энергия шарика, выскочившего из воды, $E = mgh_1$ меньше совершенной над шариком работы сил Архимеда и силы тяжести $A = \left(4\pi r^3 \rho g/3 - mg\right)h$ на величину работы сил трения, которая и переходит в теплоту $Q = A - E$.

15.5. Почему зимой для освобождения тротуаров ото льда их посыпают солью?

Ответ: Для более быстрого плавления льда.

Решение. Смесь льда с солью имеет более низкую температуру плавления, чем чистый лед. Если температура окружающего воздуха выше этой температуры плавления, смесь начинает быстро плавиться.

15.6. Почему продувание электрических генераторов водородом охлаждает их сильнее, чем продувание воздухом?

Ответ: Потому что удельная теплоемкость водорода в 14 раз больше, чем удельная теплоемкость воздуха.

15.7. Чтобы охладить $V_1 = 2$ л воды, взятой при $t_1 = 80$ °C, до $t = 60$ °C, в нее добавляют холодную воду при $t = 10$ °C. Какое количество холодной воды требуется добавить?

Ответ: $V_2 = 0,8$ л.

Решение. Согласно уравнению теплового баланса $V_1\rho c(t_1 - t) = V_2\rho c(t - t_2)$. Откуда $V_2 = V_1(t_1 - t)/(t - t_2)$.

15.8. Для приготовления ванны необходимо смешать холодную воду при $t_1 = 11$ °C с горячей при $t_2 = 66$ °C. Какое количество той и другой воды необходимо взять для получения $V = 110$ л воды при $t = 36$ °C?

Ответ: $V_1 = 60$ л; $V_2 = 50$ л.

Указание. См. решение предыдущей задачи.

15.9. В стеклянный стакан массой $m_1 = 0,12$ кг при температуре $t_1 = 15$ °C налили $m_2 = 0,2$ кг воды при $t_2 = 100$ °C. Какая температура воды установилась в стакане? $c_1 = 830\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, $c_2 = 4,2\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

Ответ: $T = 364$ К.

Решение. Согласно уравнению теплового баланса $m_1c_1(t - t_1) = m_2c_2(t_2 - t)$. Откуда $t = (m_2c_2t_2 + m_1c_1t_1)/(m_1c_1 + m_2c_2)$.

15.10. В калориметр массой $m_к = 75$ г при температуре $T_к = 278$ К налили жидкость массой $m_ж = 32$ г, имеющую температуру $T_ж = 293$ К. Когда в калориметре установилась температура $T_1 = 288$ К, в него опустили медную гирю массой $m_м = 400$ г, имеющую температуру $T_м = 281$ К. После этого температура в калориметре стала $T_2 = 285$ К. Определите удельные теплоемкости материала калориметра и жидкости. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Ответ: $c_к = 0,9\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$; $c_ж = 4,2\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

Решение. Записав уравнение теплового баланса для первого и второго состояний, найдем $c_к$ и $c_ж$.

$$\begin{cases} m_кc_к(T_1 - T_к) = m_жc_ж(T_ж - T_1) \\ m_кc_к(T_1 - T_2) + m_жc_ж(T_1 - T_2) = m_мc_м(T_2 - T_м). \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, найдем

$$c_ж = \frac{m_мc_м(T_2 - T_м)(T_1 - T_к)}{m_ж(T_1 - T_2)(T_ж - T_к)},\ \text{тогда}\ c_к = \frac{m_жc_ж(T_ж - T_1)}{m_к(T_1 - T_к)}.$$

15.11. В сосуд с водой с общей теплоемкостью $C = 1,5$ кДж/К при температуре $t_1 = 20$ °C поместили $m_2 = 56$ г льда при температуре $t_2 = -8$ °C. Какая установится температура?

Ответ: $T = 279$ К.

Решение. Согласно уравнению теплового баланса $C(t_1 - t) = c_2m_2(0 - t_2) + m_2\lambda + c_1m_2(t - 0)$. $C = cm$, где c — удельная теплоемкость. Решив уравнение относительно t, получим $t = \frac{Ct_1 + c_2m_2t_2 - m_2\lambda}{C + c_1m_2}$.

15.12. В медный калориметр массой $m_1 = 100$ г, содержащий воду массой $m_2 = 50$ г при температуре $t_1 = 5$ °C, опустили лед при температуре $t_2 = -30$ °C. Масса льда $m_3 = 300$ г. Какая температура установится в калориметре?

Ответ: $T_x = 271$ К.

Решение. Из условия задачи ясно, что установится температура ниже нуля. Составим уравнение теплового баланса

$m_2c_в(t_1 - t_0) + m_2\lambda + m_2c_л(t_0 - t_x) + m_1c_м(t_1 - t_x) = m_3c_л(t_x - t_2)$, где $t_0 = 0$ °C. Тогда $t_x = \frac{m_2c_в(t_1 - t_0) + m_2\lambda + m_2c_л + m_1c_мt_1 + m_3c_лt_2}{(m_2 + m_3)c_л + m_1c_м}$.

15.13. Смесь, состоящую из $m_1 = 5$ кг льда и $m_2 = 15$ кг воды при общей температуре $t_1 = 0$ °C, нужно нагреть до $t = 80$ °C с помощью

водяного пара при $t_2 = 100$ °С. Определите необходимое количество пара.

Ответ: $m_3 = 3{,}5$ кг.

Указание. Количество пара найдем из уравнения теплового баланса $m_1\lambda + (m_1 + m_2)c_1(t - t_1) = m_3 r + m_3 c_1 (t_2 - t)$.

Отсюда $m_3 = \left(m_1\lambda + (m_1 + m_2)c_1(t - t_1)\right)/\left(r + c_1(t_2 - t)\right)$.

15.14. В два одинаковых сосуда, содержащих воду (в одном масса воды $m_1 = 0{,}1$ кг при температуре $t_1 = 45$ °С, в другом масса воды $m_2 = 0{,}5$ кг при температуре $t_2 = 24$ °С), налили поровну ртуть. После установления теплового равновесия в обоих сосудах оказалось, что температура воды в них одна и та же и равна $t = 17$ °С. Найдите теплоемкость C_c сосудов.

Ответ: $C_c = 140$ Дж/К.

Решение. Исходя из условия теплового равновесия

$C_c(t_1 - t) + cm_1(t_1 - t) = C_c(t_2 - t) + cm_2(t_2 - t)$, найдем C_c.

$C_c = c\left[m_2(t_2 - t_1) - m_1(t_1 - t)\right]/(t_1 - t_2)$.

15.15. В калориметр теплоемкостью $C = 63$ Дж/К налили $m_1 = 250$ г масла при $t_1 = 12$ °С. После опускания в масло медного тела массой $m_2 = 500$ г при $t_2 = 100$ °С установилась температура $t = 33$ °С. Какова удельная теплоемкость c_1 масла по данным опыта?

Ответ: $c_1 = 2{,}17 \cdot 10^3 \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Указание. Воспользуйтесь уравнением теплового баланса

$$c_1 = \frac{c_2 m_2 (t_2 - t)}{m_1 (t - t_1)} - \frac{C}{m_1}.$$

15.16. В сосуд, содержащий 600 г воды при температуре 50 °С, бросают кусок льда массой 200 г при −10 °С. Определите конечную температуру воды в сосуде. Теплоемкостью сосуда пренебречь.

Ответ: $t = 16{,}6$ °С.

Решение. Количество теплоты, отдаваемое водой при ее остывании, $Q = c_2 m_2 (t_1 - t)$. Количество теплоты, необходимое для нагревания льда до температуры его плавления t_0: $Q_1 = c_1 m_1 (t_0 - t_1)$, c_1 — удельная теплоемкость льда. Для плавления льда необходимо $Q_2 = \lambda m_1$, где λ — удельная теплота плавления льда. Для подогрева воды, полученной из растаявшего льда, $Q_3 = c_2 m_1 (t - t_0)$, c_2 — удельная теплоемкость воды. $c_2 m_2 (t_2 - t) = c_1 m_1 (t_0 - t_1) + \lambda m_1 + c_2 m_2 (t - t_0)$,

откуда $$t = \frac{c_2 m_2 t_2 - c_1 m_1 (t_0 - t_1) - \lambda m_1 + c_2 m_1 t_0}{c_2 (m_1 + m_2)}.$$

15.17. Латунный калориметр массой $m_1 = 200$ г содержит $m_2 = 500$ г воды при температуре $t_1 = 18$ °С. В калориметр опускают $m_3 = 50$ г льда при температуре −20 °С и вводят $m_4 = 30$ г водяного пара при температуре $t_3 = 100$ °С. Определите температуру смеси.

Ответ: $t = 40$ °С.

Решение. Уравнение теплового баланса имеет вид:

$rm_4 + c_2 m_4 (t_3 - t) = c_3 m_3 (0° - t_2) + \lambda m_3 + c_2 m_3 t + c_1 m_1 (t - t_1) + c_2 m_2 (t - t_1)$,

где c_1, c_3, c_3 — удельные теплоемкости латуни, воды и льда соответственно, r — удельная теплота парообразования.

$$t = \frac{rm_4 + c_2 m_4 t_3 + c_3 m_3 t_2 - \lambda m_3 + c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_1}{c_2 (m_2 + m_3 + m_4) + c_1 m_1}.$$

15.18. В калориметр теплоемкостью $C = 50$ Дж/К, содержащий $m_1 = 0{,}1$ кг воды при температуре $t_1 = 14$ °С, бросают кусок сплава свинца и цинка массой $m_2 = 0{,}05$ кг при температуре $t_2 = 136{,}4$ °С. Сколько свинца и цинка в сплаве, если конечная температура в калориметре $t = 17{,}75$ °С?

Ответ: $m' = 18{,}2$ г; $m'' = 31{,}8$ г.

Решение. $C(t - t_1) + c_1 m_1 (t - t_1) = c'm'(t_2 - t) + c''(m_2 - m')(t_2 - t)$,

где c' и c'' — удельные теплоемкости свинца и цинка соответственно, а m' и m'' — их массы, c_1 — удельная теплоемкость воды.

$$m' = \frac{(C + c_1 m_1)(t - t_1)}{(c' - c'')(t_2 - t)} - \frac{c'' m_2}{c' - c''}. \quad m'' = m - m'.$$

15.19. В калориметр теплоемкостью $C = 63$ Дж/К, содержащий $m_1 = 0{,}2$ кг воды при температуре $t_1 = 15$ °С, бросают медный предмет при $t_2 = 100$ °С, устанавливается $t = 17{,}5$ °С. Затем воду заменяют таким же количеством неизвестной жидкости при $t_1' = 16{,}5$ °С, конечная температура $t' = 19$ °С. Определите удельную теплоемкость неизвестной жидкости.

Ответ: $c_2 = 4110$ Дж/кг · К.

Решение. Уравнение теплового баланса в первом случае

$cm(t_2 - t) = C(t - t_1) + c_1 m_1 (t - t_1)$,

во втором случае $cm(t_2 - t') = C(t' - t_1') + c_2 m_2 (t' - t_1')$, где c, m — удельная теплоемкость и масса медного предмета, $m_2 = m_1$. Разделим первое уравнение на второе и найдем c_2:

$$c_2 = \frac{(C + c_1 m_1)(t - t_1) + c_1 m_1 (t - t_1)}{m_1 (t_2 - t)(t' - t_1')}.$$

15.20. Смесь из свинцовых и алюминиевых опилок с общей массой $m = 150$ г и температурой $t_1 = 100$ °С погружена в калориметр

с водой, температура которой $t_2 = 15$ °С, а масса $m_3 = 230$ г. Установилась температура $t = 20$ °С. Теплоемкость калориметра $C = 42$ Дж/К. Сколько свинца и алюминия было в смеси?

Ответ: $m_1 = 92$ г; $m_2 = 58$ г.

Указание. Составьте уравнение теплового баланса. Если m_1 — масса свинца в смеси, то $(m - m_1)$ — масса алюминия.

$$m_1c_1(t_1 - t) + (m - m_1)c_2(t_1 - t) = m_3c_3(t - t_2) + C(t - t_2).$$

15.21. В калориметр теплоемкостью $C = 2100$ Дж/К, содержащий $m_1 = 500$ г воды при температуре $t_1 = 40$ °С, выливают $m_2 = 20$ кг расплавленного свинца при $t_2 = 327$ °С. Считая, что вся вода нагревается до кипения, а затем часть ее обращается в пар, определите массу m испарившейся воды.

Ответ: $m_x = 0{,}364$ кг.

Решение. Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$C(t - t_1) + m_1c_1(t - t_1) + m_xr = m_2\lambda + m_2c_2(t_2 - t),$$

откуда $m_x = \left[m_2(\lambda + c_2(t_2 - t)) - (C + c_1m_1)(t - t_1)\right]/r$,

где t — температура кипения воды.

15.22. В сосуд, содержащий $m_1 = 500$ г воды при $t = 15$ °С, бросили $m_2 = 50$ г мокрого снега. Температура в сосуде понизилась на $\Delta t = 5$ °С. Сколько воды было в снеге? Потерями теплоты пренебречь.

Ответ: $m_в = 0{,}025$ кг.

Решение. Массу воды в снеге найдите, воспользовавшись уравнением теплового баланса $m_1c\Delta t = m_2c(t - \Delta t) + (m_2 - m_в)\lambda$. Откуда $m_в = \left[m_2c(t - \Delta t) + m_2\lambda - m_1c\Delta t\right]/\lambda$.

15.23. В сосуд положили кусок льда массой $m_л = 10$ кг, имеющий температуру $t_л = -10$ °С. Найдите массу m воды в сосуде после того, как его содержимому сообщили количество теплоты $Q = 20$ МДж. Удельные теплоемкости воды и льда $c = 4{,}2 \cdot 10^3 \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ и $c_л = 2{,}1 \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3$ МДж/кг.

Ответ: $m = 4{,}6$ кг.

Решение. Из условия задачи ясно, что не вся вода, полученная при таянии льда, превратится в пар, а только $(m_л - m)$, где m — искомая масса. $Q = m_лc_л(t_0 - t_л) + m_л\lambda + m_лc(t - t_0) + (m_л - m)r$, где $t_0 = 0$ °С, а $t = 100$ °С.

Отсюда $m = m_л\left[r + c_л(t_0 - t_л) + \lambda - c(t - t_0)\right]/r - Q/r$.

15.24. В сосуд с тающим льдом положили кусок латуни массой $m = 430$ г. При этом часть льда массой $m_л = 200$ г превратилась в воду. Найдите объем латуни V в момент погружения ее в сосуд. Удельная теплоемкость латуни $c = 0{,}4 \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, ее плотность при $t_0 = 0$ °С равна $\rho_0 = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Коэффициент линейного расширения латуни $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

Ответ: $V = 51{,}2$ см^3.

Решение. Масса латуни $m = V_0\rho_0 = V\rho$, где $\rho = \rho_0/(1 + 3\alpha t)$ — плотность латуни до погружения в сосуд, когда кусок латуни имел температуру t. Отсюда $V = (m/\rho)(1 + 3\alpha t)$. Для определения начальной температуры латуни t составим уравнение теплового баланса $m_л\lambda = mc(t - t_0)$, откуда $t = m_л\lambda/mc$, а $V = (m/\rho)(1 + 3\alpha m_л\lambda/mc)$.

15.25. В стеклянный сосуд, имеющий массу $m_c = 120$ г и температуру $t_c = 20$ °С, налили горячую воду, масса которой $m = 200$ г и температура $t_в = 100$ °С. Спустя время $\tau = 5$ мин температура сосуда с водой стала равной $t = 40$ °С. Теряемое в единицу времени количество теплоты постоянно. Какое количество теплоты терялось в единицу времени? Удельные теплоемкости сосуда и воды

$$c_c = 840 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \text{ и } c = 4{,}2 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Ответ: $Q/\tau = 161{,}3$ Дж/с.

Решение. Потери количества теплоты $Q = mc(t_в - t) - m_cc_c(t - t_c)$.

Потери в единицу времени $\dfrac{Q}{\tau} = \dfrac{mc(t_в - t) - m_cc_c(t - t_c)}{\tau}$.

15.26. Тигель, содержащий некоторую массу олова, нагревается электрическим током. Выделяемое в единицу времени количество теплоты постоянно. За время $\tau_0 = 10$ мин температура олова повышается от $t_1 = 20$ °С до $t_2 = 70$ °С. Спустя еще время $\tau = 83$ мин олово полностью расплавилось. Найдите удельную теплоемкость олова c. Удельная теплота плавления олова $\lambda = 58{,}5$ кДж/кг, его температура плавления $t_{пл} = 232$ °С. Теплоемкостью тигля и потерями тепла пренебречь.

Ответ: $c = 0{,}23 \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Указание. См. решение предыдущей задачи.

$c = \lambda\tau_0/\left[(t_2 - t_1)\tau - (t_{пл} - t_2)\tau_0\right]$.

15.27. На спиртовке нагревали воду массой $m_1 = 400$ г от $t_1 = 16$ °С до $t_2 = 71$ °С. При этом был сожжен спирт массой $m_2 = 10$ г. Найдите коэффициент полезного действия установки.

Ответ: $\eta = 32\%$.

Решение. Коэффициент полезного действия установки

$$\eta = \frac{m_1 c(t_2 - t_1)}{m_2 q}.$$

15.28. Для нагревания воды объемом $V = 2$ л, находящейся в алюминиевой кастрюле массой $m_1 = 400$ г, от $t_1 = 15$ °С до $t_2 = 75$ °С был израсходован газ массой $m_2 = 30$ г, $q = 4{,}6 \cdot 10^7$ Дж/кг. Определите коэффициент полезного действия газовой плиты, считая теплоту, израсходованную на нагревание сосуда, полезной. Как изменится результат, если полезной считать только теплоту, израсходованную на нагревание воды?

Ответ: $\eta_1 = 38\%$; $\eta_2 = 36\%$.

Решение. Коэффициент полезного действия газовой плиты $\eta_1 = V\rho_в c_в(t_2 - t_1) + m_1 c_1(t_2 - t_1)/m_3 q$. $\eta_2 = V\rho_в c_в(t_2 - t_1)/m_3 q$.

15.29. В чайник со свистком налили воду массой $m_1 = 1$ кг и поставили на электрическую плиту мощностью $N = 900$ Вт. Через $\tau_1 = 7$ мин раздался свисток. Сколько воды останется в чайнике после кипения воды в течение $\tau_2 = 2$ мин? Каков КПД плитки? Начальная температура воды $t = 20$ °С.

Ответ: $m_2 = 0{,}96$ кг; КПД = 89%.

Решение. $\eta = c_в m_1(t_к - t)/N\tau_1$. Для того чтобы массу $(m_1 - m_2)$ воды выпарить, потребуется количество теплоты, равное $Q = \eta N \tau_2$. Тогда $m_2 = m_1\left[1 - \frac{c_в(t_к - t)\tau_2}{r\tau_1}\right]$, где $t_к$ — температура кипения воды.

15.30. В сосуд, содержащий $m_1 = 1{,}5$ кг воды при $t_1 = 15$ °С, впускают $m_2 = 2$ кг водяного пара при $t_2 = 100$ °С. Какая установится температура после конденсации пара?

Ответ: $t = 89$ °С.

Решение. Согласно уравнению теплового баланса $c_1 m_1 (t - t_1) = rm_2 + c_1 m_2 (t_2 - t)$. Откуда $t = \frac{rm_2 + c_1(m_1 t_1 + m_2 t_2)}{c_1(m_1 + m_2)}$.

15.31. В сосуд, содержащий 2,8 л воды при 20 °С бросают кусок стали массой 3 кг, нагретый до 460 °С. Вода нагревается до 60 °С, а часть ее обращается в пар. Найдите массу воды, обратившейся в пар. Теплоемкостью сосуда пренебречь.

Ответ: $m = 33$ г.

Решение. Уравнение теплового баланса имеет вид: $c_с m_с (t_с - t) = c_в \rho_в V_в (t - t_в) + c_в m(t' - t) + mr$, где m — масса воды, обратившейся в пар, $t' = 100$ °С. $m = \frac{c_с m_с (t_с - t) - c_в \rho_в V_в (t - t_в)}{c_в (t' - t) + r}$.

15.32. В электрический чайник налили холодную воду при $t_1 = 10$ °С. Через время $\tau = 10$ мин после включения чайника вода закипела. Через какое время она полностью испарится? Потерями теплоты пренебречь.

Ответ: $\tau' = 60$ мин.

Решение. Для испарения воды необходимо время $\tau = mr/N$, где $N = mc(t_2 - t)/\tau$ — мощность чайника, $t_2 = 100$ °С — температура кипения воды. $\tau' = r\tau/c(t_2 - t_1)$.

15.33. Алюминиевый чайник массой 400 г, в котором содержится 2 кг воды при 10 °С, помещают на газовую горелку с КПД 40%. Какова мощность горелки, если через 10 мин вода закипела, причем 20 г воды выкипело?

Ответ: $P = 3{,}5$ кВт.

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагревания чайника, воды и ее испарения $Q = c_в m_в (t_к - t_в) + m_а c_а (t_к - t_в) + \Delta mr$, где $t_к = 100$ °С — температура кипения воды. Полезная энергия, которая выделяется газовой горелкой, $Q_1 = P\tau\eta$, где P — мощность горелки, τ — время горения, η — КПД. Необходимо, чтобы $Q = Q_1$, тогда $P = \frac{1}{\tau\eta}\left[m_в c_в (t_к - t_в) + m_а c_а (t_к - t_в) + \Delta mr\right]$.

15.34. Кусок свинца массой $m = 1$ кг расплавился наполовину при сообщении ему количества теплоты $Q = 54{,}5$ кДж. Какова была начальная температура свинца? Температура плавления свинца $T_{пл} = 600$ К. Удельная теплоемкость свинца $c = 130 \frac{Дж}{кг \cdot К}$, удельная теплота плавления свинца $\lambda = 24$ кДж/К.

Ответ: $T = 273$ К.

Решение. $Q = mc(T_{пл} - T) + m\lambda/2$; $T = \frac{2mcT_{пл} - 2Q + m\lambda}{2mc}$.

15.35. Под колоколом воздушного насоса находится вода массой $m = 40$ г и некоторая масса льда при температуре $t_0 = 0$ °С. Воздух из-под колокола быстро откачивают. Благодаря интенсивному испарению воды оставшаяся часть ее замерзает. Найдите массу $m_л$ обра-

зовавшегося льда. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33$ МДж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2,3$ МДж/кг.

Ответ: $m_1 = 35$ г.

Решение. Масса испарившейся воды $(m - m_л)$. На ее испарение требуется количество теплоты $Q = (m - m_л)r$. При быстром откачивании теплота от окружающих тел не успевает передаваться воде, поэтому все это количество теплоты получается при образовании льда, т. е. $Q = m_л\lambda$. $(m - m_л)r = m_л\lambda$, $m_л = mr/(r + \lambda)$.

15.36. В сосуде, из которого откачивают воздух, находится небольшая масса воды при температуре $t_0 = 0$ °С. Благодаря интенсивному испарению воды оставшаяся часть ее замерзает. Найдите первоначальную массу воды M, если испарилось $m = 2,71$ г воды.

Ответ: $M = 22,7$ г.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $M = m(\lambda + r)/\lambda$.

15.37. Найдите массу m воды, которая может быть превращена в лед испарением эфира, имеющего массу $m_1 = 0,1$ кг. Начальная температура эфира и воды $t_1 = 20$ °С.

Удельная теплоемкость эфира $c_1 = 2,1 \dfrac{кДж}{кг \cdot К}$, удельная теплота парообразования эфира $r = 0,38$ МДж/кг.

Ответ: $m = 82$ г.

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды, отдается водой и эфиром при их охлаждении до температуры $t = 0$ °С и водой при замерзании.

$$m_1 r = m_1 c_1 (t_1 - t) + mc(t_1 - t) + m\lambda, \quad m = \frac{m_1\left[r - c_1(t_1 - t)\right]}{\lambda + c(t_1 - t)}.$$

15.38. Переохлажденная до температуры $t_1 = -10$ °С вода массой $m_1 = 1 кг$ превращается в лед с температурой $t = 0$ °С. Найдите массу льда, образовавшегося из переохлажденной воды.

Ответ: $m_л = 124$ г.

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды, отнимается у воды при ее превращении в лед, т. е. $mc(t - t_1) = m_л\lambda$, отсюда $m_л = mc(t - t_1)/\lambda$.

15.39. Какое количество теплоты требуется, чтобы медный стержень длиной $l = 10$ см и площадью поперечного сечения $S = 2$ см^2 удлинился от нагревания на $\Delta l = 0,1$ мм? Длина стержня при 0 °С равна $l_0 = 9,9$ см. Плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м^3, коэффициент

линейного расширения $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$, удельная теплоемкость $c = 376 \dfrac{Дж}{кг \cdot К}$.

Ответ: $Q = 3,8 \cdot 10^3$ Дж.

Решение. Изменение длины стержня $\Delta l = \alpha l_0 \Delta t$. Необходимое количество теплоты $Q = cm\Delta t = c\rho Sl \dfrac{\Delta l}{l_0\alpha}$.

15.40. Какое количество теплоты надо сообщить железной балке площадью сечения $S = 20$ см^2, чтобы она удлинилась на $\Delta l = 6$ мм?

Ответ: $Q = 3,6$ МДж.

Решение. Чтобы нагреть балку на Δt градусов, необходимо сообщить ей количество теплоты $Q = c\rho Sl_0\Delta t$. При нагревании балка изменяет свой линейный размер $l = l_0(1 + \alpha\Delta t)$, где α — коэффициент линейного расширения железа. Тогда $Q = \dfrac{c\rho S\Delta l}{\alpha}$.

15.41. Какое количество теплоты сообщили медному шару, если объем его увеличился на $\Delta V = 10$ см^3?

Ответ: $Q = 0,66$ МДж.

Указание. См. решение предыдущей задачи. Учесть, что коэффициент объемного расширения $\beta = 3\alpha$. $Q = c\rho\Delta V/3\alpha$.

15.42. Какая масса пороха сгорает при выстреле из карабина? Масса пули $m = 10$ г, скорость при вылете из дула $v = 700$ м/с, КПД карабина $\eta = 30\%$. Для пороха $q = 0,38 \cdot 10^7$ Дж/кг.

Ответ: $M = 2,2$ г.

Решение. Коэффициент полезного действия карабина $\eta = mv^2/2Mq$; $M = \dfrac{mv^2}{2\eta q}$.

15.43. Найдите расход бензина автомобиля «Запорожец» на $S = 1$ км пути при скорости $v = 60$ км/ч. Мощность мотора $P = 17$ кВт, КПД = 30%.

Ответ: $m = 74$ г.

Решение. Коэффициент полезного действия двигателя $\eta = PS/vmq$; $m = PS/\eta qv$.

15.44. Автомобиль «Москвич» расходует бензин массой $m = 5,67$ кг на $S = 50$ км пути. Определите мощность P, развиваемую двигателем, если скорость движения $v = 90$ км/ч и КПД двигателя $\eta = 22\%$.

Ответ: $P = 29$ кВт.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $P = \frac{\eta mqv}{S}$.

15.45. Определите, на сколько увеличится расход бензина на $S = 1$ км пути при движении автомобиля массой $M = 1$ т по дороге с подъемом $h = 3$ м на $l = 100$ м пути по сравнению с расходом бензина на горизонтальной дороге. КПД двигателя $\eta = 30\%$. Скорость на всех участках дороги постоянна.

Ответ: $\Delta m = 21$ г.

Решение. На горизонтальной дороге полезная работа $A_1 = \mu MgS$. На дороге с уклоном $A_2 = \mu Mg\cos\alpha \cdot S + Mg\sin\alpha \cdot S$, где $\sin\alpha = \eta/l$ — уклон. Ввиду малости уклона, $\cos\alpha = 1$. $A_2 - A_1 = MghS/l$, а $\Delta m = MghS/lq\eta$.

15.46. Автомобиль развивает скорость $v_1 = 72$ км/ч, расходуя при этом бензин массой $m_1 = 80$ г на $S = 1$ км. Какое количество бензина будет расходовать автомобиль при скорости $v_2 = 90$ км/ч? Какую мощность он при этом разовьет? Сила сопротивления пропорциональна скорости, КПД двигателя $\eta = 28\%$.

Ответ: $m_2 = 100$ г; $P = 32$ кВт.

Решение. Согласно условию задачи $\mu m_1 g \sim v_1$, $\mu m_2 g \sim v_2$. Следовательно, $m_2 = m_1 v_2/v_1$. Так как КПД $\eta = Pt/m_2 g$, то $P = m_1 v_2^3 g\eta/Sv_1$.

15.47. Судно на подводных крыльях «Метеор» развивает мощность $N = 1500$ кВт при КПД двигателя $\eta = 30\%$. Найти расход топлива на единицу длины пути при скорости судна $v = 72$ км/ч. Удельная теплота сгорания топлива $q = 50$ МДж/кг.

Ответ: $m/S = 5$ кг/км.

Решение. См. задачу 15.43. Расход топлива на единицу длины пути $\frac{m}{S} = \frac{P}{q\eta v}$.

15.48. Каков КПД η двигателя автомашины мощности $P = 20$ кВт, если при скорости $v = 72$км/ч двигатель потребляет объем $V = 10$ л бензина на пути $S = 100$ км? Удельная теплота сгорания бензина $q = 44$ МДж/кг, его плотность $\rho = 0,7 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: КПД = 32%.

Решение. $\eta = PS/V\rho vq$.

15.49. Свинцовая пуля, летевшая со скоростью $v_1 = 500$ м/с, пробила стенку. Определите на сколько градусов нагрелась пуля, если после стенки скорость ее снизилась до $v_2 = 400$ м/с. Считать, что на нагревание пули пошло $n = 50\%$ выделившейся теплоты.

Ответ: $\Delta T = 173$ К.

Решение. Согласно закону сохранения энергии

$$n\left(\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}\right) = mc\Delta T, \text{ откуда } \Delta T = \frac{n(v_1^2 - v_2^2)}{2c}.$$

15.50. На сколько градусов нагревается вода у основания водопада высотой $h = 10$ м? Считать, что на нагревание воды идет $n = 50\%$ механической энергии.

Ответ: $\Delta T = 0,012$ К.

Решение. См. предыдущую задачу. $\Delta T = ngh/c$.

15.51. При сверлении пушечного ствола, которое производили с помощью лошадей, Румфорд успел вскипятить в котле, поставленном на ствол, воду объемом $V = 220$ л. Минимальная температура воды была $t = 20$ °С. За $\tau = 6$ мин вода массой $m = 200$ г обратилась в пар. Какая развилась мощность при сверлении, если $n = 80\%$ всей выделенной при этом теплоты пошло на нагревание воды и обращение ее в пар?

Ответ: $P = 13$ кВт.

Решение. На основании закона сохранения энергии
$n[V\rho c(t_к - t) + mr] = P/\tau$, где $t_к$ — температура кипения воды. $P = n\tau[V\rho c(t_к - t) + mr]$.

15.52. С какой скоростью должна лететь свинцовая пуля, чтобы при ударе о препятствие она расплавилась? Первоначальная температура ее равна 27 °С. Считать, что вся выделившаяся теплота сообщается пуле.

Ответ: $v = 360$ м/с.

Решение. $mv^2/2 = cm\Delta t + m\lambda$, $v = \sqrt{2c\Delta t + \lambda}$.

15.53. С какой высоты должен упасть молот массой $M = 1000$ кг на медную болванку массой $m = 25$ г, чтобы она полностью расплавилась? Считать, что болванке передается $n = 50\%$ выделившейся теплоты. Начальная температура медной болванки $t = 23$ °С.

Ответ: $h = 2,9$ м.

Решение. $nMgh = mc\Delta T + m\lambda$, $h = (mc\Delta T + m\lambda)/nMg$.

15.54. Пуля пробивает ящик, стоящий на гладкой горизонтальной плоскости. Масса пули $m = 10$ г, масса ящика $M = 500$ г, пуля подлетает к ящику со скоростью $v_1 = 1000$ м/с, а вылетает из него со скоростью $v_2 = v_1/4$. Сколько теплоты выделилось при движении пули в ящике? Начальную и конечную скорости пули считать горизонтальными.

Ответ: $Q = 4,6$ кДж.

Решение. Согласно закону сохранения импульса скорость ящика $u = \frac{m(v_1 - v_2)}{M}$. На основании закона сохранения энергии $Q = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} - \frac{Mu^2}{2}$. $Q = \frac{m(v_1 - v_2)}{2}\left[(v_1 + v_2) - \frac{m}{M}(v_1 - v_2)\right]$; $Q = \frac{3}{32}mv_1^2\left(5 - 3\frac{m}{M}\right)$.

15.55. Свинцовая пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 100$ м/с, попадает в деревянный брусок массой $M = 1{,}9$ кг, подвешенный на длинной нити. На сколько градусов нагрелась пуля, если $n = 70\%$ выделенной при ударе теплоты пошло на ее нагревание?

Ответ: $\Delta T = 27$ К.

Решение. При ударе выделилось количество теплоты $Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m + M)u^2}{2}$, где $u = \frac{mv}{m + M}$. На нагревание пошло количество теплоты, равное $cm\Delta t = nQ$. $\Delta t = \frac{nMv^2}{2c(m + M)}$.

15.56. Алюминиевый чайник массой 400 г, в котором находится 2 кг воды при 10 °С, помещают на газовую горелку с КПД 40%. Какова мощность горелки, если через 10 минут вода закипела, причем 20 г воды выкипело?

Ответ: $P = 3{,}5$ кВт.

Решение. Коэффициент полезного действия горелки $\eta = \frac{m_а c_а (t_к - t) + m_в c_в (t_к - t) + m_0 r}{P\tau}$, где $t_к$ — температура кипения воды, m_0 — масса испарившейся воды. $P = \frac{m_а c_а (t_к - t) + m_в c_в (t_к - t) + m_0 r}{\eta\tau}$.

15.57. Реактивный самолет пролетает со скоростью $v = 900$ км/ч путь $S = 1800$ км, затрачивая массу топлива $m = 4$ т. Мощность двигателя самолета $P = 5900$ кВт, его КПД равен 23%. Какова удельная теплота сгорания топлива, применяемого самолетом?

Ответ: $q = 46$ МДж/кг.

Указание. Из уравнения теплового баланса находим $q = PS/mv\eta$.

15.58. Стальное сверло массой 0,09 кг, нагретое при закалке до 840 °С, опущено в сосуд, содержащий машинное масло при 20°С. Какое количество масла следует взять, чтобы его конечная температура не превышала 70 °С?

Ответ: $m = 0{,}3$ кг.

Решение. Из уравнения теплового баланса следует $m_м = m_с c_в (t_1 - t)/c_м (t - t_2)$, где t_1 — температура сверла, t_2 — температура масла.

15.59. Найдите частоту вращения n вала паровой машины, если среднее давление пара $p = 1$ МПа и мощность машины $P = 200$ кВт. За один оборот вала поршень делает один рабочий ход $l = 0{,}5$ м. Площадь сечения поршня $S = 0{,}2$ м^2.

Ответ: $n = 2$ с$^{-1}$.

Решение. За один оборот машина выполняет работу Fl. Сила давления пара $F = pS$. Тогда $P = \frac{Fl}{T}$, где T — период обращения вала. Частота $n = \frac{1}{T}$; $n = \frac{P}{pSl}$.

15.60. При изготовлении дроби капли расплавленного свинца падают в воду с температурой $t_0 = 17$ °С. Определите массу свинца, которая доведет $m_0 = 1$ кг воды до температуры кипения $t_к = 100$ °С.

Ответ: $m = 6{,}5$ кг.

Решение. Исходя из уравнения теплового баланса $m = \frac{m_0 c_0 (t_к - t_0)}{\lambda + c(t_{пл} - t_к)}$, где $t_{пл}$ — температура плавления свинца, c — удельная теплоемкость свинца, λ — удельная теплота кристаллизации свинца.

15.61. В калориметр с $m = 400$ г воды поместили электрическую лампочку мощностью $P = 40$ Вт. Сколько времени должна быть включена в сеть лампочка, чтобы температура воды поднялась на $\Delta t = 30°$? Теплоемкость калориметра и лампочки $C = 105$ Дж/кг.

Ответ: $t = 1340$ с.

Решение. $mc\Delta t + C\Delta t = P\tau$, $\tau = mc\Delta t + C\Delta t/P$.

15.62. Свинцовая пуля, летевшая со скоростью $v = 300$ м/с, ударяется о стальную плиту и останавливается. На сколько градусов ΔT нагрелась пуля, если $n = 40\%$ ее кинетической энергии пошло в момент удара на нагревание плиты и окружающего воздуха?

Ответ: $\Delta T = 214$ К.

Решение. Исходя из закона сохранения энергии, $mv^2(1 - n)/2 = mc\Delta t$, $\Delta t = v^2(1 - n)/2$.

15.63. Установка мощностью $P = 30$ кВт охлаждается проточной водой, текущей по спиральной трубке диаметром $d = 15$ мм. При установившемся режиме проточная вода нагревается на $\Delta t = 15$ °С. Определите скорость воды, предполагая, что вся мощность установки идет на нагрев воды.

Ответ: $v = 2{,}7$ м/с.

Решение. Условие установившегося режима $P = cm\Delta t/\tau$, где $\frac{m}{\tau}$ — масса воды, протекающей за 1 с. $\frac{m}{\tau} = \rho v S = \frac{\rho v \pi d^2}{4}$. Тогда $P = \frac{c\rho v \pi d^2 \Delta t}{4}$,

$v = \frac{4P}{c\rho\pi d^2 \Delta t}$.

15.64. В тающую льдину попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v = 10^3$ м/с. Считая, что 50% кинетической энергии превращается в теплоту и идет на плавление льда, найдите, какое количество льда растаяло.

Ответ: $m_л = 7{,}6$ г.

Решение. $0{,}5\frac{mv^2}{2} = \lambda m_л$; $m_л = \frac{mv^2}{4\lambda}$.

15.65. С какой высоты должен падать оловянный шарик, чтобы при ударе о землю он полностью расплавился? Считать, что 95% энергии шарика ушло на его нагревание и плавление. Начальная температура шарика 20 °С. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $h = 10{,}8$ км.

Решение. $0{,}75mgh = cm(t_{пл} - t) + \lambda m$, $h = \frac{c(t_{пл} - t) + \lambda}{0{,}75g}$.

15.66. Железный шарик радиусом 1*см*, нагретый до 120 °С положен на лед. На какую глубину погрузится шарик в лед? Температура окружающей среды 0 °С.

Ответ: $x = 0{,}01$ м.

Решение. Углубившись в лед на расстояние x, шарик расплавит объем льда, состоящий из объема цилиндра $\pi r^2 x$ и объема полушария $\frac{2\pi r^3}{3}$. Уравнение теплового баланса $\frac{4\pi r^3 \rho c(t - t_1)}{3} = \lambda\left(\pi r^2 x + \frac{2\pi r^3}{3}\right)\rho_1$, где ρ и ρ_1 — плотности железа и льда соответственно.

$x = \frac{2\left[2\rho c(t - t_1) - \rho_1\lambda\right]r}{3\rho_1\lambda}$.

15.67. Какое количество снега при 0 °С расходуется под колесами автомашины, если она буксует в течение 10 с? На буксовку идет 0,1% всей ее мощности $P = 55$ кВт. Удельная теплота плавления снега $\lambda = 1{,}68 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot град}$.

Ответ: $m = 0{,}33$ кг.

Решение. Уравнение теплового баланса $0{,}001P\tau = m\lambda$, $m = 0{,}001P\tau/\lambda$.

15.68. В колбе находилась вода при 0 °С. Выкачав из колбы воздух, заморозили всю воду испарением. Какая часть воды при этом испарилась, если притока тепла извне нет? Удельная теплота испарения воды при 0 °С $r = 24{,}9 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Ответ: $\frac{m_2}{m_1} = 0{,}12$.

Решение. Необходимое для образования пара тепло может быть получено только за счет теплоты отвердевания (плавления), которая освобождается при замерзании воды. $\lambda m_1 = rm_2$, $m = m_1 + m_2$,

$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda}{\lambda + r}$; $\frac{m_2}{m} = \frac{\lambda}{\lambda + r}$.

15.69. Два одинаковых ледяных метеорита летят навстречу друг другу с равными скоростями и при ударе обращаются в пар. Какова должна быть при этом минимальная скорость метеоритов, если их температура перед столкновением $t = -20$ °С?

Ответ: $v_{min} = 2{,}5 \cdot 10^5$ м/с.

Решение. Закон сохранения энергии в данном случае имеет вид: $2mv^2/2 = 2mc_л(t_{пл} - t_1) + m\lambda + mc_в(t_к - t_{пл}) + mr$, откуда

$v = \sqrt{2c_л(t_{пл} - t_1) + \lambda + c_в(t_к - t_{пл}) + r}$.

15.70. Поезд массой $m = 2000$ т при торможении с ускорением $a = 0{,}3$ м/с^2 остановился спустя время $\tau = 50$ с после начала торможения. Какое количество теплоты выделилось при торможении?

Ответ: $Q = 225$ МДж.

Решение. Выделившееся при торможении количество теплоты равно кинетической энергии движения поезда $Q = mv^2/2$. Но $v = a\tau$, тогда $Q = ma^2\tau^2/2$.

15.71. Тело массой $m = 1$ кг соскальзывает с наклонной плоскости длиной $l = 22$ м, которая образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Скорость тела у основания наклонной плоскости $v = 4$ м/с. Какое количество теплоты Q выделилось при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела $v_0 = 0$?

Ответ: $Q = 100$ Дж.

Решение. Количество теплоты, выделившееся при трении тела о плоскость, $Q = mgh - mv^2/2$. Так как $h = l\sin\alpha$, то $Q = mgl\sin\alpha - mv^2/2$.

15.72. Найти количество теплоты, которое выделилось при абсолютно неупругом соударении двух шаров, двигавшихся навстречу

друг другу. Масса первого шара $m_1 = 0,4$ кг, его скорость $v_1 = 3$ м/с. Масса второго шара $m_2 = 0,2$ кг, скорость $v_2 = 12$ м/с.

Ответ: $Q = 15$ Дж.

Указание. Запишите законы сохранения импульса и полной энергии: $m_2v_2 - m_1v_1 = (m_1 + m_2)u$; $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = Q$. Откуда $Q = \frac{m_1m_2(v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$.

16. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ К ГАЗАМ

16.1. Одинаковое ли количество тепла необходимо для нагревания газа до одной и той же температуры в сосуде, прикрытом поршнем, если: 1) поршень не перемещается; 2) поршень легко подвижный?

Ответ: Во втором случае большее, так как при расширении газа совершается работа.

16.2. Найдите внутреннюю энергию 10 моль одноатомного газа при 27 °С.

Ответ: $U = 37,4$ кДж.

Решение. Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{M}RT$, где $\frac{m}{M}$ — число молей, тогда $U = \frac{3}{2}\nu RT = 37,4$ кДж.

16.3. На сколько изменится внутренняя энергия 200 г гелия при увеличении его температуры на 20 °С?

Ответ: $\Delta U = 12,5$ кДж.

Решение. Внутренняя энергия газа при температурах T_1 и T_2 $U_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{M}RT_1$, $U_2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{M}RT_2$, тогда $\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{M}R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{M}R\Delta T = 12,5$ кДж.

16.4. Сравните внутренние энергии равных масс аргона и гелия при одинаковой температуре. $M_{He} = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль, $M_{Ar} = 40\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $\frac{U_{He}}{U_{Ar}} = 10$.

Решение. Внутренние энергии гелия и аргона $U_{He} = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{M_{He}}RT$, $U_{Ar} = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{M_{Ar}}RT$; $\frac{U_{He}}{U_{Ar}} = \frac{M_{Ar}}{M_{He}} = 10$.

16.5. Найдите внутреннюю энергию гелия, заполняющего аэростат объемом $V = 60$ м³ при давлении $p = 100$ кПа.

Ответ: $U = 9$ МДж.

Решение. Уравнение состояния газа $pV = \frac{m}{M}RT$. Внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{M}RT$. Очевидно $U = \frac{3}{2}pV = 9$ МДж.

16.6. Во сколько раз изменится внутренняя энергия одноатомного газа, если его объем уменьшить в 7,2 раз, а давление увеличить в 3,6 раз.

Ответ: Внутренняя энергия уменьшится в 2 раза.

Решение. Из предыдущей задачи $U = \frac{3}{2}pV$. Тогда $\frac{U_2}{U_1} = \frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \frac{1}{2}$.

16.7. В цилиндре под поршнем при нормальных условиях содержится $V_0 = 1$ м³ воздуха. Затем воздух нагревают на $\Delta t = 1$ °С, поршень при этом поднимается. Найдите работу расширения воздуха.

Ответ: $A = 370,4$ Дж.

Решение. Работа расширения воздуха $A = p_0(V - V_0)$. По закону Гей-Люссака $\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$, откуда $V - V_0 = \Delta V = V_0\frac{\Delta T}{T_0}$. Тогда $A = \frac{p_0V_0\Delta T}{T_0} = 370,4$ Дж.

16.8. В цилиндре при $t = 20$ °С находится $m = 2$ кг воздуха под давлением $p = 9,8\cdot10^5$ Н/м². Найдите работу воздуха при его изобарном нагревании на $\Delta t = 100$ °С. Молярная масса воздуха $M = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $A = 5,7\cdot10^4$ Дж.

Решение. Работа $A = p\Delta V$. Из уравнения состояния идеального газа $p\Delta V = \frac{m}{M}R\Delta T$. Таким образом, работа $A = \frac{m}{M}R\Delta T = 5,7\cdot10^4$ Дж. Совершаемая газом работа при изобарном нагревании не зависит от начального давления.

16.9. В вертикально расположенном цилиндре с площадью основания 10^{-2} м² под поршнем массой 10 кг находится воздух. Какую работу совершает воздух, если в процессе его изобарного нагре-

вания поршень поднимается на 0,2 м? Атмосферное давление нормальное.

Ответ: $A = 220$ Дж.

Решение. Работа воздуха $A = p\Delta V$, где $\Delta V = S \cdot h$. Давление внутри цилиндра $p = p_0 + \frac{mg}{S}$, тогда работа $A = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) S \cdot h = (p_0 S + mg)h =$ $= 220$ Дж.

16.10. Для изобарного нагревания 800 моль газа на 500 К газу сообщили количество теплоты 9,4 МДж. Определите работу газа и приращение его внутренней энергии.

Ответ: $A = 3{,}3$ МДж; $\Delta U = 6{,}1$ МДж.

Решение. Работа газа $A = \nu R \Delta T = 3{,}3$ МДж. По первому закону термодинамики $\Delta U = Q - A = 6{,}1$ МДж.

16.11. В цилиндре находится 1,6 кг кислорода при температуре 17 °С и давлении $4 \cdot 10^5$ Па. До какой температуры нужно изобарно нагреть кислород, чтобы работа по расширению была равна $4 \cdot 10^4$ Дж?

Ответ: $T_2 = 286$ К.

Решение. Работа по расширению газа $A = p\Delta V = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$, $T_2 = \frac{AM}{mR} + T = 286$ К.

16.12. Каково давление одноатомного газа, занимающего объем 2 л, если его внутренняя энергия равна 300 Дж?

Ответ: $p = 100$ кПа.

Решение. Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} RT$. Согласно уравнению состояния $pV = \frac{m}{M} RT$. Откуда следует $U = \frac{3}{2} pV$ или $p = \frac{2U}{3V} = 100$ кПа.

16.13. Какова внутренняя энергия одноатомного газа, занимающего при температуре 20 °С объем 2 л, если концентрация его молекул равна $2 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Ответ: $U = 2{,}42 \cdot 10^2$ Дж.

Решение. Внутренняя энергия $U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} RT = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{N_A} RT = \frac{3VnRT}{2N_A} =$ $= \frac{3}{2} nVkT = 2{,}42 \cdot 10^2$ Дж, где k — постоянная Больцмана.

16.14. Какую работу совершают 160 г кислорода при изобарном нагревании на 20 К?

Ответ: $A = 830$ Дж.

Решение. Работа при изобарном нагревании $A = p\Delta V$. Из уравнения Менделеева-Клапейрона $p\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T$. Тогда $A = \frac{m}{M} R\Delta V = 830$ Дж.

16.15. Какую работу совершил воздух массой 580 г при его изобарном нагревании на 20 К и какое количество теплоты ему при этом сообщили? $c_p = 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Ответ: $A = 3{,}3$ кДж; $Q = 11{,}6$ кДж.

Решение. $A = \frac{m}{M} R\Delta T = 3{,}3$ кДж. $Q = mc_p \Delta T = 11{,}6$ кДж.

16.16. Найти увеличение внутренней энергии 4 кг водорода при повышении его температуры на 5 К. $c_p = 14 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $\Delta U = 197$ кДж.

Решение. Первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A$, $\Delta U = Q - A$, $Q = mc_p \Delta T$, $A = p\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T$, $\Delta U = mc_p \Delta T - \frac{m}{M} R\Delta T = 197$ кДж.

16.17. На сколько изменилась внутренняя энергия одноатомного газа, количество вещества которого 40 моль, при его изобарном нагревании на 200 К. Какую работу совершил при этом газ и какое количество теплоты ему было сообщено?

Ответ: $\Delta U = 100$ кДж; $A = 66$ кДж; $Q = 166$ кДж.

Решение. По первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A$,

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} R\Delta T = \frac{3}{2} \nu R\Delta T, \quad A = p\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T = \nu R\Delta T.$$

$$Q = \frac{5}{2} \nu R\Delta T = \frac{5}{2} A.$$

16.18. При изотермическом расширении идеальный газ совершает работу $A = 40$ Дж. Какое количество теплоты Q сообщено газу?

Ответ: $Q = 40$ Дж.

Решение. При $T = \text{const}$, $\Delta U = mc\Delta T = 0$. $Q = \Delta U + A = A = 40$ Дж.

16.19. 2 кмоля углекислого газа нагреваются при постоянном давлении на 50 °С. Найдите работу расширения.

Ответ: $A = 830$ кДж.

Решение. Работа расширения $A = \frac{m}{M}R\Delta T = \nu R\Delta T = 830$ кДж.

16.20. Углекислый газ массой 10 г нагрет от 20 до 30 °С при постоянном давлении. Найдите работу расширения газа и изменение его внутренней энергии. Удельная теплоемкость углекислого газа при постоянном объеме $c_V = 0,83 \cdot 10^3 \ \frac{Дж}{кг \cdot К}$.

Ответ: $A = 18,9$ Дж; $\Delta U = 83$ Дж.

Решение. Работа расширения газа $A = p(V_2 - V_1)$. Объемы V_1 и V_2 найдем из уравнения состояния: $V_1 = \frac{mRT_1}{Mp}$, $V_2 = \frac{mRT_2}{Mp}$. Работа $A = \frac{mR(T_2 - T_1)}{M} = 18,9$ Дж. Изменение внутренней энергии газа $\Delta U = c_V m(T_2 - T_1) = 83$ Дж.

16.21. Кислород массой 6 г при температуре 30 °С расширяется при постоянном давлении, увеличивая свой объем в 2 раза вследствие притока теплоты извне. Найдите работу расширения, изменение внутренней энергии газа и количество теплоты, сообщенное кислороду. $c_V = 0,92 \cdot 10^3 \ \frac{Дж}{кг \cdot К}$.

Ответ: $A = 473$ Дж; $\Delta U = 1,67$ кДж; $Q = 2,14$ кДж.

Решение. См. решение предыдущей задачи. $A = p(2V_1 - V_1) = pV_1$, $V_1 = mRT_1/Mp$, $A = mRT_1/M$. $\Delta U = c_V m(T_2 - T_1)$, $T_2 = V_2T_1/V_1 = 2T_1$, $\Delta U = c_V mT_1$. $Q = \Delta U + A$.

16.22. Какое количество теплоты необходимо сообщить для нагревания на $\Delta T = 20$ К гелия массой $m = 40$ г, содержащегося в баллоне? Чему равна удельная теплоемкость гелия?

Ответ: $Q = 2,5$ кДж; $c_V = 3,1 \ \frac{кДж}{кг \cdot К}$.

Решение. Первый закон термодинамики: $Q = \Delta U + A$, при $V =$ const $\Delta V = 0$, $A = p\Delta V = 0$. $Q = \Delta U = c_V m\Delta T$. Внутренняя энергия гелия $U = \frac{3m}{2M}RT$, следовательно, $Q = \Delta U = \frac{3m}{2M}R\Delta T = 2,5$ кДж, а $c_V = \frac{3R}{2M} = 3,1\frac{кДж}{кг \cdot К}$.

16.23. Неон, находившийся при нормальных условиях в закрытом сосуде емкостью $V = 20$ л, охладили на $\Delta T = 91$ К. Найдите изменение внутренней энергии газа и количество отданной им теплоты.

Ответ: $\Delta U = Q = 1$ кДж.

Решение. Изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3m}{2M}R\Delta T$. Так как $\frac{m}{M}R = \frac{pV}{T}$ (из уравнения состояния), то $\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \frac{pV}{T}\Delta T$. $Q = \Delta U = 1$ кДж.

16.24. В сосуде емкостью $V = 2$ л находится криптон под давлением $p_1 = 1$ МПа. Стенки сосуда могут выдержать давление до $p_2 = 2$ МПа. Какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу?

Ответ: $Q = 3$ кДж.

Решение. Аналогично предыдущим задачам 16.22 и 16.23. $\Delta U = \frac{3m}{2M}R\Delta T = \frac{3}{2}V(p_2 - p_1)$. $Q = \Delta U = 3$ кДж.

16.25. Баллон емкостью $V = 50$ л содержит аргон при температуре $T_1 = 290$ К под давлением $p_1 = 500$ кПа. Каковы будут температура и давление газа, если ему сообщить $Q = 5$ кДж теплоты?

Ответ: $p_2 = 0,57$ МПа; $T_2 = 329$ К.

Решение. $V =$ const, $Q = \Delta U = \frac{3}{2}V(p_2 - p_1)$ для одноатомного аргона, $p_2 = p_1 + \frac{2Q}{3V} = 0,57$ МПа. Так как $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, то $T_2 = T_1\left(1 + \frac{2Q}{3Vp_1}\right) = 329$ К.

16.26. Один моль одноатомного газа нагревается до температуры $T = 280$ К. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его давление увеличилось в $n = 3$ раза?

Ответ: $Q = 7$ кДж.

Решение. Аналогично предыдущей задаче $Q = \frac{3}{2}(n-1)pV$, $pV = \frac{m}{M}RT$. $Q = \frac{3}{2}(n-1)RT = 7$ кДж, так как $\frac{m}{M} = 1$ моль.

16.27. Какую работу совершает газ при переходе из состояния 1 в состояние 4 (рис. 16.1)?

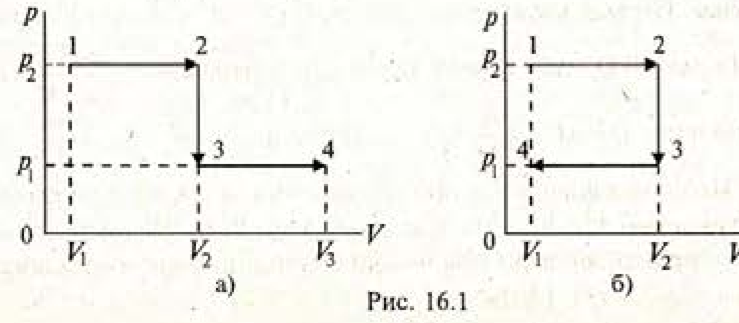


Рис. 16.1

Решение. а) $A = p_2(V_2 - V_1) + p_1(V_3 - V_2)$.

б) $A = p_2(V_2 - V_1) + p_1(V_1 - V_2) = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$.

16.28. Гелий нагревался при постоянном давлении. При этом ему было сообщено 20 кДж теплоты. Определите изменение внутренней энергии газа и совершенную им работу.

Ответ: $\Delta U = 12$ кДж; $A = 8$ кДж.

Решение. Согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A$, $\Delta U = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{M}R\Delta T$, $A = \frac{m}{M}R\Delta T$, $Q = \frac{5}{2}\cdot\frac{m}{M}R\Delta T = \frac{5}{2}A$; $A = \frac{2}{5}Q = 8\,\text{кДж}$. $\Delta U = \frac{3}{5}Q = 12\,\text{кДж}$.

16.29. Криптон массой $m = 1$ г был нагрет на $\Delta T = 100$ К при постоянном давлении. Какое количество теплоты получил газ?

Ответ: $Q = 25$ Дж.

Решение. Аналогично предыдущей задаче $Q = \frac{5}{2}\cdot\frac{m}{M}R\Delta T = 25\,\text{Дж}$.

16.30. Определите работу расширения 20 л газа при изобарическом нагревании от 300 К до 393 К. Давление газа 80 кПа.

Ответ: $A = 496$ Дж.

Решение. Работа расширения газа $A = p\Delta V = \frac{m}{M}R\Delta T$, $\frac{m}{M}R = \frac{pV}{T_1}$ (из уравнения состояния). $A = \frac{pV\Delta T}{T_1} = 496\,\text{Дж}$.

16.31. В вертикальном цилиндре под тяжелым поршнем находится кислород массой $m = 2$ кг. Для повышения температуры кислорода на $\Delta T = 5\,\text{К}$ ему было сообщено количество теплоты $Q = 9160$ Дж. Найдите удельную теплоемкость кислорода c_p, работу A, совершаемую им при расширении, и увеличение его внутренней энергии ΔU. Молярная масса кислорода $M = 0{,}032$ кг/моль.

Ответ: $c_p = 916\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$; $A = 2{,}59$ кДж; $\Delta U = 6{,}57$ кДж.

Решение. Исходя из условия равновесия поршня, ясно, что давление кислорода остается постоянным, $Q = c_p m\Delta T$, $c_p = \frac{Q}{m\Delta T}$. Работа расширения $A = p\Delta V = \frac{m}{M}R\Delta T$. $\Delta U = Q - A$.

16.32. Некоторая масса газа находится в баллоне объемом $V = 1$ л. После выпускания части газа из баллона давление в нем уменьшилось на $\Delta p = 56$ кПа, а масса баллона с газом на $\Delta m = 2$ г. Температура газа при этом не изменилась. Найдите плотность ρ_0 газа при нормальном давлении $p_0 = 0{,}1$ МПа и температуре опыта.

Ответ: $\rho_0 = 3{,}7$ кг/м³.

Решение. Записав уравнения состояния до и после выпуска газа из баллона и вычтя одно из другого, получим $V\Delta p = \frac{\Delta m}{M}RT$. Плотность ρ_0 найдем из уравнения состояния при нормальных условиях: $\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT} = \frac{p_0\Delta m}{V\Delta p} = 3{,}7\,\text{кг/м}^3$.

16.33. В теплоизолированном сосуде объемом $V = 5{,}6$ л находится кислород при температуре $t_1 = 66$ °С и давлении $p_1 = 0{,}25$ МПа. Для нагрева газа до температуры $t_2 = 68$ °С ему требуется сообщить количество теплоты $Q = 21$ Дж. Какова удельная теплоемкость c кислорода при этих условиях? Молярная масса кислорода $M = 0{,}032$ кг/моль. Тепловым расширением сосуда пренебречь.

Ответ: $c_V = 660\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

Решение. При $V = \text{const}$ $Q = \Delta U = c_V m(T_2 - T_1)$, $c_V = \frac{Q}{m(T_2 - T_1)}$. Из уравнения состояния $m = \frac{p_1 VM}{RT_1}$; $c_V = \frac{QRT_1}{p_1 VM(T_2 - T_1)} = 660\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

16.34. Какое количество теплоты необходимо для нагревания на $\Delta T = 16$ °С кислорода массой $m = 7\cdot 10^{-3}$ кг, находящегося в цилиндре под поршнем, на котором лежит груз, если теплоемкость одного моля кислорода при постоянном объеме равна $C_V = 21\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$?

Ответ: $Q = 102$ Дж.

Решение. Количество теплоты $Q = c_p m\Delta T$. Молярная теплоемкость $C_p = c_p M$ и $C_p - C_V = R$. $Q = (C_V + R)\frac{m}{M}\Delta T = 102\,\text{Дж}$.

16.35. В цилиндре находится азот при температуре 20 °С. На высоте 50 см от основания цилиндра расположен легкий поршень, на котором лежит груз массой 100 кг. Определите работу, которую совершит газ при изобарическом нагревании его до 60 °С. Площадь основания цилиндра 100 см². Атмосферное давление нормальное.

Ответ: $A = 136$ Дж.

Решение. Исходя из условия равновесия поршня, давление внутри цилиндра $p = \frac{Mg}{S} + p_0$, где $\frac{Mg}{S}$ — давление груза, p_0 — атмосферное давление. Работа газа $A = p\Delta V$, $\Delta V = V_2 - V_1$, $V_1 = Sh$, $V_2 = \frac{V_1 T_2}{T_1}$ и $A = \left(\frac{Mg}{S} + p_0\right) V_1 \frac{(T_2 - T_1)}{T_1} = 136$ Дж.

16.36. Температуру газа, имеющего массу m и молярную массу μ, повышают на величину ΔT один раз при постоянном давлении p, а другой раз при постоянном объеме V. Насколько отличаются сообщенные газу количества теплоты Q_p, Q_V и удельные теплоемкости c_p, c_V при постоянном давлении и постоянном объеме?

Ответ: $Q_p - Q_V = \frac{mR\Delta T}{M}$; $c_p - c_V = \frac{R}{M}$.

Решение. Согласно первому началу термодинамики $Q = \Delta U + A$, но $A = \frac{m}{M} R\Delta T$. Следовательно, $Q - \Delta U = \frac{m}{M} R\Delta T$. Так как $\Delta U = Q_V$, то $Q_p - Q_V = \frac{m}{M} R\Delta T$. По определению $c_p = \frac{Q_p}{m\Delta T}$, $c_V = \frac{Q_V}{m\Delta T}$, тогда $c_p - c_V = \frac{mR\Delta T}{Mm\Delta T} = \frac{R}{M}$.

16.37. В теплоизолированном цилиндре с поршнем находится азот массой $m = 0{,}2$ кг при температуре $t_1 = 20$ °С. Азот, расширяясь, совершает работу $A = 4{,}47$ кДж. Найдите изменение внутренней энергии азота ΔU и его температуру T_2 после расширения. Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме $c_V = 745 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Ответ: $\Delta U = 4{,}47$ кДж; $T_2 = 263$ К.

Решение. Так как газ в цилиндре теплоизолирован, то он совершает работу только за счет уменьшения ΔU своей внутренней энергии. Поэтому $\Delta U = A$. С другой стороны $\Delta U = mc_V(T_1 - T_2)$. Отсюда $T_2 = T_1 - \Delta U / mc_V = 263$ К.

16.38. Для повышения температуры газа, имеющего массу $m = 20$ кг и молярную массу $M = 0{,}028$ кг/моль, на $\Delta T = 50$ К при постоянном давлении необходимо затратить количество теплоты $Q_p = 0{,}5$ МДж. Какое количество теплоты Q_V следует отнять от этого газа при постоянном объеме, чтобы его температура понизилась на $\Delta T = 50$ К?

Ответ: $Q_V = 0{,}2$ МДж.

Решение. При изменении температуры газа на одну и ту же величину ΔT при $V = \text{const}$ и $p = \text{const}$ разность количеств теплоты $Q_p - Q_V = \frac{mR\Delta T}{M}$ (см. задачу 16.36); отсюда $Q_V = Q_p - \frac{mR\Delta T}{M}$.

16.39. Давление азота в сосуде объемом $V = 3$ л после нагревания возросло на $\Delta p = 2{,}2$ МПа. Найдите количество теплоты Q, сообщенное газу. Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме $c_V = 745 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, его молярная масса $M = 0{,}028$ кг/моль.

Ответ: $Q = 16{,}5$ кДж.

Решение. Количество теплоты, сообщенное газу при постоянном объеме, $Q = mc_V(T_2 - T_1)$. $(T_2 - T_1)$ найдем, записав уравнения состояния газа до и после нагревания и вычтя одно уравнение из другого. $T_2 - T_1 = \frac{MV\Delta p}{mR}$. Тогда $Q = \frac{Mc_V V\Delta p}{R} = 16{,}5$ кДж.

16.40. В вертикально расположенном цилиндре под поршнем находится газ объемом $V = 2$ л при температуре $T_1 = 299$ К. Найдите работу расширения газа при нагревании его на $\Delta T = 100$ К. Масса поршня $m = 100$ кг, его площадь $S = 50$ см^2, атмосферное давление нормальное.

Ответ: $A = 80$ Дж.

Указание. См. задачу 16.30. $A = \frac{pV\Delta T}{T_1}$, где $p = p_0 + \frac{mg}{S}$. Тогда

$$A = \frac{(p_0 + \frac{mg}{S})V\Delta T}{T_1} = 80 \text{ Дж}.$$

16.41. Каковы первоначальный объем и температура гелия, находящегося под поршнем в цилиндре, если при охлаждении до –23 °С груз массой 16 кг, лежащий на поршне совершает работу 40 Дж? Площадь поршня 200 см^2, атмосферное давление нормальное, масса поршня 5 г.

Ответ: $T_0 = 254$ К; $V_0 = 0{,}024$ м^3.

Решение. Работа при изменении температуры на ΔT:

$$A = p\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T, \quad \Delta T = T_0 - T, \quad T_0 = T + \frac{AM}{mR} = 254 \text{ К}.$$

Газ в цилиндре находится под давлением $p_0 + \frac{Mg}{S}$. Из уравнения состояния газа $V_0 = \frac{mRT_0}{M\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)} = 0{,}024$ м^3.

16.42. В цилиндре объемом 200 см³, под поршнем массой 50 г и площадью 50 см² находится газ при температуре 300 К. При сообщении газу количества теплоты равное 46,5 Дж температура газа повысилась на 100 К. Найдите изменение внутренней энергии газа. Атмосферное давление 10^5 Па.

Ответ: $\Delta U = 33$ Дж.

Решение. Согласно первому началу термодинамики $\Delta U = Q - A$. Работа газа $A = \frac{m}{M}R\Delta T$. Из уравнения состояния идеального газа

$$\frac{m}{M}R = \frac{\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)V}{T},\ A = \frac{\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)V\Delta T}{T},\ \Delta U = Q - \frac{\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)V\Delta T}{T} = 33\ \text{Дж}.$$

16.43. Кислород массой $m = 0{,}3$ кг при температуре $T = 320$ К охладили изохорно, вследствие чего его давление уменьшилось в $n = 3$ раза. Затем газ изобарно расширили так, что температура его стала равной первоначальной. Какую работу совершил газ? Как изменилась его внутренняя энергия?

Ответ: $A = 17$ кДж; $U = \text{const}$.

Решение. При изохорном процессе работа не совершается ($V = \text{const}$, $\Delta V = 0$, $A = p\Delta V = 0$). Согласно закону Шарля $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, $p_1 = np_2$. Отсюда следует $T_2 = T_1/n$, а $\Delta T = T_1(n-1)/n$. При изобарном процессе $A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R\Delta T = \frac{m}{M}RT_1(n-1)/n = 17$ кДж. Внутренняя энергия не изменилась, так как $\Delta U = c_V m\Delta T$, а $\Delta T = \text{const}$.

16.44. Идеальная тепловая машина получает от нагревателя, температура которого 500 К, за один цикл 3360 Дж теплоты. Найдите количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику, температура которого 400 К. Найдите работу машины за один цикл.

Ответ: $Q_2 = 2688$ Дж; $A = 672$ Дж.

Решение. КПД идеальной тепловой машины $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$. Откуда $Q_2 = \frac{Q_1 T_2}{T_1} = 2688$ Дж. Работа машины за 1 цикл $A = Q_1 - Q_2 = 672$ Дж.

16.45. Найдите работу тепловой машины за один цикл, изображенный на рис. 16.2.

Ответ: $A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$.

Решение. Работа расширения газа численно равна площади фигуры, ограниченной графиком $p = p(V)$, осью абсцисс и ординатами начальной и конечной точек графика. На участках $1 \to 2$ и $2 \to 4$ $A = 0$, т. к. $V = \text{const}$. $A = p_2(V_2 - V_1) - p_1(V_2 - V_1) = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$.

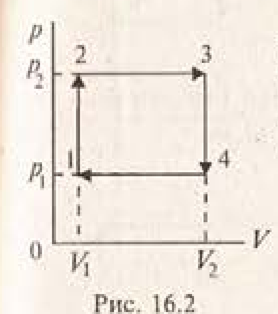


Рис. 16.2

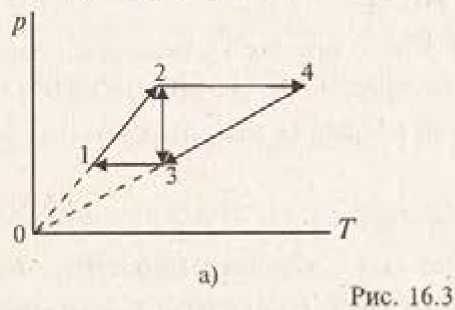
16.46. На рис. 16.2 в координатах p — V изображен круговой процесс некоторой массы идеального газа. Укажите, на каких стадиях процесса газ получал и на каких отдавал тепло.

Ответ: Получал: $2 \to 3$, $1 \to 2$; отдавал: $3 \to 4$, $4 \to 1$.

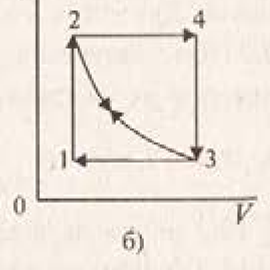
Указание. Воспользуйтесь законом сохранения энергии $Q = \Delta U + A$.

16.47. Над идеальным газом (рис. 16.3а) проводят два замкнутых процесса: процесс $1 \to 2 \to 3 \to 1$ и процесс $3 \to 2 \to 4 \to 3$. В каком из них газ совершает большую работу?

Ответ: При процессе $3 \to 2 \to 4 \to 3$.



а)



б)

Рис. 16.3

Указание. Начертите диаграммы этих процессов в координатах p — V (рис. 16.3б). Получим прямоугольник 1234, точки 2, 3 которого лежат на изотерме. Работа, совершаемая газом, равна площади фигуры цикла на диаграмме p — V. Очевидно, $S_{3243} > S_{1231}$.

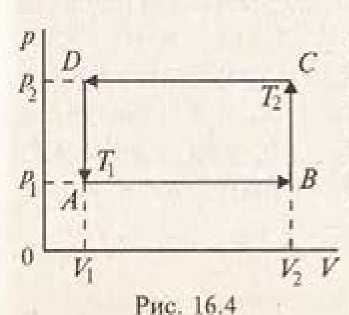


Рис. 16.4

16.48. Масса m азота совершает круговой процесс $ABCDA$ (рис. 16.4). В ходе процесса объем изменяется от V_1 до V_2 (AB) и от V_2 до V_1 (CD). Вычислите совершаемую газом работу, если температура азота в точке A равна T_1, а в точке C — T_2.

Решение. Работа совершается на участке AB и на участке CD.

$$A = A_{AB} + A_{CD} = p_1(V_2 - V_1) + p_2(V_1 - V_2) = p_2(V_1 - V_2) - p_1(V_1 - V_2) =$$

$$= (p_2 - p_1)(V_1 - V_2),\ \text{где}\ p_2 = \frac{m}{M}\cdot\frac{RT_2}{V_2},\ p_1 = \frac{m}{M}\cdot\frac{RT_1}{V_1}.$$

$$A = \frac{m}{M}R\left(\frac{T_2}{V_2} - \frac{T_1}{V_1}\right)(V_1 - V_2).$$

16.49. В цилиндре тепловой машины находится 1 моль идеального газа. Найдите работу газа за один цикл (рис. 16.5а).

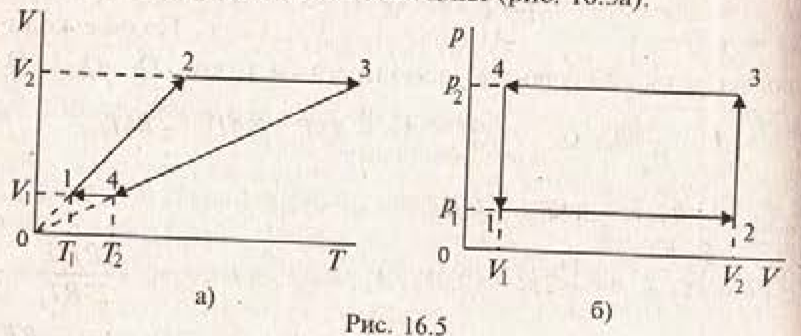


Рис. 16.5

Решение. Для нахождения работы газа необходимо представить заданный цикл в координатах $p - V$ (рис. 16.5б). $A = p_1(V_2 - V_1) + p_2(V_1 - V_2)$. Выразим p_1 и p_2 из уравнений состояния газа, получим

$$A = -R(T_2 - T_1)\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right).$$

16.50. Над молем идеального газа совершают замкнутый цикл (рис. 16.6). Температура в точке 1 равна T_1, в точке 3 – T_3, а температуры в точках 2 и 4 лежат на одной изотерме. Найдите работу цикла.

Рис. 16.6

Решение. Работа, совершенная газом за цикл, равна площади под графиком процесса на диаграмме $p - V$. $A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = p_2V_2 - p_2V_1 - p_1V_2 + p_1V_1$. Из уравнения газового состояния для точек 1, 2, 3 и 4 получаем $p_1V_1 = RT_1$, $p_2V_2 = RT_3$, $p_1V_2 = RT$, $p_2V_1 = RT$, где T — неизвестная температура газа в состояниях 2 и 4. $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T}$, $\frac{p_2}{T_1} = \frac{T_3}{T}$, откуда $T = \sqrt{T_1T_3}$. $A = R(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1T_3}) =$ $= R(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3})^2$.

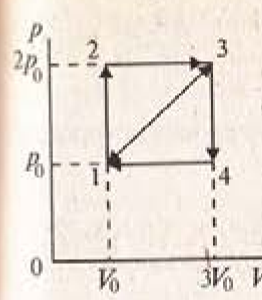


Рис. 16.7

16.51. На рис. 16.7 изображены два замкнутых цикла: $1 \to 2 \to 3 \to 1$ и $1 \to 3 \to 4 \to 1$. Оба цикла проведены с 1 молем идеального одноатомного газа. У какого из циклов КПД выше и во сколько раз?

Ответ: $\eta_2/\eta_1 = 23/21$.

Решение. Температура точки 1 — T_0, тогда точки 2 — $T_2 = 2T_0$, $T_3 = 6T_0$, $T_4 = 3T_0$.

1) Цикл $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Полное количество теплоты, полученное одноатомным газом, $Q_1 = Q_{1-2} + Q_{2-3}$.

$$Q_{1-2} = \Delta U_1 = \frac{3}{2}RT_0,\ Q_{2-3} = \Delta U_2 + A = \frac{3}{2}R4T_0 + R4T_0 = \frac{5}{2}R4T_0.$$

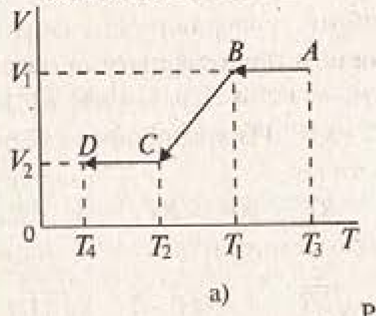
$$Q_1 = \frac{3}{2}RT_0 + \frac{5}{2}R4T_0 = \frac{23}{2}RT_0.$$

Работа $A_{2-3} = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(3V_0 - V_0) = p_0V_0 = RT_0$. $\eta_1 = \frac{RT_0 2}{23RT_0} = \frac{2}{23}$.

На участке $3 \to 1$ газ отдает холодильнику $Q_{3-1} = Q_1 - A = \frac{21}{2}RT_0$.

2) Цикл $1 \to 3 \to 4 \to 1$. На участке $3 \to 4$ и $4 \to 1$ газ отдает теплоту, а получает на участке $1 \to 3$ $Q_2 = Q_{3-1} = \frac{21}{2}RT_0$. Работа во втором цикле, так же как и в первом равна RT_0. $\eta_2 = \frac{2}{21}$. Отношение $\eta_2/\eta_1 = 23/21$.

16.52. Масса m водорода совершает процесс $ABCD$ (рис. 16.8а). В состоянии B газ имел температуру T_1 и объем V_1, а в состоянии C — объем V_2. Вычислите выполненную над газом работу.



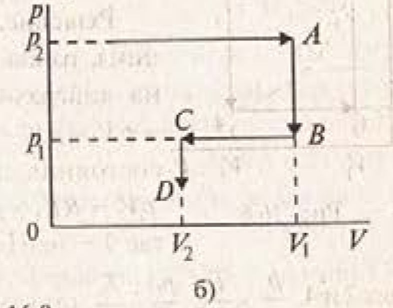


Рис. 16.8

Решение. Представим заданный процесс на диаграмме $p - V$ (рис. 16.8б). Очевидно, работа совершается только на участке ВС.

$A = p_1(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1) = \frac{m}{M}R(\frac{T_1V_2}{V_1} - T_1) = \frac{m}{M}\cdot\frac{RT_1}{V_1}(V_2 - V_1) =$

$= -\frac{m}{M}R\frac{T_1}{V_1}(V_1 - V_2)$. Знак «–» говорит о том, что работу совершают над газом.

16.53. Определите работу, совершенную газом в замкнутом цикле $ABCA$ (рис. 16.9), имеющем на диаграмме p — V вид полуокружности.

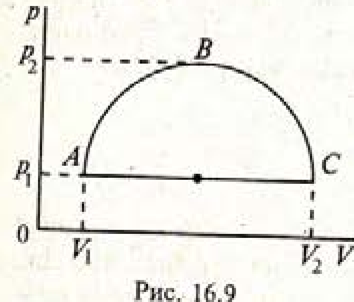


Рис. 16.9

Решение. Работа, совершаемая газом, определяется площадью полукруга ABC. $S_1 = \frac{1}{2}S$, где $S_1 = \frac{\pi R^2}{4}$ — площадь $\frac{1}{4}$ круга. $S_1 = \frac{\pi}{4}(p_2 - p_1)\frac{(V_2 - V_1)}{2}$.

Тогда $S = 2S_1 = \frac{\pi}{4}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$.

16.54. Найдите работу, совершенную газом от состояния 1 до состояния 2, для процесса с идеальным одноатомным газом (рис. 16.10). $V_1 = 1$ м³, $p_1 = 10^5$ Па.

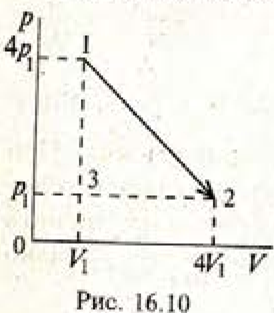


Рис. 16.10

Ответ: $A = 4{,}5 \cdot 10^5$ Дж.

Решение. Процесс представляет собой линейную зависимость давления от объема. Работа равна площади треугольника 123 с катетами $(4p_1 - p_1)$ и $(4V_1 - V_1)$.

$A = \frac{1}{2}3p_1 3V_1 = 4{,}5p_1V_1 = 4{,}5 \cdot 10^5$ Дж.

16.55. Определите КПД цикла Карно, если температуры нагревателя и холодильника соответственно равны 200 °С и 11 °С. На сколько нужно повысить температуру источника, чтобы КПД цикла повысился вдвое?

Ответ: $\eta_1 = 0{,}4$; $\Delta T = 948$ K.

Решение. КПД цикла Карно $\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. $\eta_1 = 0{,}4$. $\eta_2 = 2\eta_1 = 0{,}8$.

$\eta_2 = 1 - \frac{T_2}{T_1'}$. $T_1' = \frac{T_2}{1 - \eta_2}$, $T_1' - T_1 = 948$ K.

16.56. Теплосиловая установка работает по циклу Карно. Определить КПД установки, если температура нагревателя 600 °С, а температура холодильника 15 °С.

Ответ: $\eta = 0{,}67$.

Решение. $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0{,}67$.

16.57. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится ежечасно с помощью холодильника $270 \cdot 10^6$ Дж теплоты при температуре 9 °С. Определите мощность установки, если количество подводимой теплоты равно $900 \cdot 10^6$ Дж/ч?

Ответ: $N = 175$ кВт.

Решение. $N = \frac{A}{t} = \frac{Q_H - Q_X}{t} = 175$ кВт.

16.58. В идеальной тепловой машине за счет каждого килоджоуля энергии, получаемой от нагревателя, совершается работа 300 Дж. Определить КПД машины и температуру холодильника, если температура нагревателя 400 K.

Ответ: $\eta = 30\%$; $T_X = 280$ K.

Решение. КПД идеальной тепловой машины $\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = \frac{A}{Q_H} =$

$= 30\%$; $\eta = \frac{T_H - T_X}{T_H}$; $T_X = T_H(1 - \eta) = 280$ K.

16.59. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80 % тепла, полученного от нагревателя, передается холодильнику. Найдите КПД цикла, работу совершенную при полном цикле, если количество тепла, получаемого от нагревателя, равно $6{,}3 \cdot 10^3$ Дж.

Ответ: $\eta = 20\%$; $A = 1{,}26 \cdot 10^3$ Дж.

Решение. $\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = 20\%$; $A = Q_H - Q_X = Q_H - 0{,}8Q_H = 0{,}2Q_H =$

$= 1{,}26 \cdot 10^3$ Дж.

16.60. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Определите КПД цикла, если известно, что за один цикл была произведена работа $3 \cdot 10^3$ Дж и холодильнику было передано $13{,}4 \cdot 10^3$ Дж.

Ответ: $\eta = 18$ %.

Решение. КПД идеальной тепловой машины $\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = \frac{A}{Q_X + A} = 18\%$

16.61. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в 3 раза выше абсолютной температуры холодильника. Определите долю теплоты, отдаваемой холодильнику.

Ответ: $\frac{Q_X}{Q_H} = \frac{1}{3}$.

Решение. Коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины равен $\eta = \frac{T_H - T_X}{T_H}$ или $\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H}$. Приравняв эти равенства, получим $\frac{Q_X}{Q_H} = \frac{T_X}{T_H} = \frac{1}{3}$.

16.62. Газ, совершающий цикл Карно, $n = 70\%$ теплоты, полученной от нагревателя, отдает холодильнику. Температура нагревателя $T_H = 430$ К. Определите температуру холодильника.

Ответ: $T_X = 301$ К.

Указание. См. предыдущую задачу. $\frac{Q_X}{Q_H} = \frac{T_X}{T_H} = 0,7$. $T_X = 0,7T_H = 301$ К.

16.63. Газ совершает цикл Карно. Температура холодильника $T_1 = 280$ К, нагревателя $T_2 = 380$ К. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температуру нагревателя повысить на $\Delta T = 200$ К?

Ответ: $n = \frac{\eta_2}{\eta_1} = 1,96$.

Решение. $\eta_1 = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$; $\eta_2 = \frac{(T_2 + \Delta T) - T_1}{T_2 + \Delta T}$; $n = \frac{\eta_2}{\eta_1} = 1,96$.

16.64. В паровой турбине расходуется $m = 0,45$ кг дизельного топлива, при сгорании которого выделяется теплота на совершение работы $A = 1,4$ кВТ · ч. Температура поступающего в турбину пара $T_H = 520$ К, температура холодильника $T_X = 300$ К. Сравните фактический КПД турбины и КПД идеальной тепловой машины, работающей при тех же температурных режимах. Удельная теплота сгорания дизельного топлива $q = 4,6 \cdot 10^7$ Дж/кг.

Ответ: $\eta_1 = 24\%$; $\eta_2 = 42\%$.

Решение. Коэффициент полезного действия тепловой машины (фактический) равен $\eta_1 = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H}$, где $Q_H - Q_X = A_П$ — полезная работа. $Q_H = qm$. Коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины $\eta_2 = \frac{T_H - T_X}{T_H} = 42\%$, $\eta_1 = \frac{A}{qm} = 24\%$.

16.65. Какую максимальную полезную мощность может развивать двигатель автомобиля, если он расходует в течение $t = 1$ ч, $m = 5$ кг бензина? Температура газов в цилиндре двигателя достигает $T_1 = 1200$ К. Отработанные газы имеют температуру $T_2 = 370$ К.

Ответ: $P_{max} = 44$ кВт.

Решение. Коэффициент полезного действия двигателя автомобиля $\eta = \frac{P\tau}{mq}$. Мощность P максимальна при максимальном КПД.

$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, $P_{max} = \frac{(T_1 - T_2)mq}{T_1\tau} = 44$ кВт.

17. ВЛАЖНОСТЬ. СВОЙСТВА ПАРОВ И ЖИДКОСТИ

17.1. Осенью после восхода солнца туман над рекой держится довольно долго. Чем это объясняется?

Ответ: Абсолютная влажность воздуха над рекой больше, чем над землей.

17.2. Почему осенью облака оказываются ближе к земле, чем летом?

Ответ: Осенью холодные слои воздуха ближе к земной поверхности, чем летом. Поэтому в них происходит конденсация водяных паров, образуются облака.

17.3. Роса выпадает обычно утром при ясном, безоблачном небе. Ночью при густой облачности росы не бывает. Почему?

Ответ: Роса образуется при охлаждении земной поверхности. Облака препятствуют такому охлаждению.

17.4. Давление водяного пара при 14 °C было равно 10^3 Па. Был ли этот пар насыщенным?

Ответ: Нет.

Решение. Из таблицы 8 (см. Приложение) получим значение давления насыщенного водяного пара при $t = 10$ °C: $p_н = 1,6 \cdot 10^3$ Па, следовательно, при $p = 10^3$ Па пар не насыщенный.

17.5. Плотность водяного пара при 25 °C равна 23 г/м³. Является ли пар насыщенным?

Ответ: Да.

Решение. По таблице 8 находим, что при $t = 25$ °C плотность насыщенного пара $\rho_н = 23$ г/м³, что совпадает с данными задачи.

17.6. В закрытом сосуде емкостью 2 л находится насыщенный водяной пар при 20 °С. Сколько воды образуется в сосуде при понижении температуры до 5 °С?

Ответ: $m_в = 21$ мг.

Решение. При $t_1 = 20$ °С плотность насыщенного водяного пара $\rho_{н_1} = 17,3$ г/м³, масса пара $m_{п_1} = \rho_{н_1}V$, $m_{п_1} = 34,6 \cdot 10^{-3}$ г. При $t_2 = 5$ °С. $\rho_{н_2} = 6,8$ г/м³, $m_{п_2} = \rho_{н_2}V$; $m_{п_2} = 13,6 \cdot 10^{-3}$ г, тогда масса воды $m_в = m_{п_1} - m_{п_2} = V\left(\rho_{н_1} - \rho_{н_2}\right) = 21$ мг.

17.7. Плотность насыщенного пара ртути при 20 °С равна 0,02 г/м³. Найдите давление пара при этой температуре. $M(\text{Hg}) = 201 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $p = 0,24$ Па.

Решение. Согласно уравнению состояния газа (уравнение Менделеева-Клапейрона) $pV = mRT/M$. Плотность пара $\rho = m/V$, тогда $p = \rho RT/M = 0,24$ Па.

17.8. Во сколько раз концентрация молекул насыщенного водяного пара при 50 °С больше, чем при 5 °С?

Ответ: $n_1/n_2 = 12,2$.

Решение. Концентрация молекул $n = N/V$, или $n = \rho/m_0$, где ρ — плотность газа, m_0 — масса одной молекулы. $n_1/n_2 = \rho_1/\rho_2$. $\rho_1(t = 50$ °С$) = 83$ г/м³, $\rho_2(t = 5$ °С$) = 6,8$ г/м³. $n_1/n_2 = 12,2$.

17.9. При каком давлении вода будет кипеть при 19 °С?

Ответ: $p = 2,2$ кПа.

Решение. Вода начинает кипеть, если давление будет равно давлению насыщенного пара при данной температуре. При $t = 19$ °С $p_н = 2,2$ кПа (см. табл. 8).

17.10. Парциальное давление водяного пара в воздухе при 19 °С было 1,1 кПа. Найдите относительную влажность.

Ответ: $B = 50$ %.

Решение. Относительная влажность $B = \dfrac{p}{p_н} \cdot 100\%$, где p — парциальное давление водяного пара в воздухе, $p_н$ — давление насыщенного пара при данной температуре. $p_н(t = 19$ °С$) = 2,2 \cdot 10^3$ Па, $B = 50$ %.

17.11. В цилиндре под поршнем находится 3 г водяного пара при температуре 30 °С. Газ изотермически сжимают. При каком объеме выпадет роса?

Ответ: $V < 100$ л.

Решение. Давление насыщенного пара при температуре $t = 30$ °С $p = 4,24 \cdot 10^3$ Па. Насыщенный пар согласно уравнению состояния должен занимать объем $V = mRT/Mp$. $V = 98,8$ л, т. е. объем, при котором выпадет роса, меньше 100 л.

17.12. В баллоне емкостью 50 л находится 0,3 г водяного пара при температуре 17 °С. Как сделать пар насыщающим?

Ответ: Охладить до 3 °С.

Решение. Найдем парциальное давление водяного пара согласно уравнению состояния $p = mRT/VM$. $p = 0,8 \cdot 10^3$ Па. Согласно таблице 8 пар с таким давлением становиться насыщенным при $t = 3$ °С.

17.13. В цилиндре под поршнем находится вода массой $m_1 = 35$ мг и пар массой m_2 — 25 мг при температуре $t = 27$ °С. Газ изотермически расширяется. Давление насыщенного пара при $t = 27$ °С $p_н = 3,56 \cdot 10^3$ Па. При каком объеме вода в цилиндре полностью испарится?

Ответ: $V = 2,3$ л.

Решение. Вода в цилиндре полностью испарится, когда пар станет насыщенным. $V = mRT/Mp_н = 2,3$ л.

17.14. Сколько молекул содержит единица массы насыщенных и ненасыщенных паров ртути и воды? Молярные массы ртути и воды: $M_1 = 0,2$ кг/моль, $M_2 = 0,018$ кг/моль.

Ответ: $N_{m_1} = 3 \cdot 10^{24}$ кг$^{-1}$; $N_{m_2} = 3,3 \cdot 10^{25}$ кг$^{-1}$.

Решение. Количество вещества $\nu = m/M$ или $\nu = N/N_А$, откуда число молекул $N = mN_А/M$. Единица массы вещества содержит число молекул $N_m = N_А/M$, что для паров ртути и воды дает $N_{m_1} = N_А/M_1 = 3 \cdot 10^{24}$ кг$^{-1}$, $N_{m_2} = N_А/M_2 = 3,3 \cdot 10^{25}$ кг$^{-1}$.

17.15. Во сколько раз при температуре $t = 400$ °С плотность ρ_1 пара ртути при атмосферном давлении отличается от плотности ρ_2 насыщенного пара ртути? Атмосферное давление $p_1 = 0,1$ МПа, давление насыщенного пара ртути при температуре $t = 400$ °С $p_н = 2,2 \cdot 10^5$ Па.

Ответ: $\rho_1/\rho_2 = 0,45$.

Решение. Согласно уравнению состояния $pV = mRT/M$ плотности газов и паров при постоянной температуре пропорциональны их давлениям. $\rho_1/\rho_2 = p_1/p_2 = 0,45$.

17.16. В цилиндре под поршнем находится водяной пар при температуре $t = 100$ °С и давлении $p_1 = 40$ кПа. Каково будет давление пара в цилиндре, если объем его изотермически уменьшить в пять раз?

Ответ: $p_2 = 10^5$ Па, конденсация пара.

Решение. Процесс изотермический $p_2 = np_1$; $p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па. Однако давление насыщенного пара при $t = 100$ °С $p_н = 10^5$ Па. Так как давление не может быть больше давления насыщенного пара, то $p = 10^5$ Па. Идет процесс конденсации.

17.17. В сосуде емкостью $V = 10$ л находится сухой воздух при температуре $t_1 = 0$ °С и давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа. Каким будет давление в этом сосуде, если туда налить воду массой $m = 2$ г и нагреть сосуд до температуры $t_2 = 100$ °С?

Ответ: $p_2 = 171$ кПа.

Решение. Давление $p_2 = p_1T_2/T_1 + mRT_2/VM$. Первое слагаемое соответствует давлению сухого воздуха при $t_2 = 100$ °С, второе — давлению насыщенного водяного пара.

17.18. Воздух имеет температуру $t_1 = 38$ °С и абсолютную влажность $\rho_1 = 25$ г/м³. Какой будет абсолютная влажность этого воздуха, если температура понизится до $t_2 = 10$ °С?

Ответ: $\rho = 9{,}4$ г/м³, выпадет роса.

Решение. При $t_2 = 10$ °С плотность насыщенного пара $\rho_2 = Mp_2/RT_2$, где p_2 — давление насыщенного пара при $t = 10$ °С $\rho_2 = 9{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м³. Таким образом, $\rho_2 < \rho_1$. Поэтому при охлаждении до t_2 часть пара сконденсируется, и абсолютная влажность будет определяться плотностью насыщенного пара.

17.19. В герметически закрытом сосуде объемом $V = 1{,}1$ л находится $m = 100$ г кипящей воды и пары воды при температуре $t = 100$ °С (воздуха в сосуде нет). Найдите массу пара.

Ответ: $m_п = 0{,}6$ г.

Указание. Так как сосуд герметичен, то пар насыщен и его давление p_0 равно нормальному атмосферному давлению. $m_п = p\left(V - \dfrac{m}{\rho}\right)M/RT = 0{,}6$ г.

17.20. В сосуде емкостью $V = 100$ л при температуре $t = 29$ °С находится воздух с относительной влажностью $B_1 = 8{,}3$ %. Какова будет относительная влажность, если в сосуд ввести воду массой $m = 1{,}5$ г? $p_н = 3{,}99 \cdot 10^3$ Па при $t = 29$ °С.

Ответ: $B_2 = 61$ %.

Решение. При введении в сосуд воды относительная влажность увеличится на $B_0 = p/p_н$, где p — фактическое давление водяных паров. Из уравнения состояния $p = mRT/VM$. $B_0 = mRT/p_нVM$, $B_2 = B_0 + B_1 = 61$ %.

17.21. В комнате объемом $V = 40$ м³ при $t = 20$ °С относительная влажность воздуха $B_1 = 20$ %. Какую массу воды нужно испарить для

увеличения относительной влажности воздуха до $B_2 = 50$ %? Плотность насыщенного пара при $t = 20$ °С, $\rho_н = 17{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

Ответ: $m = 208$ г.

Решение. Относительная влажность воздуха $B_1 = \dfrac{\rho_1}{\rho_н} \cdot 100$ %, $B_2 = \dfrac{\rho_2}{\rho_н} \cdot 100\%$. $\Delta m = (\rho_2 - \rho_1) \cdot V$, $\Delta m = (B_2 - B_1) \cdot \rho_н V = 208$ г.

17.22. Закрытый сосуд объемом $V = 0{,}5$ м³, содержащий воду массой $m = 0{,}5$ кг, нагрели до температуры 420 К. На какую величину ΔV следует изменить объем сосуда, чтобы там содержался только насыщенный пар? Давление насыщенного пара при $T = 420$ К — $p_{н.п.} = 0{,}47$ МПа. Молярная масса воды $M = 0{,}018$ кг/моль.

Ответ: $\Delta V = -0{,}29$ м³.

Решение. Насыщенный пар массой m при давлении p согласно уравнению состояния должен занимать объем $V' = mRT/Mp$. Следовательно, $\Delta V = V' - V = mRT/Mp - V$. $\Delta V = -0{,}29$ м³. Знак минус показывает, что объем должен быть уменьшен.

17.23. В комнате объемом $V = 50$ м³ относительная влажность воздуха $B_1 = 40$ % Если испарить дополнительно массу воды $m = 60$ г, то относительная влажность воздуха увеличится до $B_2 = 50$ %. Какова при этом будет абсолютная влажность воздуха ρ?

Ответ: $\rho = 6 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

Указание. См. решение задачи 17.21. $\rho = mB_2/(B_2 - B_1)V = 6 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

17.24. Точка росы 6 °С. Сколько воды может испариться в каждом кубическом метре воздуха, если температура его 20 °С.

Ответ: $m = 10$ г.

Решение. $m = V\left(\rho_{н_2} - \rho_{н_1}\right)$, где $\rho_{н_1}$ и $\rho_{н_2}$ — плотности насыщенного пара при температурах 6 °С и 20 °С соответственно.

17.25. Классная комната имела в начале урока температуру 16 °С и точку росы 6 °С, а в конце урока температура поднялась до 18 °С. Определите абсолютную и относительную влажность воздуха в классе до и после урока.

Ответ: $\rho_1 = 7{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/м³; $B_1 = 53{,}6$ %; $\rho_2 = 8{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/м³; $B_2 = 53{,}9$ %.

Решение. Абсолютные влажности г$_1$ и г$_2$ находим по таблице 8. Относительные влажности $B_1 = \rho_1 \cdot 100\,\%/\rho_{01}$, $B_2 = \rho_2 \cdot 100\,\%/\rho_{02}$, где ρ_{01} и ρ_{02} плотности насыщенного пара при $t = 16$ °С и $t = 18$ °С соответственно.

17.26. Относительная влажность в комнате при 16 °С составляет 65 %. Как изменится она при понижении температуры на 4 °С, если парциальное давление водяного пара останется прежним?

Ответ: $B_2 = 84$ %.

Решение. Относительная влажность $B_1 = p \cdot 100\%/p_{н_1}$, $B_2 = p \cdot 100\%/p_{н_2}$, где $p_{н_1}$ и $p_{н_2}$ — давление насыщенного пара при 16 °С и 12 °С соответственно. Очевидно $B_2 = B_1 p_{н_1}/p_{н_2} = 84\%$.

17.27. Относительная влажность воздуха вечером при 16 °С равна 55 %. Выпадет ли роса, если ночью температура понизится до 8 °С?

Ответ: Роса не выпадет.

Решение. См. предыдущую задачу. $B_2 = B_1 p_{н_1}/p_{н_2}$. $B_2 = 94\%$. Роса выпадет при относительной влажности $B = 100\%$.

17.28. Необходимо осушить воздух, находящийся в баллоне объемом $V = 10$ л. Для этого в баллон вводят кусок хлористого кальция, который поглощает 0,13 г воды. Какова была относительная влажность воздуха в баллоне, если его температура равна 20 °С?

Ответ: $B = 75\%$.

Решение. Относительная влажность $B = \rho \cdot 100\%/p_н$. Плотность пара в баллоне $\rho = m/V$. Плотность насыщенного пара при $t = 20$ °С; $\rho_н = 17{,}3$ г/м³. Тогда $B = m \cdot 100\%/V\rho_н = 75\%$.

17.29. В трубке, открытым концом опущенной в воду, в объеме $V = 30$ см³ при температуре $t = 17$ °С находится смесь насыщенного пара и гелия. Высота столба воды в трубке $h = 10$ см. Найти массы пара и гелия m_1 и m_2. Давление насыщенного пара при температуре $t = 17$ °С $p_1 = 1{,}94$ кПа. Молярные массы воды и гелия $M_1 = 0{,}018$ кг/моль и $M_2 = 0{,}004$ кг/моль. Атмосферное давление $p_0 = 0{,}1$ МПа.

Ответ: $m_1 = 4{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг; $m_2 = 4{,}8 \cdot 10^{-6}$ кг.

Решение. Давление смеси насыщенного пара и гелия в трубке $p = p_0 - \rho gh$. Согласно закону Дальтона это давление складывается из парциальных давлений пара и гелия p_1 и p_2. Отсюда $p_2 = p_0 - p_1 - \rho gh$. Массы пара m_1 и гелия m_2 найдем из уравнения состояния

$$m_1 = \frac{M_1 p_1 V}{RT} = 4{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ кг}, \quad m_2 = \frac{M_2(p_0 - p_1 - \rho gh)V}{RT} = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ кг}.$$

17.30. В цилиндре под поршнем над водой в объеме $V = 1$ м³ при температуре $t = 30$ °С находится смесь насыщенного пара и азота. Масса смеси $m = 286$ г. Какая масса пара Δm сконденсируется, если объем уменьшить в $k = 3$ раза при постоянной температуре? Какое давление p было у смеси до сжатия? Давление насыщенного пара при температуре $t = 30$ °С, $p_1 = 4{,}2$ кПа. Молярные массы воды и азота $M_1 = 0{,}018$ кг/моль и $M_2 = 0{,}028$ кг/моль.

Ответ: $\Delta m = 20$ г; $p = 27{,}2$ кПа.

Решение. После сжатия весь объем цилиндра будет занят смесью пара и азота, причем парциальное давление пара p_1 не изменится. Массы насыщенного пара m_1 до и m_1' после сжатия: $m_1 = p_1 VM_1/RT$, $m_1' = p_1 V'M_1/RT = p_1 VM_1/kRT$. Масса сконденсировавшегося пара $\Delta m = m_1 - m_1' = p_1 VM(k-1)/kRT = 20$ г. Масса азота $m_2 = m - m_1 = (mRT - p_1 VM_1)/RT$. Парциальное давление азота до сжатия $p_2 = m_2 RT/M_2 V = (mRT - p_1 VM_1)/M_2 V$.

Давление смеси до сжатия по закону Дальтона

$$p = p_1 + p_2 = [p_1 V(M_2 - M_1) + mRT]/M_2 V = 27{,}2 \text{ кПа}.$$

17.31. Найдите работу пара по перемещению поршня на расстояние $l = 40$ см, если давление пара равномерно убывает при перемещении поршня от $p_1 = 2{,}2$ МПа до $p_2 = 0{,}2$ кПа. Площадь поршня $S = 300$ см². Представьте работу на графике зависимости давления от объема.

Ответ: $A = 14{,}4$ кДж.

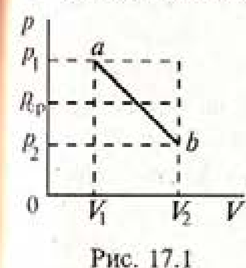


Рис. 17.1

Решение. При равномерном убывании давления среднее давление $p = (p_1 + p_2)/2$. В таком случае работу можно искать, как при постоянном давлении,

$$A = p(V_2 - V_1) = (p_1 + p_2)(V_2 - V_1)/2 = (p_1 + p_2)Sl/2.$$

График зависимости давления от объема представлен на рис. 17.1. При равномерном убывании давления от p_1 до p_2 график изображается отрезком прямой ab. Площадь трапеции с основаниями $aV_1 = p_1$ и $bV_2 = p_2$ и высотой $V_2 - V_1 = h$ численно равна работе.

17.32. В сосуде находится воздух, относительная влажность которого при температуре $t_1 = 10$ °С $B_1 = 60\%$. Какова будет относительная влажность B_2 после уменьшения объема в $k = 3$ раза и нагревании воздуха до температуры $t_2 = 100$ °С. Плотность насыщенного пара при температуре $t_1 = 10$ °С $\rho_н = 9{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м³. Молярная масса воды $M = 0{,}018$ кг/моль.

Ответ: $B_2 = 2{,}9\%$.

Решение. До уменьшения объема абсолютная влажность $\rho_1 = B_1\rho_н$. После уменьшения объема абсолютная влажность $\rho_2 = k\rho_1 = kB_1\rho_н$. $\rho_2 = 16{,}9 \cdot 10^{-3}$ кг/м³. При температуре $t_2 = 100$ °С давление насыщенного пара равно нормальному атмосферному давлению, а его плотность $\rho_0 = Mp_0/RT_2$, $\rho_0 = 0{,}58$ кг/м³. Так как $\rho_0 > \rho_2$, то в сосуде будет ненасыщенный пар с относительной влажностью $B_2 = \rho_2/\rho_0 = (kB_1\rho_н RT_2/Mp_0) \cdot 100\% = 2{,}9\%$.

17.33. В комнате при температуре $t_1 = 25$ °С относительная влажность $B_1 = 12\%$. Как изменится относительная влажность, если

температура в комнате постепенно понизится до $t_1 = 14$ °С? Плотность насыщенного пара при $t_1 = 25$ °С $\rho_{н_1} = 23,8 \cdot 10^{-3}$ кг/м³, при $t_2 = 10$ °С $\rho_{н_2} = 12 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

Ответ: $B_2 = 24$ %.

Решение. Абсолютная влажность при понижении температуры не изменилась, поэтому $B_1\rho_{н_1} = B_2\rho_{н_2}$, откуда $B_2 = \rho_{н_1}B_1/\rho_{н_2} = 24\%$.

17.34. Относительная влажность воздуха вечером при температуре $t_1 = 14$ °С $B_1 = 80$ %. Ночью температура воздуха понизилась до $t_2 = 6$ °С и выпала роса. Сколько водяного пара сконденсировалось из воздуха объемом $V = 1$ м³?

Ответ: $m = 2,4 \cdot 10^{-3}$ кг.

Решение. При $t_1 = 14$ °С абсолютная влажность $\rho = B_1\rho_{н_1}$, $\rho_{н_1} = 12 \cdot 10^{-3}$ кг/м³, $\rho = 9,6 \cdot 10^{-3}$ кг/м³. При 6 °С $\rho_{н_2} = 7,2 \cdot 10^{-3}$ кг/м³. Следовательно, в 1 м³ воздуха сконденсируется и выпадет в виде росы водяного пара $m = (9,6 - 7,2) \cdot 10^{-3}$ кг.

17.35. Какова будет относительная влажность воздуха в квартире, если открыть дверь между смежными комнатами площадью $S_1 = 15$ м² и $S_2 = 10$ м², относительные влажности в которых соответственно $B_1 = 60$ % и $B_2 = 50$ %? Температура одинакова.

Ответ: $B = 56$ %.

Решение. Масса — величина аддитивная, поэтому масса воздуха в двух комнатах $m = m_1 + m_2$, где m_1 и m_2 — массы воздуха в первой и второй комнатах. Абсолютная влажность в комнатах при закрытых дверях $\rho_1 = B_1\rho_н$, $\rho_2 = B_2\rho_н$. При открытых дверях $\rho = B\rho_н$. Так как температура воздуха не менялась, то $\rho_н = \text{const}$. Масса $m = \rho V = \rho(V_1 + V_2) = \rho(S_1 + S_2)h$ или $B\rho_н(S_1 + S_2)h = B_1\rho_н S_1 h + B_2\rho_н S_2 h$.

Откуда $B = \dfrac{B_1S + B_2S}{S_1 + S_2} = 56\%$.

17.36. Тонкое алюминиевое кольцо радиусом 7,8 см и массой 7 г касается поверхности мыльного раствора. Какую силу надо приложить, чтобы оторвать кольцо?

Ответ: $F = 11 \cdot 10^{-12}$ Н.

Решение. Условие отрыва кольца от раствора имеет вид $F = F_{п.н} + mg$. Сила поверхностного натяжения $F_{п.н} = 2\sigma l$, где $l = 2\pi R$. $F = 2\sigma l + mg$; $F = 4\pi\sigma R + mg = 11 \cdot 10^{-12}$ Н.

17.37. Разность уровней смачивающей жидкости в коленах U-образной трубки 23 мм. Диаметры каналов в коленах трубки 2 и 0,4 мм. Плотность жидкости 0,8 г/см³. Определите коэффициент поверхностного натяжения жидкости (рис. 17.2).

Ответ: $\sigma = 2,25 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

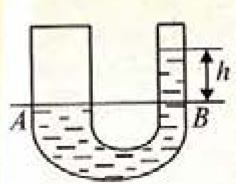


Рис. 17.2

Решение. Условие равновесия жидкости в сообщающихся сосудах $p_A = p_B$. $p_A = p_0 - p_{н_1}$, $p_B = p_0 - p_{н_2} + p_h$, где p_0 — атмосферное давление, $p_{н_1} = 2\sigma/R_1 = 4\sigma D_1$, $p_{н_2} = 2\sigma/R_2 = 4\sigma/D_2$, $p_h = \rho gh$. Условие равновесия принимает вид:

$p_0 - 4\sigma/D_1 = p_0 - 4\sigma/D_2 + \rho gh$,

откуда $\sigma = \dfrac{\rho ghD_1D_2}{4(D_1 - D_2)} = 2,25 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

17.38. Под каким давлением находится воздух внутри пузырька радиусом $5 \cdot 10^{-3}$ мм, расположенного под поверхностью воды. ($\sigma = 7,4 \cdot 10^{-2}$ Н/м)?

Ответ: $p = 130$ кПа.

Решение. Давление воздуха в пузырьке $p = p_0 + p_и$, где p_0 — атмосферное давление, $p_и$ — избыточное давление. $p_и = 2\sigma/R$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения воды. $p = p_0 + 2\sigma/R = 130$ кПа.

17.39. Найдите добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром $\alpha = 10$ см.

Ответ: $p = 3,2$ Па.

Решение. Обе поверхности мыльного пузыря (внешняя и внутренняя) оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Толщина пленки чрезвычайно мала, поэтому диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Добавочное давление $p = 2 \cdot 2\sigma/r$ или $p = 8\sigma/\alpha$.

17.40. На нижнем конце трубки диаметром $\alpha = 0,2$ см повисла шарообразная капля воды. Найдите диаметр этой капли.

Ответ: $D = 4,4$ мм.

Решение. Условие равновесия капли $mg = F_{п.н.}$. Сила поверхностного натяжения $F_{п.н.} = \sigma l = \sigma\pi d$. Масса капли $m = V\rho = \pi D^3\rho/6$. Получим $\pi D^3\rho g/6 = \sigma\pi d$. Откуда $D = \sqrt[3]{6d\sigma/\rho g} = 4,4$ мм.

17.41. Капиллярная длинная открытая с обоих концов трубка радиусом 1 мм наполнена водой и поставлена вертикально. Определите высоту столба оставшейся в капилляре воды. Толщиной стенки капилляра пренебречь.

Ответ: $h = 3 \cdot 10^{-2}$ м.

Решение. Поскольку в капиллярной трубке 2 мениска, то условие равновесия столбика жидкости $mg = 2F_{п.н.}$. $F_{п.н.} = \sigma \cdot 2\pi R$, $mg = \rho gV = \rho g\pi R^2h$. Откуда $h = 4\sigma/\rho gR$.

17.42. На какую высоту поднимется бензол в капилляре, внутренний диаметр которого $d = 1$ мм? Смачивание считать полным, плотность бензола $\rho = 800$ кг/м³. Поверхностное натяжение бензола $\sigma = 3 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

Ответ: $h = 14$ мм.

Решение. Высота подъема жидкости в капиллярной трубке $h = 2\sigma\cos\vartheta/\rho gR$. Согласно условию задачи смачивание полное, следовательно, краевой угол $\vartheta = 0$. Тогда $h = 4\sigma/\rho gd = 14$ мм.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Уровень II

1. В цилиндре под невесомым поршнем находится газ при атмосферном давлении p_0 и температуре T_0. Поршень удерживается упругой пружиной (рис. 1). Во сколько раз нужно увеличить температуру газа, чтобы его объем увеличился в полтора раза? Если газ полностью откачать из-под поршня, поршень будет находиться в равновесии у дна цилиндра.

Ответ: $T = 2{,}25T_0$.

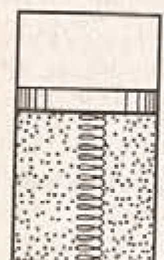


Рис. 1

Решение. Так как в начальном положении давление газа равно атмосферному, то в этом положении пружина не сжата. Пусть первоначально поршень находится на высоте h. Если газ полностью откачать из-под поршня, то атмосферное давление сожмет пружину как раз на длину h. Это дает возможность прокалибровать пружину. По закону Гука $F = kx$, где k — жесткость пружины, x — изменение ее длины. При $x = h$ сила $F = p_0S$ и, следовательно, $k = p_0S/h$. Давление, которое пружина оказывает через поршень на газ, $p = F/S = p_0x/h$. Когда объем газа увеличится в полтора раза, пружина удлинится на величину $h/2$ и будет создавать давление $p = p_0/2$. Применяя уравнение газового состояния, получим $p_0V = \dfrac{m}{M}RT_0$, $\left(p_0 + \dfrac{p_0}{2}\right)\cdot\dfrac{3}{2}V = \dfrac{m}{M}RT$; отсюда $T = 2{,}25T_0$.

2. Шахта глубиной $h = 225$ м пробурена в склоне горы и имеет горизонтальный выход (рис. 2). Температура атмосферного воздуха $t_0 = 0$ °C, средняя температура воздуха внутри шахты $t = 14$ °C. Вертикальный ствол шахты имеет сечение $S = 3{,}5$ м². Какую силу нужно

приложить к невесомой заслонке, чтобы закрыть сверху вертикальный ствол? Давление воздуха на уровне горизонтального ствола шахты $p_0 = 10^5$ Па.

Ответ: $F = 500H$.

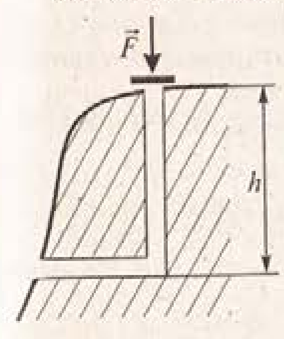


Рис. 2

Решение. Поскольку горизонтальный ствол шахты сообщается с атмосферой, давление воздуха здесь равно атмосферному. В верхней части шахты (под заслонкой) давление воздуха $p_1 = p_0 - \rho_1 gh$, где ρ_1 — плотность воздуха внутри шахты. Аналогичным образом давление воздуха над заслонкой $p_2 = p_0 - \rho_2 gh$, где ρ_2 — плотность атмосферного воздуха. Предполагается, что плотности воздуха ρ_1 и ρ_2 не меняются заметным образом при изменении высоты на величину h. Это предположение справедливо, если изменение давления с высотой (т. е. $\rho_1 gh$ и $\rho_2 gh$) малы по сравнению с давлением p_0. Плотности воздуха ρ_1 и ρ_2 могут быть определены из уравнения газового состояния $\rho_1 = Mp_0/RT$, $\rho_2 = Mp_0/RT_0$. Разность давлений $p_2 - p_1 = gh\dfrac{Mp_0}{R}\left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T}\right) = ghM\dfrac{p_0}{RT_0}\left(1 - \dfrac{T_0}{T}\right)$.

Для силы, действующей на заслонку, получаем $F = S(p_1 - p_2) = 500$ Н. Эта сила направлена вверх, так как $p_1 > p_2$. Для удержания заслонки в равновесии к ней нужно приложить внешнюю силу, направленную вниз и равную по модулю силе F.

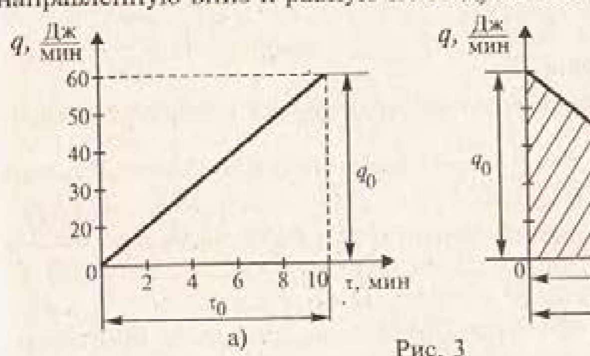


Рис. 3

3. Свинцовое тело массой 50 г получает от нагревателя ежеминутно 60 Дж теплоты. По мере нагревания тела от 0 °C теплоотдача возрастает в соответствии с графиком, представленным на рис. 3. Выведите формулу изменения температуры тела и определите максимальную температуру.

Ответ: $t_{max} = 46$ °C.

Решение. Из графика видно, что вследствие роста температуры через некоторое время τ_0 после начала нагревания наступает тепловое равновесие: тело ежеминутно отдает столько же теплоты q_0, сколько получает. График результирующего притока количества теплоты к телу представлен на рис. 36. Пользуясь этим графиком, из соотношения $q_0/q = \tau_0/(\tau_0 - \tau)$ можно найти количество теплоты, полученное телом в момент времени τ: $q = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0} q_0$. Количество теплоты, полученное телом за конечный промежуток времени τ с момента начала нагревания, численно равно площади заштрихованной фигуры $Q = \frac{q_0 + q}{2}\tau = \frac{q_0\tau(2\tau_0 - \tau)}{2\tau_0}$. Учитывая, что $Q = cmt$, приходим к формуле $t = \frac{q_0\tau(2\tau_0 - \tau)}{2\tau_0 cm}$. Максимальная температура достигается при $\tau = \tau_0$: $t_{max} = \frac{q_0\tau_0}{2cm} = 46\,°C$.

4. В жаркий летний день стакан воды охлаждают, бросая в него маленькие кусочки льда: как только растает один, кладут следующий, а лишняя вода переливается через край. Кусочек льда массой $m_л = 5$ г тает за $\tau = 5$ мин. За какое время τ_1 вода нагреется на $\Delta t = 1\,°C$, если забыть положить очередной кусочек льда? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2\ \frac{кДж}{кг \cdot K}$.

Ответ: $\tau_1 = 2{,}5$ мин.

Решение. Тепловая мощность, подводимая к стакану воды из окружающей среды, $P = \frac{Q}{\tau} = \frac{\lambda m_л}{\tau}$. Если забыть положить лед, вода в стакане начнет нагреваться, при этом $Q_1 = P\tau_1 = c_в m_в \Delta t$; $\tau_1 = \frac{c_в m_в \Delta t \tau}{\lambda m_л}$; $t_1 = 152$ с $= 2{,}5$ мин.

5. Азот массой 10 г расширяется изотермически при температуре $-20\,°C$, его давление уменьшается от 202 до 101 кПа. Определить работу расширения, изменение внутренней энергии и количество теплоты, сообщенное азоту.

Ответ: $A = Q = 521$ Дж, $\Delta U = 0$.

Решение. В процессе изотермического расширения температура остается постоянной, поэтому $\Delta T = 0$, а $V_2/V_1 = p_1/p_2$. Изменение внутренней энергии $\Delta U = cm\Delta T$, $\Delta U = 0$. Работа расширения

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{MV} dV = \frac{mRT}{M}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{mRT}{M}\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{mRT}{M}\ln\frac{p_1}{p_2}.\ Q = A.$$

6. Идеальная тепловая машина Карно, цикл которой совершается в обратном направлении (холодильная машина), использует воду при 0 °C в качестве нагревателя. Сколько воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар 500 г воды в кипятильнике?

Ответ: $m_2 = 2{,}47$ кг.

Решение. При замерзании воды массой m_2 выделяется количество теплоты $Q_2 = \lambda m_2$. Для испарения массы m_1, нужно затратить $Q_1 = rm_1$. $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, откуда $Q_2 = T_2 Q_1/T_1$; $m_2 = \frac{T_2 m_1 r}{T_1 \lambda}$.

7. В цилиндре под невесомым поршнем площадью 15 см² находится воздух массой 0,2 г при температуре 20°C. Определить работу, которую надо совершить при медленном равномерном подъеме поршня на высоту от 10 до 20 см. Атмосферное давление нормальное.

Ответ: $A = 3{,}5$ Дж.

Решение. Условие равновесия поршня в проекции на ось y: $F_{вн} + F - F_{атм} = 0$, откуда $F_{вн} = F_{атм} - F$, где $F_{атм} = p_0 S$, $F = pS$. Давление воздуха в цилиндре определяется из уравнения состояния $p = mRT/MV$, объем $V = Sh$. Сила давления воздуха в цилиндре равна $F = mRT/Mh$. Работа внешней силы

$$A = \int_{h_1}^{h_2} F_{вн} dh = \int_{h_1}^{h_2}(F_{атм} - F)dh = \int_{h_1}^{h_2} F_{атм} dh - \int_{h_1}^{h_2} F dh = \int_{h_1}^{h_2} p_0 S dh - \int_{h_1}^{h_2}\frac{mRT}{M}\frac{dh}{h} =$$

$$= p_0 S\int_{h_1}^{h_2} dh - \frac{mRT}{M}\int_{h_1}^{h_2}\frac{dh}{h} = p_0 S(h_2 - h_1) - \frac{mRT}{M}\ln\frac{h_2}{h_1}.$$

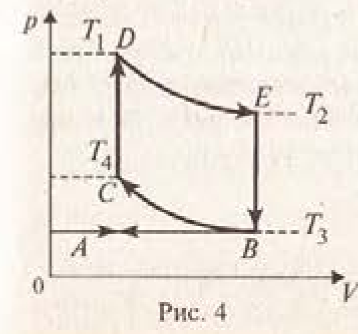


Рис. 4

8. Определите КПД цикла, состоящего из двух адиабат и двух изохор (рис. 4), совершаемого идеальным газом, если известно, что в процессе адиабатного расширения абсолютная температура газа $T_2 = 0{,}75T_1$, а в процессе адиабатного сжатия $T_3 = 0{,}75T_4$.

Ответ: $\eta = 25\ \%$.

Решение. Ветвь AB — всасывание горючего, ветвь BC — сжатие, ветвь CD — взрыв (зажигание), ветвь DE — рабочий ход, ветвь EB — открытие выпускного клапана, ветвь BA — выхлоп. Коэффициент полезного действия цикла $\eta = A/Q$. Рабочий ход характеризуется понижением температуры от T_1 до T_2, следовательно $A \sim T_1 - T_2$; зажигание характеризуется температурой T_1, значит, $Q \sim T_1$. $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$; $\eta = \frac{T_1 - 0,75T_1}{T_1} = 0,25$ или $\eta = 25\,\%$.

2 способ. Коэффициент полезного действия цикла $\eta = A/Q$, где A — работа за весь цикл, Q — количество тепла, выделяющегося при сгорании горючего. $A_{CD} = A_{EB} = 0$, $A = A_{BC} - A_{DE}$,

$$A_{BC} = \frac{R}{\gamma-1}T_3\frac{m}{M}\left(1-\frac{T_4}{T_3}\right);\quad A_{DC} = \frac{R}{\gamma-1}T_2\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right).$$

Но $\frac{R}{\gamma-1} = C_V$, а $\frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2}$ (по условию задачи). $A = C_V\frac{m}{M}(T_3-T_2)\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right)$;

$$Q = C_V\frac{m}{M}(T_1-T_4);\quad \eta = \frac{(T_3-T_2)(1-T_1/T_2)}{T_1-T_4} = \frac{(T_3-T_2)(T_2-T_1)}{T_2(T_1-T_4)};\quad \eta = 25\%.$$

9. Один моль одноатомного газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом максимальное давление в $n_1 = 2$ раза больше минимального, а максимальный объем в $n_2 = 3$ раза больше минимального. Определите коэффициент полезного действия цикла.

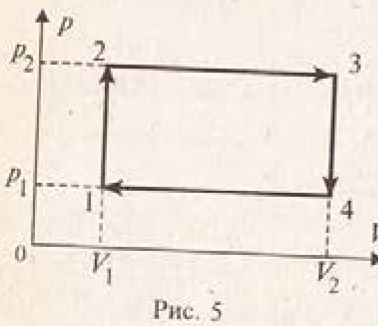


Рис. 5

Ответ: $\eta = 17\,\%$.

Решение. Коэффициент полезного действия цикла $\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1$, где Q_1 — теплота, полученная газом за один цикл от нагревателя, Q_2 — теплота, отданная газом за один цикл охладителю. $Q_1 - Q_2 = A$. $\eta = A/Q_1$. Работа цикла выражается площадью прямоугольника, вершины которого обозначены цифрами 1, 2, 3, 4. $A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = (n_1 - 1)(n_2 - 1)p_1V_1$.

Теплота, полученная газом, $Q_1 = Q_{1,2} + Q_{2,3}$,

где $Q_{1,2} = mc_V(T_2 - T_1) = m\frac{i}{2}\frac{R}{M}(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}R\frac{m}{M}(T_2 - T_1)$.

Согласно условию задачи газ одноатомный, а $\frac{m}{M} = 1$ моль, тогда

$$Q_{1,2} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1);\quad Q_{2,3} = mc_p(T_3 - T_2) = m\frac{i+2}{2}\frac{R}{M}(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}R\frac{m}{M}(T_3 - T_2);\quad Q_{2,3} = \frac{5}{2}R\frac{m}{M}(T_3 - T_2).$$

Температуру T_1 найдем из уравнения состояния $T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R}$,

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{R},\ T_2 = T_1\frac{p_2}{p_1} = T_1\frac{n_1p_1}{p_1} = n_1T_1;\quad T_3 = T_2\frac{V_2}{V_1} = T_2\frac{n_2V_1}{V_1} = n_2T_2 = n_1n_2T_1.$$

$$Q_1 = \frac{3}{2}R(n_1 - 1)\frac{p_1V_1}{R} + \frac{5}{2}Rn_1T_1(n_2 - 1)p_1V_1 = \frac{p_1V_1}{2}\left[3(n_1 - 1) + 5n_1(n_2 - 1)\right].$$

$$\eta = \frac{2(n_1 - 1)(n_2 - 1)p_1V_1}{p_1V_1\left[3(n_1 - 1) + 5n_1(n_2 - 1)\right]} = \frac{2(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{5n_1n_2 - 2n_1 - 3} = 0,17.$$

10. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $p_1 = 0,2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $p_3 = 0,5$ МПа. Найдите изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q, переданную газу. Постройте графики процесса.

Рис. 6

Ответ: $\Delta U = 3,24$ МДж; $A = 0,4$ МДж; $Q = 3,64$ МДж.

Решение. Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$ следует $T = \frac{pVM}{mR}$, т. е.

$$T_1 = \frac{p_1V_1M}{mR} = 385K,\quad T_2 = \frac{p_1V_2M}{mR} = 1155\,\text{K},\quad T_3 = \frac{p_2V_2M}{mR} = 2887\,\text{K}.$$

Изменение внутренней энергии газа

$\Delta U = c_Vm\Delta T = \frac{i}{2}\frac{R}{M}m\Delta T = 3,24$ МДж; где i — число степеней свободы молекул газа (для двухатомных молекул кислорода $i = 5$); $\Delta T = T_3 - T_1$ — разность температур газа в конечном (третьем) и начальном состояниях. Работа расширения газа при постоянном давлении равна $A_1 = \frac{m_1R\Delta T}{M}$; работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, $A_2 = 0$. Полная работа, совершаемая газом, $A = A_1 + A_2 = A_1 = \frac{m_1R\Delta T}{M} = 0,4$ МДж. Согласно первому началу термодинамики теплота Q, переданная газу, равна сумме измене-

ния внутренней энергии ΔU и работы A $Q = \Delta U + A = 3{,}64$ МДж. График процесса приведен на рис. 6.

11. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0{,}02$ кг при температуре $T_1 = 300$ К. Водород сначала расширился адиабатно, увеличив свой объем в $n_1 = 5$ раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в $n_2 = 5$ раз. Найдите температуру в конце адиабатного расширения и работу, совершаемую газом при этих процессах. Изобразите процесс графически.

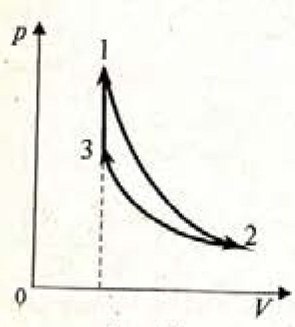


Рис. 7

Ответ:
$T_2 = 157$ К; $A_1 = 29{,}8$ кДж, $A_2 = -21$ кДж.

Решение. Температуры и объемы газа, совершающего адиабатный процесс, связаны между собой уравнением Пуассона

$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$ или $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n_1^{\gamma-1}}$, где γ — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме; $n_1 = V_2/V_1$. Отсюда получаем следующее выражение для конечной температуры $T_2 = T_1 / n_1^{\gamma-1}$. Для водорода как двухатомного газа $\gamma = 1{,}4$, $i = 5$ и $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $T_2 = \frac{300}{5^{1{,}4-1}}\text{К} = \frac{300}{5^{0{,}4}}\text{К}$. Так как $5^{0{,}4} = 1{,}91$ (находится логарифмированием) то $T_2 = 157$ К.

Работа A_1 газа при адиабатном расширении может быть определена по формуле $A_1 = \frac{m}{M}C_V(T_1 - T_2) = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_1 - T_2) = 29{,}8$ кДж, где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Работа A_2 газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде $A_2 = \frac{m}{M}RT_2 \ln\frac{V_3}{V_2}$, или $A_2 = \frac{m}{M}RT_2 \ln\frac{1}{n^2} = -21$ кДж, где $n_2 = V_2/V_3$. Знак минус показывает, что при сжатии работа газа совершается над газом внешними силами. График процесса приведен на рис. 7.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Уровень III

1. Два мыльных пузыря радиусами R_1 и R_1 сливаются в один пузырь радиуса R. Определите атмосферное давление. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки σ.

Решение. Избыточное давление под сферической поверхностью пузыря $\Delta p = 4\sigma/R$ (здесь учтено, что мыльный пузырь имеет две границы жидкости с воздухом. Пусть p_0 — атмосферное давление, p_1, p_2, p — давление воздуха в пузырях с радиусами R_1, R_2 и R.

Тогда $p_1 - p_0 = \frac{4\sigma}{R_1}$; $p_2 - p_0 = \frac{4\sigma}{R_2}$; $p - p_0 = \frac{4\sigma}{R}$. (1)

Уравнение Клапейрона-Менделеева для воздуха внутри пузыря

$p_1\frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{m_1}{M}RT$; $p_2\frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{m_2}{M}RT$; $p\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{m_1 + m_2}{M}RT$,

откуда $pR^3 = p_1R_1^3 + p_2R_2^3$. (2)

Из (1) и (2) получим атмосферное давление $p_0 = \frac{4\sigma\left(R_1^2 + R_2^2 - R^2\right)}{R^3 - R_1^3 - R_2^3}$.

2. В герметически закрытом сосуде смешали одинаковое количество кислорода и гелия (моль на моль). Потом в стенке сосуда сделали маленькое отверстие. Найти состав молекулярного пучка, который выходит из отверстия.

Ответ: $\frac{Z_К}{Z_Г} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Решение. В сосуде при одинаковой температуре молекулы газов имеют одинаковую кинетическую энергию $\frac{m_К v_К^2}{2} = \frac{m_Г v_Г^2}{2}$; $\frac{v_К}{v_Г} = \sqrt{\frac{m_Г}{m_К}}$. Для упрощения считаем, что молекулы одного типа имеют одинаковые скорости равные среднеквадратичной скорости $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. Учитывая, что молекулы движутся хаотически, можно считать что движение молекул вдоль трех взаимноперпендикулярных направлений равновероятно, поэтому в некоторый момент времени вдоль одного из направлений движется треть всех молекул, а в одну сторону движется 1/6 всех молекул.

Следовательно в направлении отверстия движется 1/6 всех молекул каждого газа.

За время Δt из сосуда вылетают молекулы, которые были на расстоянии меньшим, чем $v\Delta t$ от отверстия. Для кислорода это молекулы, находящиеся в объеме $v_К \Delta t \cdot S$ и для гелия — в объеме $v_Г \Delta t \cdot S$, где S — площадь отверстия. Всего таких молекул будет: для кислорода $Z_К = v_К \Delta t S n_К$, для гелия $Z_Г = v_Г \Delta t S n_Г$, где $n_К$ и $n_Г$ — концентрации кислорода и гелия (по условию $n_К = n_Г$). Следовательно $\frac{Z_К}{Z_Г} = \frac{v_К}{v_Г} = \sqrt{\frac{m_Г}{m_К}} = \sqrt{\frac{M_Г}{M_К}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; ($M_Г$, $M_К$ — молярные массы гелия и кислорода).

3. ____ Баллон с газом разделён на две части термоизолирующей перегородкой с малым отверстием (это означает, что молекулы проходят в отверстие только «поодиночке», т. е. макроскопическое движение газа вблизи отверстия не может возникнуть). По разным сторонам перегородки всё время поддерживается температуры T_1 и T_2. Определите отношение давления p_1 и p_2 в различных частях баллона.

Решение. Согласно условию задачи в разных частях баллона поддерживаются различные температуры, следовательно, теплового равновесия нет.

Чтобы состояние системы не изменилось, число молекул газа в каждой из частей баллона не должно меняться. А для этого должно быть одинаковое количество Z_1 и Z_2 молекул, пролетающих через отверстие в одну и другую сторону, за одно и тоже время Δt.

$Z=\frac{1}{2}n|\bar{v}|S\Delta t$, где n — концентрация молекул, $\bar{v}$ — средняя скорость молекулы, S — площадь отверстия.

Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры $p=nkT$, , откуда $n=\frac{p}{kT}$.. Средняя скорость молекулы: $\bar{v}=\sqrt{\frac{RT}{M}}$. Получаем: $Z\sim\frac{p}{\sqrt{T}}$. Из условия $Z_2=Z_2$ получаем $\frac{p_1}{\sqrt{T_1}}=\frac{p_2}{\sqrt{T_2}}$, откуда следует $\frac{p_1}{p_2}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$.

4. ____ Подвижный поршень находится на расстоянии h от открытого конца трубки (рис. 1, а). Если открытый конец трубки поднести к поверхности жидкости и поднять поршень на высоту h_2, то жидкость в трубке поднимется. Определить высоту столба жидкости x в трубке после перемещения поршня (рис. 1,б). Процесс считать изотермическим.

а) б)

Рис. 1

Решение. Для изотермического процесса

$$p_{атм}h_1S=p_2(h_1+h_2-x)S, \quad (1)$$

Где S — сечение трубки.

Столб воды в трубке находится в равновесии, поэтому сумма сил, действующих на столб воды, равна нулю $p_{атм}S=p_2S+\rho_B gxS$, откуда $p_2=p_{атм}-\rho_B gx$.

Тогда из (1) получим $p_{атм}h_1=(p_{атм}-\rho_B gx)(H-x)$, (2)

Где $H=h_1+h_2$. Преобразуя (2) имеем квадратное уравнение

$$\rho_B gx^2-x(p_{атм}+\rho_B gH)+p_{атм}(H-h_1)=0,$$

откуда $x=\frac{1}{2}\left(\frac{p_{атм}}{\rho_B g}+H-\sqrt{\left(\frac{p_{атм}}{\rho_B g}-H\right)^2+4\frac{p_{атм}}{\rho_B g}h_1}\right)$.

Если положить $h_1=0$, то при $p_{атм}>\rho_B gH$, $x=h_2$.

5. ____ Внутри длинной трубы, наполненной воздухом, двигают с постоянной скоростью поршень, при этом по трубе распространяется упругая волна со скоростью v = 320 м/с. Считая перепад давлений на границе распространения волны равным 1000 Па, оцените перепад температур. Давление в невозмущенном воздухе 1 атм, температура 300 К.

Ответ: $\Delta T\approx 0,5$ К.

Решение. Согласно второму закону Ньютона

$\Delta F\Delta t=\Delta mv$; $(\Delta pS)\Delta t=(\Delta\rho Sv\Delta t)v$, где Δp — перепад давлений, $\Delta\rho$ — разность плотностей, S — площадь сечения трубы, Δt — малый промежуток времени. Отсюда получим

$$v=\sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}};\quad \Delta\rho=\frac{\Delta p}{v^2}. \quad (1)$$

Используя уравнение Менделеева-Клапейрона, найдем связь $\Delta\rho$ и Δp: $pV=\frac{m}{M}RT$; $\rho=\frac{m}{V}=\frac{pM}{RT}$; $(p+\Delta p)M=(\rho+\Delta\rho)R(T+\Delta T)$;

$$\Delta\rho=\frac{(p+\Delta p)M}{R(T+\Delta T)}-\rho=\frac{(p+\Delta p)M}{R(T+\Delta T)}-\frac{pM}{RT}=\frac{M(\Delta pT-p\Delta T)}{R(T+\Delta T)T}. \quad (2)$$

С учетом (1) из (2) получим $\Delta pRT(T+\Delta T)=Mv^2(T\Delta p-p\Delta T)$; разделим обе части уравнения на pT, тогда

$$Mv^2\frac{\Delta T}{T}=\frac{\Delta p}{p}(Mv^2-RT-R\Delta T)=\frac{\Delta p}{p}RT\left(\frac{Mv^2}{RT}-\frac{\Delta T}{T}-1\right).$$

Полагая $\Delta T<<T$, окончательно получим

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{\Delta p}{p}\left(1-\frac{RT}{Mv^2}\right)=0,16\frac{\Delta p}{p}=1,6\cdot10^{-3};\quad \Delta T=0,5\text{K}.$$

6. Идеальный газ постоянной массы расширяется по закону $p=\alpha V$. Определить работу, выполненную газом при увеличении объёма от V_1 до V_2. Нагревается или охлаждается газ при таком процессе?

Решение. Работу газа определим графически.

Работа газа равна площади фигуры V_1 1 2 V_2 (рис. 2):

$$A=\frac{p_1+p_2}{2}(V_2-V_1). \quad (1)$$

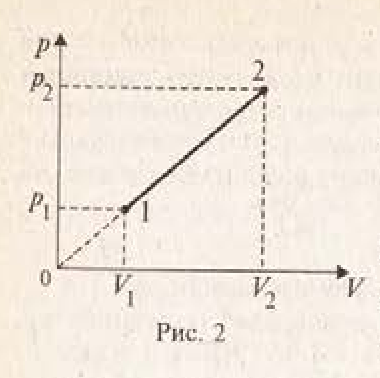


Рис. 2

Учтя, что $p_1 = \alpha V_1$; $p_2 = \alpha V_2$, (2)
найдём:

$$A = \frac{1}{2}\alpha(V_1 + V_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\alpha(V_2^2 - V_1^2). \quad (3)$$

Из уравнения состояния идеального газа $pV = \frac{m}{M}RT$ и заданного уравнения $p = \alpha V$ найдём температуру: $T = \frac{\alpha M}{mR}V^2$. Откуда следует, что температура газа при расширении повышается.

7. _____ В цилиндре под поршнем находится ν молей ненасыщенного водяного пара при температуре T_0. При медленном изобарическом охлаждении цилиндра половина пара сконденсировалась, а внутренняя энергия содержимого цилиндра уменьшилась на ΔU. Какое количество теплоты пришлось при этом отвести от содержимого цилиндра, если температура в нем уменьшилась на ΔT? Объемом воды по сравнению с объемом пара можно пренебречь.

Ответ: $Q = \Delta U + \frac{\nu}{2}R(T_0 + \Delta T)$.

Решение. Согласно первому началу термодинамики количество теплоты, отведенное от системы, Q равно сумме уменьшения внутренней энергии ΔU системы «жидкость—пар» и работы A внешних сил над системой.

При уменьшении температуры пара на ΔT он становится насыщенным, а потом частично конденсируется при температуре $T_0 - \Delta T$. При этом работа внешних сил A положительна. Найдем ее из уравнений состояния пара в начальном (1) и конечном (2) состояниях

$$p_0 V_0 = \nu R T_0; \quad (1)$$

$$p_0 V = \frac{\nu}{2}R(T_0 - \Delta T); \quad (2)$$

откуда $A = p_0(V_0 - V) = \frac{\nu}{2}R(T_0 + \Delta T)$.

Рис. 3

Внутренняя энергия — функция состояния, ее полное уменьшение, по условию задачи, равно ΔU. Следовательно от системы нужно отвести количество теплоты

$$Q = \Delta U + A = \Delta U + \frac{\nu}{2}R(T_0 + \Delta T).$$

8. Моль идеального одноатомного газа расширяется сначала в изобарическом процессе, а затем в процессе с линейной зависимостью давления от объема (рис. 3). Известно, что $V_2/V_1 = V_3/V_2$, а прямая 2—3 походит через начало координат. Найдите отношение объемов V_2/V_1, если количество теплоты, подведенное к газу на участке 1—2, в четыре раза меньше работы A_{23}, совершенной газом на участке 2—3.

Ответ: $V_2/V_1 = 4$.

Решение. Согласно первому началу термодинамики

$$Q_{12} = \Delta U + p\Delta V = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}RT_2\frac{(\alpha - 1)}{\alpha},$$

где $\alpha = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$. Работа газа на участке 2—3 равна

$$A_{23} = \frac{1}{2}(p_2 + p_3)(V_3 - V_2) = \frac{1}{2}RT_2(\alpha^2 - 1),$$ здесь учтено, что $\frac{p_3}{p_2} = \frac{V_3}{V_2}$ (рис. 3). По условию задачи $A_{23} = 4Q_{12}$, откуда

$$\frac{1}{2}RT_2(\alpha^2 - 1) = 4\cdot\frac{5}{2}RT_2\frac{(\alpha - 1)}{\alpha}; \quad \alpha = 4.$$

9. _____ С одноатомным газом провели замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 4). Определить η (КПД) теплового двигателя, работающего по этому циклу.

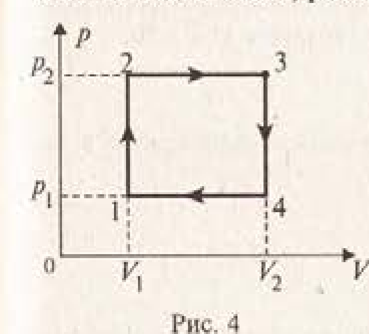


Рис. 4

Решение. Процесс 1—2 — изохорный. $V = \text{const}$, $A_{12} = 0$, $Q_{12} = \Delta U_{12}$; т. к. $p_2 > p_1$, то $Q_{12} > 0$, температура газа повысилась. Процесс 2—3 — изобарный. $A_{23} = p_2(V_2 - V_1)$, газ получил от нагревателя количество тепла $Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23}$.

Процесс 3—4 — изохорный. $V = \text{const}$, $A_{34} = 0$, температура газа понизилась, он отдал холодильнику количество теплоты $Q_{34} = \Delta U_{34}$.

Процесс 4—1 — изобарный. Температура газа понизилась, он отдал холодильнику количество теплоты $Q_{41} = A_{41} + \Delta U_{41}$, где работа газа $A_{41} = p_1(V_1 - V_2) < 0$, т. к. $V_1 < V_2$, что соответствует положительной работе внешних сил по сжатию газа. Работа, совершенная газом за цикл $A = A_{23} + A_{41} = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$.

Теплота, полученная от нагревателя за весь цикл,

$Q = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + A_{23} = \Delta U_{13} + A_{23}$, где ΔU_{13} — изменение внутренней энергии газа при переходе газа из состояния 1 в состояние 3 (учтем, что внутренняя энергия — функция состояния).

$$\Delta U_{13} = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R(T_3 - T_1) = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

Тогда $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)}{\frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + p_2(V_2 - V_1)}$.

10. Сообщающиеся цилиндры с поршнями площадью S_1 и S_2 (рис. 5) заполнены одноатомным газом с параметрами p_0, V_0 и T_0. На левый поршень действуют сила F, совершая работу A. Правый поршень сжимает упругую пружину жесткостью k. 1) Какое максимальное количество тепла Q_{max} может при этом выделиться в окружающую среду? 2) До какой максимальной температуры T_{max} может нагреться газ?

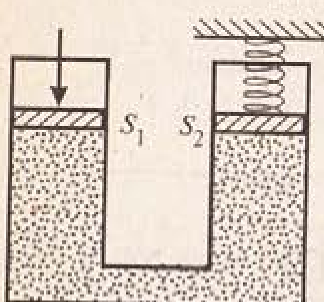


Рис. 5

Решение. По закону сохранения энергии за счет работы силы F увеличивается энергия пружины, внутренняя энергия газа и происходит рассеяние тепла в окружающее пространство.

$A = \frac{kx^2}{2} + \Delta U + Q$ (1), где x — деформация пружины.

1) Количество тепла, выделившееся в окружающую среду, будет максимальным при изотермическом процессе ($\Delta U = 0$).

Из (1) получим $Q_{max} = A - \frac{kx^2}{2}$. (2)

По закону Паскаля давления на поршни одинаковы, т. е. $\frac{F}{S_1} = \frac{kx}{S_2}$, откуда $x = \frac{FS_2}{kS_1}$. (3)

Тогда (1) равно $Q_{max} = A - \frac{F^2S_2^2}{2kS_1^2}$.

2) Максимальное увеличение температуры газа будет наблюдаться при адиабатическом процессе ($Q = 0$). Из (1) имеем $\Delta U_{max} = A - \frac{kx^2}{2}$. (4)

Учтем, что изменение внутренней энергии газа равно

$\Delta U_{max} = \frac{3}{2}\nu R(T_{max} - T_0)$, откуда $T_{max} = T_0 + \frac{2\Delta U_{max}}{3\nu R}$. (5)

Используя (3), (4) и уравнение Менделеева-Клапейрона, $p_0V_0 = \nu RT_0$, (*n* — количество молей газа в сосудах),

из (5) окончательно получим $T_{max} = T_0\left[1 + \frac{2}{3p_0V_0}\left(A - \frac{F^2S_2^2}{2kS_1^2}\right)\right]$.

ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Уровень I

18. ЗАКОН КУЛОНА

18.1. Найдите заряд всех электронов в куске меди массой $m = 1{,}0$ кг.

Ответ: $q = 44$ МКл.

Решение. Порядковый номер атома в таблице Менделеева совпадает с количеством электронов у атома. Атом меди имеет $n = 29$ электронов. Тогда $q = \frac{m}{M} N_A en = 44$ МКл, где $M = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса меди, N_A — число Авогадро, e — заряд электрона.

18.2. Какой величины достигнет сила притяжения между двумя однаковыми свинцовыми шариками массой $m = 10$ г, расположенными на расстоянии $r = 10$ м, если бы можно было у каждого атома свинца первого шарика отнять по одному электрону и перенести на второй шарик? Молярная масса свинца $M = 207 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $F \approx 2 \cdot 10^{15}$ Н.

Решение. В результате шарики получат противоположные заряды Ne, где e — заряд электрона, N — число атомов свинца в шарике. В массе свинца m число молекул $N = (m/M) \cdot N_A$. Сила взаимодействия шаров оказывается равной:

$$F = k\left(\frac{Ne}{r}\right)^2 = k\left(\frac{m}{M} N_A \frac{e}{r}\right)^2 \approx 2 \cdot 10^{15} \text{ Н, где } k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2},\ N_A \text{ —}$$

число Авогадро.

18.3. Сравните силы электростатического и гравитационного взаимодействия двух электронов.

Ответ: $F_э/F_{гр} = 4{,}2 \cdot 10^{42}$.

Решение. Сила электростатического взаимодействия $F_э = k\frac{e^2}{r^2}$; гравитационного $F_{гр} = G\frac{m_e^2}{r^2}$; откуда $\frac{F_э}{F_{гр}} = \frac{ke^2}{Gm_e^2} = 4{,}2 \cdot 10^{42}$, где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$; G — гравитационная постоянная, m_e — масса электрона.

18.4. Какие заряды $q_с$ и $q_з$, пропорциональные массам $M_с$ и $M_з$, нужно было бы сообщить Солнцу и Земле для того, чтобы сила кулоновского взаимодействия между ними сравнялась с силой их гравитационного взаимодействия?

Ответ: $q_с = 1{,}70 \cdot 10^{20}$ Кл; $q_з = 5{,}06 \cdot 10^{14}$ Кл.

Решение. Считаем, что удельный заряд Земли и Солнца одинаков: $q_0 = \dfrac{q_з}{M_з} = \dfrac{q_с}{M_с}$. $F_{гр} = F_э$; $G\dfrac{M_с M_з}{r^2} = k\dfrac{q_с q_з}{r^2}$;

$G\dfrac{M_с M_з}{r^2} = k\dfrac{q_0^2 M_с M_з}{r^2}$; $q_0 = \sqrt{\dfrac{G}{k}} = 0{,}86 \cdot 10^{-10}$ $\dfrac{Кл}{кг}$;

$q_с = q_0 M_с = 1{,}70 \cdot 10^{20}$ Кл; $q_з = q_0 M_з = 5{,}06 \cdot 10^{14}$ Кл.

18.5. На двух одинаковых капельках воды находится по одному лишнему электрону, причем сила электростатического отталкивания капелек уравновешивает силу их взаимного тяготения. Каковы радиусы капелек?

Ответ: $R = 76$ мкм.

Решение. По условию задачи сила гравитационного взаимодействия двух капелек равна кулоновской силе взаимодействия двух электронов: $G\dfrac{m^2}{r^2} = k\dfrac{e^2}{r^2}$; $m = \rho \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3$, тогда $\dfrac{16G\rho^2\pi^2 R^6}{9r^2} = \dfrac{ke^2}{r^2}$, откуда $R = \sqrt[6]{\dfrac{9ke^2}{16G\rho^2\pi^2}} = 76$ мкм.

18.6. Каждый из двух маленьких шариков положительно заряжен так, что их общий заряд $q = 5 \cdot 10^{-5}$ Кл. Как распределен этот заряд между ними, если они, находясь на расстоянии $r = 2{,}0$ м друг от друга, отталкиваются с силой $F = 1{,}0$ Н?

Ответ: $q_1 = 12$ мкКл, $q_2 = 38$ мкКл.

Решение. $q = q_1 + q_2$; $q_2 = q - q_1$; $F = k\dfrac{q_1(q - q_1)}{r^2}$, $kq_1^2 - kqq_1 + Fr^2 = 0$;

$q_1 = \dfrac{1}{2}\left(q - \sqrt{q^2 - \dfrac{4Fr^2}{k}}\right) = 12$ мкКл; $q_2 = 38$ мкКл.

18.7. Заряды $q_1 = 10$ нКл и $q_2 = 16$ нКл расположены на расстоянии $r = 7$ мм один от другого. Какая сила будет действовать на заряд $q = 2$ нКл, расположенный в точке, отстоящей на $r_1 = 3$ мм от меньшего заряда и на $r_2 = 4$ мм от большего?

Ответ: $F = 2$ мН.

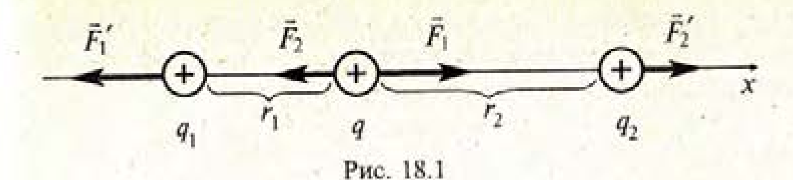


Рис. 18.1

Решение. Сила, действующая на заряд q, равна $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$; (рис. 18.1). $r = r_1 + r_2$; $F = F_1 - F_2$; $F_1 = k\dfrac{q_1 q}{r_1^2}$; $F_2 = k\dfrac{q_2 q}{r_2^2}$;

$F = kq\left(\dfrac{q_1}{r_1^2} - \dfrac{q_2}{r_2^2}\right) = 2$ мН.

18.8. Заряды 90 и 10 нКл расположены на расстоянии 4 см один от другого. Какой заряд и где нужно разместить, чтобы 1) силы, действующие на него со стороны двух других зарядов, были равны по модулю и противоположны по направлению; 2) чтобы вся система зарядов была в равновесии?

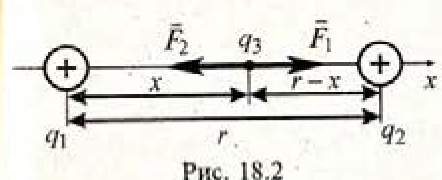


Рис. 18.2

Ответ: 1) $x = 3$ см от большего заряда, 2) $x = 3$ см, $q_3 = 5{,}6$ нКл.

Решение. 1) Независимо от знака и величины третьего заряда, чтобы он был в равновесии, он должен располагаться между зарядами q_1 и q_2. Пусть q_3 — положительный заряд (рис. 18.2), тогда

$F_1 = F_2$; $F_1 = k\dfrac{q_1 q_3}{x^2}$; $F_2 = k\dfrac{q_2 q_3}{(r - x)^2}$; $k\dfrac{q_1 q_3}{x^2} = k\dfrac{q_2 q_3}{(r - x)^2}$; $\dfrac{r - x}{x} = \sqrt{\dfrac{q_2}{q_1}}$;

$x = \dfrac{\sqrt{q_1}\, r}{\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1}} = 3$ см.

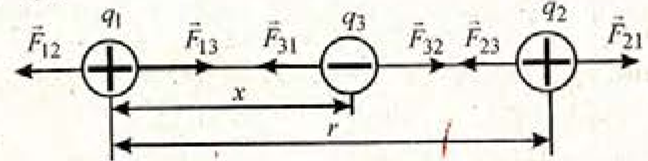


Рис. 18.3

2) Чтобы вся система была в равновесии, сумма сил, действующих на каждый заряд, должна быть равна нулю. Тогда заряд q_3 должен быть только отрицательным. Его величину найдем из условия равновесия для заряда q_1 (рис. 18.3). Расстояние x найдено в п. 1. $F_{12} = F_{13}$; $k\dfrac{q_1 q_2}{r^2} = k\dfrac{q_1 |q_3|}{x^2}$; $|q_3| = q_2\dfrac{x^2}{r^2}$; $q_3 = -5{,}6$ нКл.

18.9. Два заряда $q_1 = 4$ нКл и $q_2 = -9$ нКл находятся на расстоянии $r = 0{,}2$ м друг от друга. Какой заряд q_3 и где его нужно разместить, чтобы система находилась в равновесии?

Ответ: $x_1 = 0{,}6$ м; $x_2 = 0{,}12$ м; $q_{3(1)} = 36$ нКл; $q_{3(2)} = 1{,}44$ нКл.

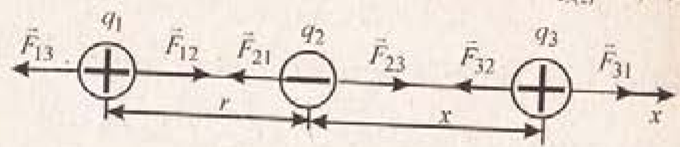


Рис. 18.4

Решение. Система будет находится в равновесии, если сумма сил, действующих на каждый заряд, равна нулю.

(x): $F_{12} - F_{13} = 0$; (1)

$F_{23} - F_{21} = 0$; (2)

$F_{31} - F_{32} = 0$; (3)

$F_{13} = F_{31}$; $F_{12} = F_{21}$; $F_{23} = F_{32}$.

Из уравнения (3) $k\dfrac{q_1 q_3}{(r+x)^2} = k\dfrac{q_2 q_3}{x^2}$. Получим квадратное уравнение $(q_2 - q_1)x^2 + 2rxq_2 + r^2 q_2 = 0$, которое имеет два решения

$$x_1 = \frac{r\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}} = 0{,}6 \text{ м}; \quad x_2 = \frac{r\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1}} = 0{,}12 \text{ м}.$$

Оба решения имеют физический смысл. Значение величины заряда q_3 найдем из условия равновесия для заряда q_2:

$$k\frac{q_1 q_2}{r^2} = k\frac{q_2 q_3}{x^2}; \quad q_3 = q_1\frac{x^2}{r^2}, \quad q_{3(1)} = 36 \text{ нКл}; \quad q_{3(2)} = 1{,}44 \text{ нКл}.$$

18.10. Имеются два свободных отрицательных заряда $4q$ и q, находящихся на расстоянии a друг от друга. Какой заряд и где нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии?

Ответ: $Q = 4q/9$ на расстоянии $a/3$ от q.

Решение самостоятельное.

18.11. Два одинаковых металлических шарика зарядили так, что заряд одного из них в n раз больше, чем другого. Шарики привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние. Во сколько раз (по модулю) изменится сила их взаимодействия (F_1/F_2), если 1) заряды одного знака, 2) разных знаков? $(n = 2{,}4)$.

Ответ: 1) $F_2/F_1 = 1{,}2$; 2) $F_2/F_1 = 0{,}204$.

Решение. 1) Заряды одного знака. По закону Кулона $F_1 = k\dfrac{q \cdot nq}{r^2} = k\dfrac{nq^2}{r^2}$. После соприкосновения заряды шариков стали одинаковыми, т. е. по закону сохранения заряда $q + nq = 2q'$; $q' = \dfrac{q(n+1)}{2}$ — заряд каждого шарика после соприкосновения, тогда сила Кулона $F_2 = k\dfrac{q'^2}{r^2} = k\dfrac{q^2(n+1)^2}{4r^2}$; $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{(n+1)^2}{4n} = 1{,}2$.

2) Заряды разноименные $q < 0$; $nq > 0$; $F_1 = k\dfrac{|q|\cdot|nq|}{r^2}$. По закону сохранения заряда $nq - q = 2q'$; $q' = \dfrac{q(n-1)}{2}$. Кулоновская сила $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{(n-1)^2}{4n} = 0{,}204$.

18.12. Наэлектризованный маленький шарик был приведен в соприкосновение с равным ему не наэлектризованным. Помещенные затем на расстоянии $r = 9{,}0$ см шарики отталкиваются с силой $F = 0{,}35$ мН. Каков был первоначальный заряд шарика?

Ответ: $q = 30$ нКл.

Решение самостоятельное. ***Указание.*** См. задачу 18.11.

18.13. Доказать, что когда два одинаковых металлических шарика, заряженные неравными зарядами одного знака, привести в соприкосновение, а потом раздвинуть на прежнее расстояние, то сила взаимодействия обязательно возрастет, причем это увеличение будет тем значительнее, чем больше разница в заряде шариков.

Решение. ***Указание.*** См. решение задачи 18.11.

Если заряды шариков q и nq, то $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{(n+1)^2}{4n}$, где F_1 — сила взаимодействия зарядов до соприкосновения, F_2 — после соприкосновения. Очевидно, что всегда, кроме $n = 1$ $(n+1)^2 > n$ и эта разница увеличивается с увеличением n.

18.14. Три одинаковых заряда по $q = 1{,}7$ нКл помещены в вершины равностороннего треугольника со стороной $a = 3{,}0$ см. Какая сила действует на каждый из этих зарядов?

Ответ: $F = 50$ мкН.

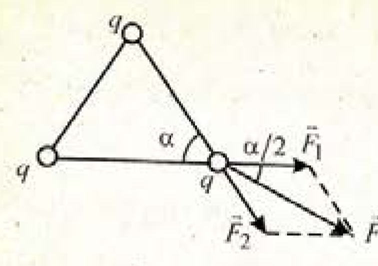


Рис. 18.5

Решение. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рис.18.5);

$F_1 = F_2 = k\dfrac{q^2}{a^2}$;

$F = 2F_1\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2k\dfrac{q^2}{a^2}\cos 30°$;

$F = 50$ мкН. Эта сила действует на каждый заряд.

18.15. Три одинаковых заряда, $q = 9\cdot10^{-9}$ Кл каждый, расположены в вершинах правильного треугольника, в центре которого помещен отрицательный заряд q_1. Найдите абсолютную величину этого заряда, если данная система находится в равновесии в воздухе.

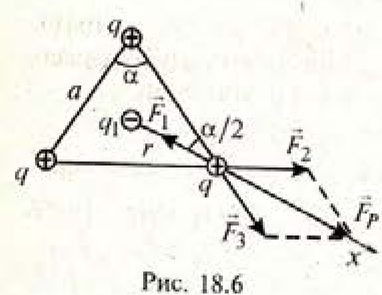


Рис. 18.6

Ответ: $q_1 = -5{,}2$ нКл.

Решение. На каждый заряд q, находящийся в вершине треугольника, действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ со стороны остальных трех зарядов (рис. 18.6). По закону Кулона найдем модули этих сил: $F_1 = \dfrac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$; $F_2 = F_3 = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$, где $r = a/\sqrt{3}$ — расстояние от вершины до центра правильного треугольника; a — длина стороны треугольника.

Условие равновесия заряда: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$.

Спроецировав силы на ось x, направленную по равнодействующей сил F_2 и F_3, получаем: $F_2\cos\dfrac{\alpha}{2} + F_3\cos\dfrac{\alpha}{2} - F_1 = 0$,

$$F_1 = 2F_2\cos\frac{\alpha}{2},\quad \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{2q^2\cos\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2};\quad \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2q^2\cos\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2};$$

$\dfrac{\alpha}{2} = 30°$, $q_1 = \dfrac{q}{\sqrt{3}}$, $q_1 = -5{,}2$ нКл.

18.16. Четыре одинаковых точечных заряда $q = 10$ нКл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Найдите силу, действующую со стороны трех зарядов на четвертый.

Ответ: $F = 172$ мкН.

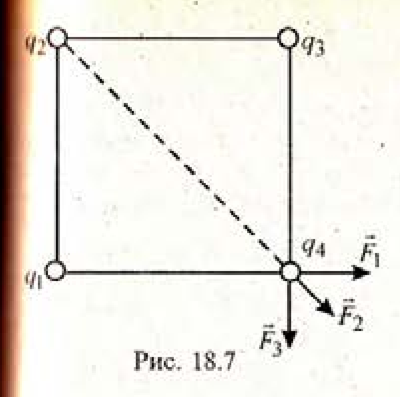


Рис. 18.7

Решение. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ (рис. 18.7); $F_1 = F_3 = k\dfrac{q^2}{a^2}$;

$F_2 = k\dfrac{q^2}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = k\dfrac{q^2}{2a^2}$.

$F = F_2 + \sqrt{F_1^2 + F_3^2} = F_2 + \sqrt{2}F_1$;

$F = k\dfrac{q^2}{a^2}\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right) = 172$ мкКл.

18.17. Четыре одинаковых заряда q размещены в углах квадрата. Какой заряд противоположного знака надо поместить в центр квадрата, чтобы вся система зарядов находилась в равновесии?

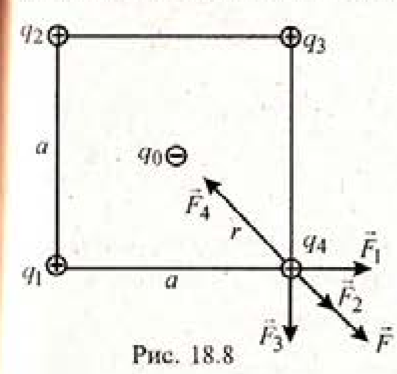


Рис. 18.8

Ответ: $q_0 = 0{,}957q$.

Решение. Условие равновесия зарядов: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$ (рис. 18.8);

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}$; $F = k\dfrac{q^2}{a^2}\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$,

см. задачу 18.16.

$F_4 = F$; $k\dfrac{q_0 q}{r^2} = k\dfrac{q^2}{a^2}\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$;

$r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$; $k\dfrac{2q_0 q}{a^2} = k\dfrac{q^2}{a^2}\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$,

откуда $q_0 = 0{,}957q$.

18.18. Четыре одинаковых по модулю точечных заряда $|q| = 20$ нКл, два из которых положительны (расположены рядом), а два отрицательны, расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 20$ см. Найдите силу, действующую на помещенный в центре квадрата положительный точечный заряд $q_0 = 20$ нКл (рис. 18.9).

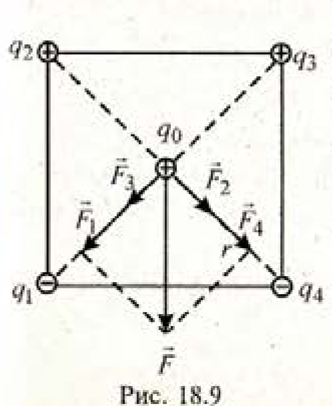


Рис. 18.9

Ответ: $F = 509$ мкН.

Решение. Сила, действующая на заряд q_0: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$;

$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = k\dfrac{qq_0}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = k\dfrac{2qq_0}{a^2}$.

$$F = 2F_1\sqrt{2} = k\frac{4\sqrt{2}qq_0}{a^2} = 509 \text{ мкН}.$$

18.19. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a расположены друг за другом заряды $+q$, $+q$, $+q$, $-q$, $-q$, $-q$. Найдите силу, действующую на заряд $+q$, расположенный в центре шестиугольника.

Ответ: $F = q^2/\pi\varepsilon_0 a^2$.

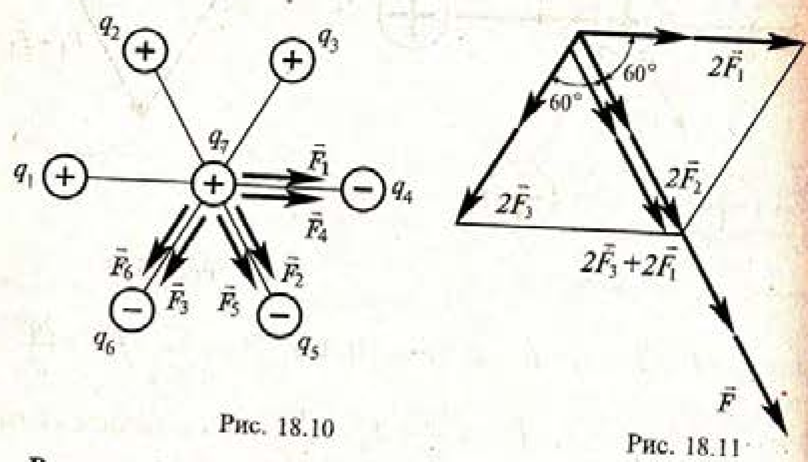


Рис. 18.10

Рис. 18.11

Решение. На заряд $+q_7$, расположенный в центре шестиугольника, со стороны зарядов q_1, q_2, q_3 действуют силы отталкивания, а со стороны зарядов q_4, q_5, q_6 силы притяжения (рис. 18.10).

Все кулоновские силы по модулю одинаковые. $F_1 = k\dfrac{q_1q_7}{a^2} = k\dfrac{q^2}{a^2}$; $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6$. Равнодействующая этих сил $\vec{F} = 2\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2 + 2\vec{F}_3$. Из рисунка 18.11 очевидно, что $\left|2\vec{F}_1 + 2\vec{F}_3\right| = 2\left|\vec{F}_1\right|$, т. е. $F = 2F_1 + 2F_2 = 4F_1$, сила, действующая на заряд в центре шестиугольника.

$$F = 4k\frac{q^2}{a^2} = \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

18.20. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a расположены точечные заряды q, $2q$, $3q$, $4q$, $5q$, $6q$. Найдите силу, действующую на точечный заряд q, лежащий на пересечении диагоналей шестиугольника.

Ответ: $F = \dfrac{3q^2}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$.

Решение. $q_1 = q$; $q_2 = 2q$; $q_3 = 3q$; $q_4 = 4q$, $q_5 = 5q$; $q_6 = 6q$.

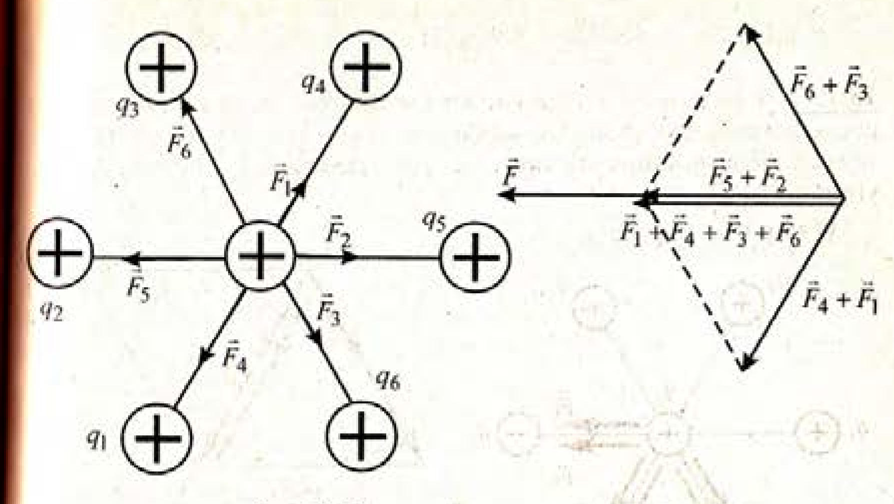


Рис. 18.12

Рис. 18.13

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6$ (рис. 18.12); $\vec{F}_1 = k\dfrac{q^2}{a^2}$; $\vec{F}_2 = k\dfrac{2q^2}{a^2}$; $\vec{F}_3 = k\dfrac{3q^2}{a^2}$; $\vec{F}_4 = k\dfrac{4q^2}{a^2}$; $\vec{F}_5 = k\dfrac{5q^2}{a^2}$; $\vec{F}_6 = k\dfrac{6q^2}{a^2}$. Складываем силы попарно: $F_4 - F_1 = k\dfrac{3q^2}{a^2}$; $F_5 - F_2 = k\dfrac{3q^2}{a^2}$; $F_6 - F_3 = k\dfrac{3q^2}{a^2}$ (рис. 18.13);

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{6}\vec{F}_i;\quad F = k\frac{6q^2}{a^2} = \frac{3q^2}{2\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

18.21. Заряды $q_1 = q$ и $q_2 = -2q$ находятся на расстоянии l друг от друга. С какой силой действуют эти заряды на третий заряд $q_3 = 3q$, если он расположен на расстоянии l от середины линии, соединяющей эти заряды?

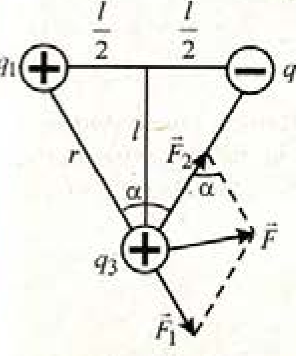


Рис. 18.14

Ответ: $F = \dfrac{3\sqrt{2,6}q^2}{5\pi\varepsilon_0 l^2}$.

Решение. Сила, действующая на заряд q_3: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рис. 18.14);

$$F_1 = k\frac{q_1q_3}{r^2} = k\frac{3q^2}{r^2};$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2} = \frac{\sqrt{5}l}{2};\quad F_2 = k\frac{q_2q_3}{r^2} = k\frac{6q^2}{r^2}.$$

По теореме косинусов $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\alpha}$;

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 0,6.$

$$F = k\sqrt{\frac{9q^4}{r^4} + \frac{36q^4}{r^4} - \frac{2\cdot 3q^2\cdot 6q^2}{r^4}\cdot 0,6} = k\frac{3\sqrt{2,6}q^2}{r^2} = \frac{3\sqrt{2,6}q^2}{5\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

18.22. На нити подвешен шарик массой $m = 9,8$ г, которому сообщили заряд $q = 1,0$ мкКл. Когда к нему поднесли снизу заряженный таким же зарядом шарик, сила натяжения нити уменьшилась в четыре раза. Определите расстояние между центрами шариков.

Ответ: $r = 36$ см.

Решение. Шарик подвешен на нити (рис. 18.15а); $mg - T_1 = 0$; $T_1 = mg$. Если имеется еще взаимодействие с заряженным телом (рис. 18.15б), то $mg - T_2 - F_К = 0$;

$T_2 = \frac{T_1}{4} = \frac{mg}{4}$; $mg - \frac{mg}{4} = F_К$; $\frac{3}{4}mg = k\frac{q^2}{r^2}$;

$r = 2q\sqrt{\frac{k}{3mg}} = 0,35$ м.

а) б)

Рис. 18.15

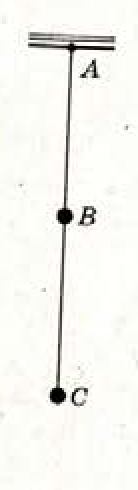


Рис. 18.16

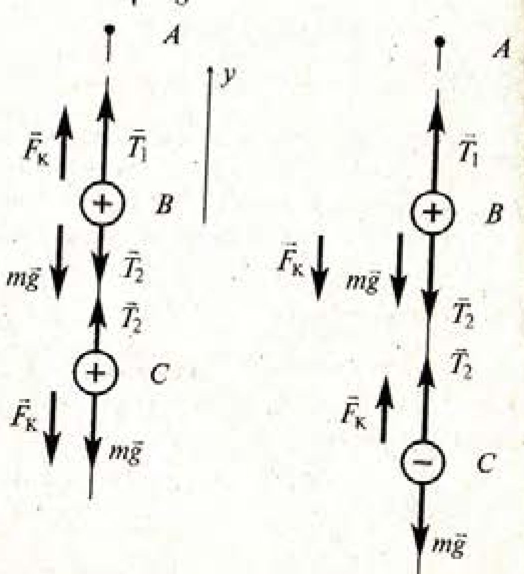


Рис. 18.17

Рис. 18.18

18.23. Одинаковые шарики массой по 0,2 г подвешены на нити так, как показано на рис. 18.16. Расстояние между шариками BC = = 3 см. Найдите силу натяжения нити на участках AB и BC, если шарики получили одинаковые по модулю заряды по 10 нКл. Рассмотрите случаи: 1) заряды одного знака, 2) заряды разного знака.

Ответ: 1) $T_1 = 4$ мН, $T_2 = 3$ мН; 2) $T_1 = 4$ мН, $T_2 = 1$ мН.

Решение. 1) Заряды имеют одинаковые знаки (положительные) (рис. 18.17). Для шарика C уравнение равновесия $m\vec{g} + \vec{F}_к + \vec{T}_2 = 0$;

(y): $T_2 - F_К - mg = 0$; $F_К = k\frac{q^2}{r^2}$; $T_2 = k\frac{q^2}{r^2} + mg = 3$ мН.

Для шарика B: $m\vec{g} + \vec{F}_К + \vec{T}_2 + \vec{T}_1 = 0$; ($y$): $-mg + F_К - T_2 + T_1 = 0$;

отсюда $T_1 = mg - F_К + T_2$; $T_1 = mg - k\frac{q^2}{r^2} + k\frac{q^2}{r^2} + mg = 2mg = 4$ мН.

2) Заряды разноименные. (рис. 18.18) Для шарика C по второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_К = 0$;

(y): $T_2 = mg - F_К$; $F_К = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$; $T_2 = mg - k\frac{q_1q_2}{r^2} = 1$ мН.

Для заряда B: $m\vec{g} + \vec{F}_К + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$; ($y$): $T_1 - F_к - mg - T_2 = 0$;

$T_1 = k\frac{q_1q_2}{r^2} + mg + mg - k\frac{q_1q_2}{r^2} = 2mg = 4$ мН.

18.24. На двух нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке, подвешены два шарика. Сравните углы отклонения нитей от вертикали, если: 1) шарики, имеющие одинаковые массы, заряжены одноименно и заряд первого шарика больше, чем заряд второго; 2) заряды шариков одинаковы, а масса первого больше, чем масса второго.

Ответ: 1) $\alpha = \beta$; 2) $\alpha < \beta$.

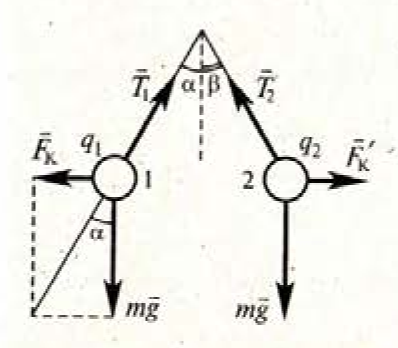


Рис. 18.19

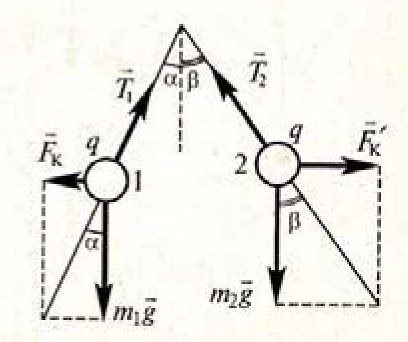


Рис. 18.20

Решение. 1) Уравнение равновесия для каждого из шариков (рис. 18.19). 1. $m\vec{g} + \vec{F}_K + \vec{T}_1 = 0$; 2. $m\vec{g} + \vec{F}_K' + \vec{T}_2 = 0$.

По третьему закону Ньютона $\vec{F}_K = -\vec{F}_K'$, $F_K = F_K'$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_K}{mg}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{F_K'}{mg}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\alpha = \beta$. Углы отклонения шариков одинаковы.

2) Массы шариков разные: $m_1 > m_2$ (рис. 18.20). $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_K}{m_1 g}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{F_K'}{m_2 g}$; т. к. $F_K = F_K'$, а $m_1 > m_2$, тогда $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$, т. е. $\alpha < \beta$, угол отклонения второго шарика больше.

18.25. Два маленьких проводящих шарика подвешены на длинных непроводящих нитях к одному крючку. Шарики заряжены одинаковыми зарядами и находятся на расстоянии r = 5,0 см друг от друга. Что произойдет после того, как один из шариков разрядить?

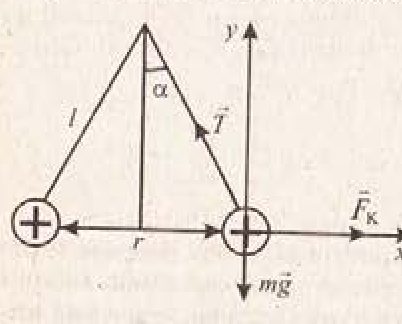


Рис. 18.21

О т в е т: r_1 = 3 см.

Решение. Оба шарика заряжены. По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_K = 0$ (рис. 18.21);

(x): $F_K - T\sin\alpha = 0$; $F_K = T\sin\alpha$;

(y): $T\cos\alpha - mg = 0$; $mg = T\cos\alpha$; $F_K = k\frac{q^2}{r^2}$; $mg = \frac{F_K}{\operatorname{tg}\alpha}$. (1)

Если один из шариков разрядить, то они вначале соприкоснутся, половина заряда заряженного шарика перейдет на разряженный, т. е. каждый из них будет иметь заряд $\frac{q}{2}$ и они разойдутся на меньшее, чем было ранее расстояние r_1. Тогда уравнение равновесия $m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{K_1} = 0$.

(x): $F_{K_1} - T_1\sin\alpha_1 = 0$; $F_{K_1} = T_1\sin\alpha_1$;

(y): $T_1\cos\alpha_1 - mg = 0$; $mg = T_1\cos\alpha_1$;

$F_{K_1} = k\frac{q^2}{4r_1^2}$; $mg = \frac{F_{K_1}}{\operatorname{tg}\alpha_1}$. (2)

Из (1) и (2) получим $F_K \operatorname{tg}\alpha_1 = F_{K_1}\operatorname{tg}\alpha$. Так как нити длинные, то углы α и α_1 малы, тогда $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha = \frac{r}{2l}$; $\operatorname{tg}\alpha_1 \approx \sin\alpha_1 = \frac{r_1}{2l}$; l — длина нити. $k\frac{q^2}{r^2}\cdot\frac{2l}{r} = k\frac{q^2}{4r_1^2}\cdot\frac{2l}{r_1}$; $r_1 = \frac{r}{\sqrt[3]{4}} \approx 3$ см.

18.26. К шелковым нитям длиной по l = 20 см, точки подвеса которых находятся на одном уровне, на расстоянии d =10 см друг от друга подвешены два маленьких шарика массой по m = 50 г. При сообщении им одинаковых по абсолютному значению, но противоположных по знаку зарядов шарики сблизились до расстояния r = 2 см. Определите величины сообщенных им зарядов.

О т в е т: $q = r\sqrt{\frac{mg(d-r)}{2kl}} = 66$ нКл.

Решение самостоятельное.

18.27. Два заряда в вакууме взаимодействуют с такой же силой на расстоянии r_1 = 27 см, как в воде на расстоянии r_2 = 3,0 см. Определите диэлектрическую проницаемость воды.

О т в е т: $\varepsilon = 81$.

Решение. По закону Кулона $F_{K_1} = F_{K_2}$; $k\frac{q^2}{r_1^2} = k\frac{q^2}{\varepsilon r_2^2}$; $\varepsilon = \frac{r_1^2}{r_2^2} = 81$.

18.28. Два одинаковых заряженных маленьких шарика, подвешенные на нитях одинаковой длины, находятся в керосине. Какова должна быть плотность $\rho_ш$ шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и керосине был один и тот же? Плотность керосина $\rho_к = 0,8\cdot10^3$ кг/м³; относительная диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$.

О т в е т: $\rho_ш = 1,6\cdot10^3$ кг/м³.

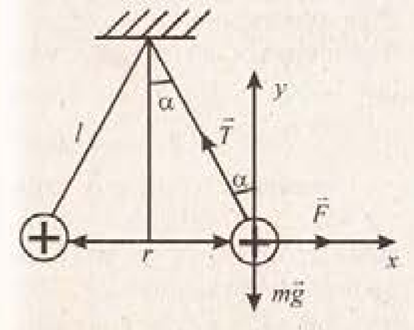


Рис. 18.22

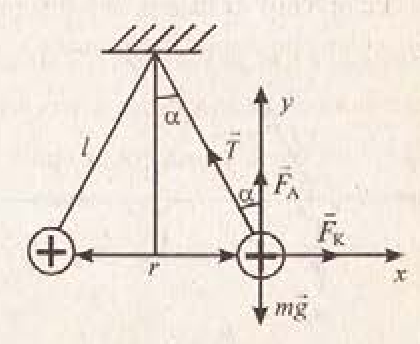


Рис. 18.23

Решение. На каждый заряженный шарик в воздухе действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$ сила натяжения нити $\vec{T}$ и кулоновская сила отталкивания от другого шарика $\vec{F}$ (рис. 18.22).

Условие равновесия шариков $m\vec{g}+\vec{T}+\vec{F}=0$. Проецируя уравнение на оси x и y, получаем:

$$(x):\ F - T\sin\alpha = 0,$$

$$(y):\ T\cos\alpha - mg = 0,\ \text{т. е.}\ F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha,\ \ \mathrm{tg}\,\alpha = F/mg.$$

В керосине действует дополнительная выталкивающая сила Архимеда $\vec{F}_A$ (рис. 18.23). Условие равновесия при этом:

$m\vec{g}+\vec{T}_1+\vec{F}_K+\vec{F}_A=0$, $F_A=\rho_к g V_ш$; $V_ш = m/\rho_ш$ — объем шарика, $F_A = mg\rho_к/\rho_ш$. В проекциях получаем:

$$(x):\ F_K - T_1\sin\alpha_к = 0,$$

$$(y):\ T_1\cos\alpha_к + F_A - mg = 0,\ \ \mathrm{tg}\,\alpha_к = \frac{F_K}{mg(1-\rho_к/\rho_ш)}.$$

Учитывая, что $\alpha=\alpha_к$, получаем:

$$\frac{F}{mg} = \frac{F_K}{mg(1-\rho_к/\rho_ш)};\ \text{откуда}\ 1-\frac{\rho_к}{\rho_ш} = \frac{F_K}{F}.$$

По закону Кулона $F=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; $F_K = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, т. е.

$$F_K/F = 1/\varepsilon,\ \text{тогда}\ 1-\frac{\rho_к}{\rho_ш}=\frac{1}{\varepsilon},\ \ \rho_ш = \frac{\rho_к}{1-1/\varepsilon} = \frac{\varepsilon\rho_к}{\varepsilon-1};$$

$\rho_ш = 1{,}6\cdot10^3$ кг / м^3.

18.29. Одинаковые шарики, подвешенные на закрепленных в одной точке нитях равной длины, зарядили одинаковыми одноименными зарядами. Шарики оттолкнулись, и угол между нитями стал равен $\alpha = 60°$. После погружения шариков в жидкий диэлектрик угол между нитями уменьшился до $\beta = 50°$. Найдите диэлектрическую проницаемость среды ε. Выталкивающей силой пренебречь.

Ответ: $\varepsilon = 1{,}7$.

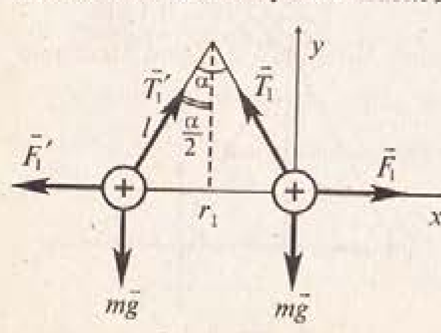


Рис. 18.24

Решение. Рассмотрим заряды в воздухе. Шарики неподвижны, поэтому по второму закону Ньютона можно записать $m\vec{g}+\vec{F}_1+\vec{T}_1=0$. Проекции на оси x и y имеют вид (рис. 18.24): $F_1 - T_1\sin\frac{\alpha}{2}=0$;

$$T_1\cos\frac{\alpha}{2} - mg = 0,\ \text{откуда}\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{F_1}{mg};\ \ F_1 = mg\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

С другой стороны, сила кулоновского отталкивания одноименных зарядов равна: $F_1 = k\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon_1 r_1^2}$; (в воздухе $\varepsilon_1 = 1$). (2)

Аналогично находим силу взаимодействия зарядов после их погружения в жидкий диэлектрик: $F_2 = mg\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$ (3)

и $F_2 = k\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon_2 r_2^2}$. (4)

Тогда из (2) и (4) получаем: $\varepsilon_2 = \frac{r_1^2 F_1}{r_2^2 F_2}$. (5)

Приняв к сведению выражения (1) и (3) и то, что $r_1 = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$ (l — длина нити), а $r_2 = 2l\sin\frac{\beta}{2}$, из (5) получаем:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{\left(2l\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 mg\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(2l\sin\frac{\beta}{2}\right)^2 mg\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}} = 1{,}7.$$

18.30. Шарик массой $m = 10$ г с зарядом $q = 50$ нКл, подвешенный на нити длиной $l = 20$ см, вращается вокруг неподвижного заряда, такого же, как и заряд шарика. Угол между направлением нити и вертикалью равен $\alpha = 30°$. Найдите угловую скорость равномерного вращения шарика и силу натяжения нити.

Ответ: $\omega = 7{,}4$ с$^{-1}$, $T = 0{,}1$ Н.

Решение. По второму закону Ньютона

$$m\vec{g}+\vec{F}_K+\vec{T} = m\vec{a}_n;$$

$$(x):\ T\sin\alpha - F_K = m\omega^2 R;$$

$$(y):\ T\cos\alpha - mg = 0;$$

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 0{,}1\ \text{Н};$$

$$\frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha} - k\frac{q^2}{R^2} = m\omega^2 R;$$

Рис. 18.25

$R = l\sin\alpha$, тогда $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha} - \dfrac{kq^2}{ml^3\sin^3\alpha}} = 7,4\ \text{с}^{-1}$.

18.31. Электрон вращается по круговой орбите радиусом r вокруг ядра с зарядом Ze. Каковы скорость и период вращения электрона?

Ответ: $\upsilon = e\sqrt{\dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 rm}}$, $T = \dfrac{2\pi r}{e}\sqrt{\dfrac{4\pi\varepsilon_0 rm}{Ze}}$.

Решение. $F_К = ma_n$; $k\dfrac{e\cdot Ze}{r^2} = \dfrac{m\upsilon^2}{r}$; $\upsilon = \sqrt{\dfrac{kZe^2}{mr}} = e\sqrt{\dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 rm}}$.

Период вращения электрона $T = \dfrac{2\pi r}{\upsilon} = \dfrac{2\pi r}{e}\sqrt{\dfrac{4\pi\varepsilon_0 rm}{Ze}}$.

19. НАПРЯЖЕННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

19.1. Два одноименных заряда $q_1 = 0,27$ мкКл и $q_2 = 0,17$ мкКл находятся на расстоянии $l = 20$ см друг от друга. Определите, в какой точке на прямой между зарядами напряженность поля равна нулю.

Рис. 19.1

Ответ: $r_1 = 11,1$ см.

Решение. Согласно условию $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$ (рис. 19.1). $E_1 - E_2 = 0$;

$$E_1 = E_2;\ k\frac{q_1}{r_1^2} = k\frac{q_2}{(l - r_1)^2};$$

$$\sqrt{q_1}(l - r_1) = \sqrt{q_2}r_1;\ r_1 = \frac{\sqrt{q_1}\,l}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} = 11,1\ \text{см}.$$

19.2. В точке A напряженность поля точечного заряда $E_A = 36$ В/м, а в точке C напряженность $E_C = 9$ В/м. Найти наряженность в точке O, лежащей посередине между точками A и C (рис. 19.2).

Рис. 19.2

Ответ: $E_O = 16$ В/м.

Решение. Расстояние от заряда до точки A обозначим как r_1, а от точки A до C — r_2.

$$E_A = k\frac{q}{r_1^2};\ E_C = k\frac{q}{(r_1 + r_2)^2};\ E_O = k\frac{q}{\left(r_1 + \frac{r_2}{2}\right)^2} = k\frac{4q}{(2r_1 + r_2)^2};$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{kq}{E_A}};\ r_1 + r_2 = \sqrt{\frac{kq}{E_C}}.$$

$$E_O = \frac{k4q}{\left(\sqrt{\frac{kq}{E_A}} + \sqrt{\frac{kq}{E_C}}\right)^2} = \frac{4q}{\left(\frac{q}{E_A} + \frac{q}{E_C} + \frac{2q}{\sqrt{E_A\cdot E_C}}\right)} = \frac{4E_AE_C}{E_A + E_C + 2\sqrt{E_A\cdot E_C}}.$$

$E_O = 16$ В/м.

19.3. Определите напряженность поля в точке, лежащей посредине между зарядами $q_1 = 10$ нКл и $q_2 = -5$ нКл, расположенными на расстоянии $r = 80$ см друг от друга. Как изменится напряженность, если оба заряда положительны?

Ответ: а) $E = 0,84$ кВ/м; б) $E = 0,28$ кВ/м.

Решение. а) Заряды разного знака (рис. 19.3а):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2;\ E_1 = \frac{kq_1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2};\quad E_2 = \frac{k|q_2|}{\left(\frac{r}{2}\right)^2};$$

$$E = E_1 + E_2;\ E = \frac{4k}{r^2}(q_1 + |q_2|) = 0,84\ \text{кВ/м}.$$

б) Оба заряда положительны (рис. 19.3б):

$$E = E_1 - E_2 = \frac{4k}{r^2}(q_1 - |q_2|) = 0,28\ \text{кВ/м}.$$

Рис. 19.3

19.4. Два заряда расположены на оси x. Один заряд, равный 1,25 нКл, расположен в точке $x_1 = 3$ см, а другой, равный $-1,25$ нКл, — в точке $x_2 = -3$ см. Вычислить модуль и направление напряженности поля в точках $(0;\ 0)$, $(0;\ 3,0)$, $(0;\ -3,0)$ на оси y.

Ответ: $E_{(0;0)} = 25$ кВ/м, $E_{(0;3)} = E_{(0;-3)} = 17,7$ кВ/м параллельно оси x.

Решение. Точка $C(0,0)$ (рис. 19.4): $\vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. $E_C = E_1 + E_2$, направление противоположно оси x.

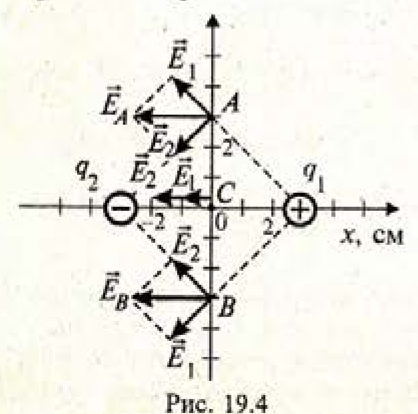


Рис. 19.4

$$E_1 = k\frac{q_1}{x_1^2};\ E_2 = k\frac{|q_2|}{x_2^2};$$

$$E_C = k\left(\frac{q_1}{x_1^2} + \frac{|q_2|}{x_2^2}\right) = 25\ \text{кВ/м},$$

$|E_C| = 25$ кВ/м.

Точка $A(0,3)$:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2;\ E_A = E_1\sqrt{2};$$

$$E_1 = E_2 = k\frac{q_1}{r^2} = k\frac{q_1}{(x^2 + y^2)};$$

$$E_A = k\frac{q_1\sqrt{2}}{\left(x^2+y^2\right)} = 8{,}8 \text{ кВ/м}.$$

Точка $B(0,-3)$ (рис. 19.4): $E_B = E_A = 8{,}8$ кВ/м, имеют направление, параллельное оси x, и направлены в отрицательном направлении.

19.5. Два одинаковых заряда по 1,5 нКл каждый расположены в плоскости — xy. Один заряд расположен в точке $x_1 = 3{,}0$ см, $y_1 = 0$, другой — в точке $x_2 = 0$, $y_2 = 2{,}0$ см. Вычислите модуль и направление напряженности в точке (3,0; 2,0).

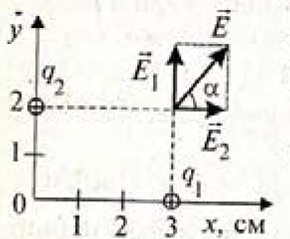


Рис. 19.5

Ответ: $E = 36{,}5$ кВ/м, под углом $\alpha = 66°$ к оси x.

Решение. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$; (рис. 19.5), $q_1 = q_2 = q$.

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = k\sqrt{\frac{q_1^2}{y_2^4} + \frac{q_2^2}{x_1^4}} = kq\sqrt{\frac{1}{y_2^4} + \frac{1}{x_1^4}} =$$

$$= 36{,}5 \text{ кВ/м}. \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{E_1}{E_2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_1}{y_2}\right)^2 = \operatorname{arctg} 2{,}25 = 66°.$$

19.6. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 40$ нКл и $q_2 = -30$ нКл, которые находятся на расстоянии $d = 10$ см один от другого. Определите напряженность E поля в точке A, отдаленной от первого заряда на $r_1 = 6$ см и от второго заряда на $r_2 = 8$ см.

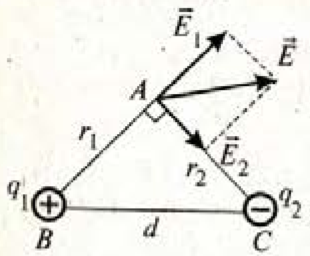


Рис. 19.6

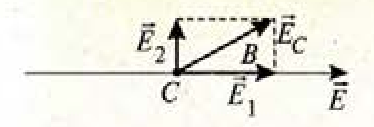
Ответ: $E \approx 110$ кВ/м.

Решение. Согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (рис. 19.6).

$E_1 = k\frac{q_1}{r_1^2}$; $E_2 = k\frac{q_2}{r_2^2}$. Треугольник ABC прямоугольный (соотношение сторон $3:4:5$), тогда $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$,

$$E = k\sqrt{\left(\frac{q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{r_2^2}\right)^2} = 110 \text{ кВ/м}.$$

19.7. В однородном поле напряженностью $E = 40$ кВ/м расположен заряд 27 нКл. Найдите напряженность результирующего поля на расстоянии $r = 9$ см от заряда в точках, которые лежат: а) на силовой линии однородного поля, которая проходит через заряд;



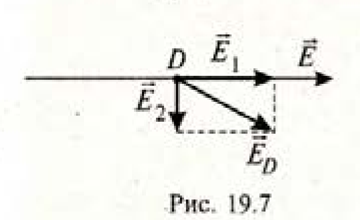


Рис. 19.7

б) на прямой, проходящей через заряд и перпендикулярной силовым линиям.

Ответ: $E_A = 10$ кВ/м, $E_B = 70$ кВ/м, $E_C = E_D = 50$ кВ/м.

Решение. Согласно принципу суперпозиции $\vec{E}_{A,B,C,D} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$; $\vec{E}_1 = \vec{E}$,

$E_2 = k\frac{q}{r^2}$. Точка A (рис. 19.7):

$E_A = E_1 - E_2 = 10$ кВ/м.

Точка B: $E_B = E_1 + E_2 = 70$ кВ/м.

Точки C и D:

$E_C = E_D = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 50$ кВ/м.

19.8. Два заряда по 25 нКл каждый расположены на расстоянии 24 см друг от друга. Найдите напряженность электрического поля и потенциал в точке, удаленной на 15 см от каждого из зарядов. Рассмотрите случаи: а) заряды одноименные, б) заряды разноименные.

Решение. а) Пусть оба заряда положительные. Согласно принципу суперпозиции полей напряженность электрического поля в точке O (см. рис. 19.8а) равна $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ — напряженности полей в точке O, созданные точечными зарядами q_1 и q_2: $E_1 = E_2 = k\frac{q_1}{r^2}$. Проецируем уравнение на оси x и y:

(x): $E_x = E_1\sin\alpha - E_2\sin\alpha = 0$,

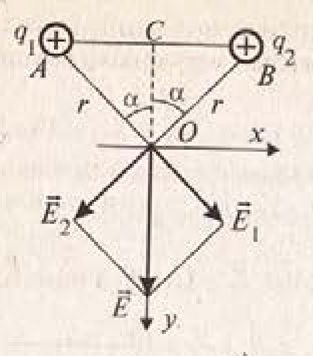
(y): $E_y = E_1\cos\alpha + E_2\cos\alpha = 2E_1\cos\alpha$.

Тогда $E = E_y = 2E_1\cos\alpha = 2k\frac{q_1}{r^2}\cos\alpha$. Из треугольника ACO получаем: $\cos\alpha = \frac{1}{r}\left(\sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)$. Следовательно,

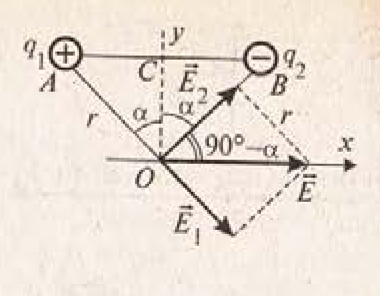
$$E = \frac{2kq_1}{r^2}\cdot\frac{\sqrt{r_1^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}}{r} = \frac{2kq_1\sqrt{r_1^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}}{r^3} = 1{,}2\cdot10^{-2} \text{ В/м}.$$

Потенциал поля в точке O $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2kq_1}{r} = 3\cdot10^3$ В.

б) Пусть заряды q_1 и q_2 имеют разные знаки. Тогда векторы напряженностей $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}$ направлены так, как показано на



а)



б)

Рис. 19.8

рис. 19.8б). Так как $E_1 = E_2$, то вектор $\vec{E}$ совпадает по направлению с направлением оси x: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Находим проекции на оси x и y:

(x): $E_x = E_1 \cos(90° - \alpha) + E_2 \cos(90° - \alpha)$;

(y): $E_y = E_1 \sin(90° - \alpha) - E_2 \sin(90° - \alpha) = 0$.

Тогда $E = E_x = 2E_1 \cos(90° - \alpha) = 2k \dfrac{q_1}{r^2} \sin\alpha$.

Из ΔACO $\sin\alpha = \dfrac{l/2}{r} = \dfrac{l}{2r}$. $E = 2k \dfrac{q_1}{r^2} \cdot \dfrac{l}{2r} = \dfrac{kq_1 l}{r^3} = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$ В/м.

Потенциал в точке O $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = k\dfrac{q_1}{r} - k\dfrac{q_2}{r} = 0$.

19.9. В вершинах равностороннего треугольника со стороной a находятся заряды $+q$, $+q$ и $-q$. Найдите напряженность поля E_0 в центре треугольника.

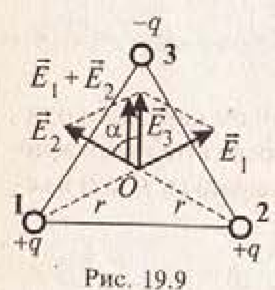


Рис. 19.9

Ответ: $E_0 = \dfrac{3q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$.

Решение. Согласно принципу суперпозиции $\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ (рис. 19.9).

$|E_1| = |E_2| = |E_3| = k\dfrac{q}{r^2} = k\dfrac{3q}{a^2}$.

Результирующая напряженность поля направлена вдоль $O3$, тогда

$$E_0 = E_3 + 2E_1 \cos\alpha; \quad \alpha = 60°; \quad E_0 = \frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

19.10. Четыре одинаковых заряда $q = 40$ мкКл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 2{,}0$ м. Какова будет напряженность

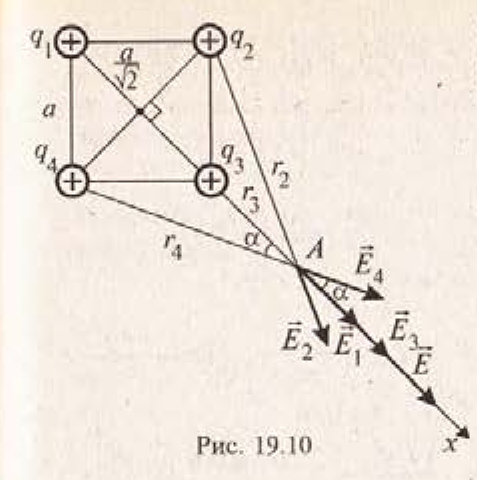


Рис. 19.10

поля на расстоянии $2a$ от центра квадрата на продолжении диагонали?

Ответ: $E = 0{,}10$ МВ/м.

Решение. Согласно принципу суперпозиции напряженность поля в точке A равна (рис. 19.10) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$;

$$E_1 = k\frac{q}{r_1^2} = k\frac{q}{\left(2a + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2};$$

$$E_3 = k\frac{q}{r_3^2} = k\frac{q}{\left(2a - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2};$$

$$E_2 = E_4 = k\frac{q}{r_2^2}. \quad r_2^2 = r_4^2 = \left[(2a)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{9}{2}a^2.$$

$\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ совпадают по направлению с осью x, проекции $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_4$ на ось x равны $E_{2x} = E_{4x} = E_2 \cos\alpha$; $\cos\alpha = \dfrac{2a}{r_2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Модуль вектора E равен

$$E = E_1 + E_3 + 2E_2 \cos\alpha = \frac{kq}{a^2}\left[\frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}}{9 \cdot 3}\right] =$$

$= 0{,}1 \cdot 10^6$ В/м $= 0{,}1$ МВ/м.

19.11. В вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см находятся одинаковые положительные заряды $q = 5$ нКл. Определите напряженность электростатического поля: 1) в центре квадрата (т. C); 2) в середине одной из сторон квадрата (т. A).

Ответ: 1) $E_C = 0$; $E_A = 6{,}4$ кВ/м.

Решение.

1) $\vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$ (рис. 19.11).

$|E_1| = |E_2| = |E_3| = |E_4|$; $E_C = 0$.

2) $\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$ (рис. 19.11).

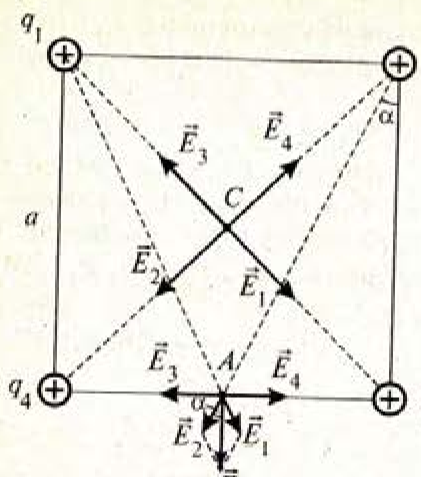


Рис. 19.11

$|E_3| = -|E_4|$; $E_A = 2E_1 \cos\alpha$;

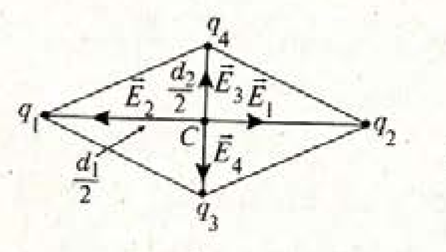
$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)} = \frac{q}{5\pi\varepsilon_0 a^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

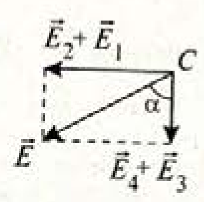
$$E_A = 2\cdot\frac{q}{5\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4q}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 a^2} = 6{,}4 \text{ кВ/м}.$$

19.12. Диагонали ромба $d_1 = 96$ см и $d_2 = 32$ см. На концах длинной диагонали расположены точечные заряды $q_1 = 64$ нКл и $q_2 = 352$ нКл, на концах короткой — точечные заряды $q_3 = 8$ нКл и $q_4 = 40$ нКл. Найдите модуль и направление (относительно короткой диагонали) напряженности электрического поля в центре ромба.

Ответ: $E = 15{,}9$ кВ/м, $\alpha = 45°$.



а)



б)

Рис. 19.12

Решение. Напряженность поля в центре ромба (рис. 19.12а) (в точке C) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$.

$$E_1 = k\frac{4q_1}{d_1^2} = 2{,}5 \text{ кВ/м}; \quad E_2 = k\frac{4q_2}{d_1^2} = 13{,}8 \text{ кВ/м};$$

$$E_3 = k\frac{4q_3}{d_2^2} = 2{,}8 \text{ кВ/м}; \quad E_4 = k\frac{4q_4}{d_2^2} = 14{,}0 \text{ кВ/м}.$$

Из рис. 19.12 очевидно $E = \sqrt{(E_4 - E_3)^2 + (E_2 - E_1)^2} = 15{,}9$ кВ/м.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{E_2 - E_1}{E_4 - E_3} = 1; \quad \alpha = 45°.$$

19.13. Определите напряженность поля, создаваемого точечным диполем с электрическим моментом $p = 2{,}0\cdot10^{-12}$ Кл/м, на расстоянии $d = 10$ см от центра диполя в направлении, перпендикулярном оси диполя.

Ответ: $E = 18$ В/м.

Решение. Диполь — электрическая система, состоящая из двух зарядов q, равных по величине и противоположных по знаку. Электрический момент диполя (рис. 19.13а) $\vec{p}_e = q\vec{l}$, l — расстояние между зарядами, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (рис. 19.13б); $E_1 = E_2$; $E = 2E_1\cos\alpha$.

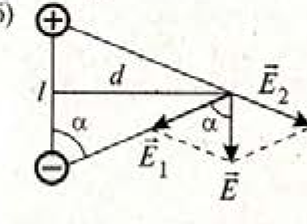


Рис. 19.13

$$\cos\alpha = \frac{l}{2\sqrt{\frac{l^2}{4} + d^2}}; \quad E_1 = \frac{kq}{\left(\frac{l^2}{4} + d^2\right)};$$

$$E = \frac{2kql}{2\left(\frac{l^2}{4} + d^2\right)\sqrt{\frac{l^2}{4} + d^2}} = \frac{8kp}{\left(l^2 + 4d^2\right)^{3/2}}.$$

Учтем, что $l^2 \ll 4d^2$, тогда $E = \frac{kp}{d^3} = 18$ В/м.

19.14. Расстояние между зарядами диполя $l = 1{,}0$ мкм. Найдите величину зарядов диполя, если напряженность в точке, удаленной от обоих зарядов на $d = 2{,}0$ см, равна $E_0 = 1{,}8$ В/м.

Ответ: $q = 1{,}6$ нКл.

Решение самостоятельное. См. задачу 19.13.

19.15. Поле создано точечным зарядом. Потенциалы точек A и C равны $\varphi_A = 15$ В и $\varphi_C = 5{,}0$ В (рис. 19.2). Найти потенциал точки O, лежащей посередине между точками A и C.

Ответ: $\varphi_O = 7{,}5$ В.

Решение. $\varphi_A = k\frac{q}{r_1}$; $\varphi_C = k\frac{q}{r_1 + r_2}$; (1)

r_1 — расстояние от заряда до точки A, r_2 — расстояние AC.

$$\varphi_O = \frac{kq}{r_1 + \frac{r_2}{2}} = \frac{2kq}{2r_1 + r_2}. \text{ Из (1) } r_1 = \frac{kq}{\varphi_A}; \quad r_1 + r_2 = \frac{kq}{\varphi_C};$$

$$\varphi_O = \frac{2kq}{\frac{kq}{\varphi_A} + \frac{kq}{\varphi_C}} = \frac{2\varphi_A\varphi_C}{\varphi_A + \varphi_C} = 7{,}5 \text{ В}.$$

19.16. Два одноименных заряда по 1,0 нКл каждый находятся на некотором расстоянии друг от друга. Определите потенциал точки, лежащей на расстоянии 9,0 см от каждого из зарядов. Как изменится этот потенциал, если все пространство, в котором находятся заряды, заполнить керосином?

Ответ: $\varphi_1 = 0{,}2$ кВ; $\varphi' = 0{,}1$ кВ.

Решение. Согласно принципу суперпозиции

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi_1 = \frac{2kq}{\varepsilon r};\ \ \varepsilon = 1;\ \ \varphi = 0{,}2\ \text{кВ}.$$

В керосине $\varepsilon = 2$; $\varphi' = 0{,}1$ кВ.

19.17. Металлическое кольцо радиусом R имеет заряд q. 1) Определите напряженность поля и потенциал в центре кольца. 2) Чему равен потенциал на расстоянии a от центра кольца вдоль оси, перпендикулярной плоскости кольца?

Ответ: 1) $E_O = 0$, $\varphi_0 \dfrac{kq}{R}$; 2) $\varphi = \dfrac{kq}{\sqrt{R^2 + a^2}}$.

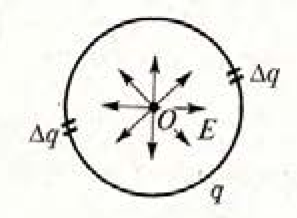


Рис. 19.14

Рис. 19.15

Решение. 1) В центре кольца векторы напряженности поля, создаваемые заряженными элементами кольца Δq, расположенными на противоположных сторонах кольца, направлены в противоположные стороны и в сумме дают нуль, т. е. $E_O = 0$ (рис. 19.14). Потенциал — величина алгебраическая, т. е. потенциалы, создаваемые элементами кольца, суммируются $\varphi_O = \sum\limits_i \Delta\varphi_i = \sum\limits_i \dfrac{k\Delta q_i}{R} = \dfrac{kq}{R}$.

2) Аналогично рассуждая, для точки A получим (рис. 19.15)

$$\varphi_A = \sum_i \Delta\varphi_i = \sum_i \frac{k\Delta q_i}{r} = \sum_i \frac{k\Delta q_i}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + a^2}}.$$

19.18. На поверхности шара радиусом $R = 9{,}0$ см равномерно распределен положительный заряд $q = 0{,}10$ нКл. Найдите напряженность и потенциал в центре шара и на расстоянии $r = 90$ см от центра.

Ответ: $E_1 = 0$, $\varphi_1 = 10$ В; $E_2 = 1{,}1$ В/м, $\varphi_2 = 1{,}0$ В.

Решение. Напряженность в центре шара равна нулю: $E_1 = 0$, т. к. заряд распределен по поверхности, а внутри заряда нет. Потенциал внутри сферы равен потенциалу на ее поверхности $\varphi_1 = \dfrac{kq}{R} = 10$ В.

Вне сферы потенциал и напряженность равны потенциалу и напряженности точечного заряда, равного заряду сферы и помещенного в центр сферы. $E_2 = \dfrac{kq}{r^2} = 1{,}1$ В/м; $\varphi_2 = \dfrac{kq}{r} = 1{,}0$ В.

19.19. Сфера радиусом R равномерно заряжена электричеством с поверхностной плотностью σ. Найдите модуль напряженности и потенциал как функцию расстояния от центра сферы. Постройте графики функций $E(r)$ и $\varphi(r)$.

Решение. 1) $r \le R$, $E_1 = 0$, $\varphi_1 = \dfrac{kq}{R}$; $q = 4\pi R^2\sigma$, $\varphi_1(R) = \dfrac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0}$.

Потенциал внутри сферы равен потенциалу на поверхности сферы.

2) $r > R$; $E_2(r) = \dfrac{kq}{r^2} = \dfrac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2}$; $r = R$; $E_2(R) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ — на поверхности сферы наблюдается скачок напряженности.

$$\varphi_2(r) = \frac{kq}{r} = \frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r};\ \ \varphi_2(R) = \varphi_1(R) = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Графики зависимостей $E(r)$ и $\varphi(r)$ представлены на рис. 19.16.

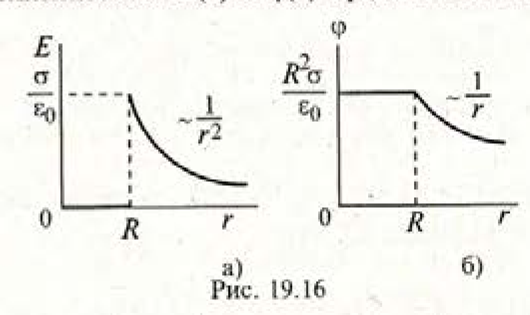


Рис. 19.16

19.20. Два шара — большой и маленький — равномерно заряжены электричеством с поверхностной плотностью σ. Будут ли одинаковы потенциалы шаров?

Решение. Потенциал сферы $\varphi = \dfrac{kq}{R} = \dfrac{k4\pi R^2\sigma}{R} = k4\pi R\sigma.$ (1)

Как видно из (1) потенциал зависит от радиуса сферы, т. е. при одинаковой поверхностной плотности заряда потенциал сферы большего радиуса больше, чем потенциал сферы меньшего радиуса.

19.21. Металлическая сфера, диаметр которой $d = 18$ см, заряжается до потенциала $\varphi = 300$ В. Определите, с какой плотностью распределен заряд по поверхности сферы.

Ответ: $\sigma = 29{,}5$ нКл/м^2.

Решение. $\varphi = \frac{kq}{R} = \frac{k4\pi R^2\sigma}{R} = k2\pi d\sigma$, откуда $\sigma = \frac{\varphi}{k2\pi d} = 29{,}5$ нКл/м^2.

19.22. Полый шар равномерно заряжен электричеством. В центре шара потенциал равен $\varphi_1 = 120$ В, а в точке на расстоянии $r = 36$ см от центра потенциал равен $\varphi_2 = 20$ В. Каков радиус шара?

Ответ: $R = 6$ см.

Решение. Потенциал в центре шара равен $\varphi_1 = \frac{kq}{R}$; откуда заряд шара равен $q = \frac{\varphi_1 R}{k}$. Потенциал на расстоянии r от центра шара равен $\varphi_2 = \frac{kq}{r} = \frac{k\varphi_1 R}{kr} = \frac{\varphi_1 R}{r}$, следовательно, радиус шара равен $R = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} r = 6$ см.

19.23. Три заряженные водяные капли сливаются в одну большую каплю. Найдите потенциал большой капли, если потенциал каждой малой $\varphi_1 = 900$ В.

Ответ: $\varphi = 1{,}87 \cdot 10^3$ В.

Решение. Потенциал большой капли определим из формулы: $\varphi = k\frac{Q}{R} = k\frac{nq}{R}$, где Q — заряд большой капли, R — радиус большой капли, n — количество капель, q — заряд малой капли.

Заряд малой капли найдем из формулы потенциала малой капли: $\varphi_1 = k\frac{q}{r}$; $q = \frac{\varphi_1 r}{k}$, где r — радиус малой капли. Объем большой капли равен сумме объемов малых капель, т. е. $\frac{4}{3}\pi R^3 = n\frac{4}{3}\pi r^3$, $R = r\sqrt[3]{n}$. Тогда $\varphi = k\frac{nq}{R} = k\frac{n\varphi_1 r}{kr\sqrt[3]{n}} = \varphi_1 n^{\frac{2}{3}} = 1{,}87 \cdot 10^3$ В.

19.24. Две металлические концентрические сферы, расположенные в воздухе, имеют размеры $R_1 = 20$ см и $R_2 = 40$ см (см. рис. 19.17). На внутренней сфере находится заряд $q_1 = -30$ нКл, внешняя сфера заряжена до потенциала $\varphi_2 = 600$ В. Найдите напряженности и потенциалы поля в точках A, B и C, расположенных на одной прямой на расстояниях $r_A = 10$ см, $r_B = 25$ см и $r_C = 50$ см от центра сфер.

Ответ: $E_A = 0$, $E_B = -4320$ В/м, $E_C = -120$ В/м, $\varphi_A = -750$ В, $\varphi_B = -480$ В, $\varphi_C = -60$ В.

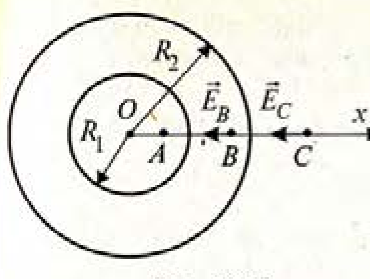


Рис. 19.17

Решение. Заряд, равномерно распределенный по поверхности сферы, создает вне сферы такое же поле, как и точечный заряд, расположенный в центре сферы. Внутри сферы напряженность поля равна нулю, а потенциал равен потенциалу на поверхности сферы. Заряд внешней сферы $q_2 = \varphi_2 C = \frac{\varphi_2 R_2}{k} = 26{,}6$ нКл, т. к. емкость шара $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$, $\varepsilon = 1$. Вычислим проекции напряженности электрического поля на ось x.

Вне сфер: $E_C = k\frac{q_1}{r_C^2} + k\frac{q_2}{r_C^2} = -120$ В/м; $\varphi_C = k\frac{q_1}{r_C} + k\frac{q_2}{r_C} = -60$ В.

Между сферами: $E_B = 0 + k\frac{q_1}{r_B^2} = k\frac{q_1}{r_B^2} = -4320$ В/м;

$\varphi_B = k\frac{q_2}{R_2} + k\frac{q_1}{r_B} = -480$ В.

Внутри малой сферы: $E_A = 0$, $\varphi_A = k\frac{q_1}{R_1} + k\frac{q_2}{R_2} = -750$ В.

Знак «–» при E_B и E_C показывает, что напряженности электрического поля направлены к центру сфер.

19.25. Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами (рис. 19.18). Найдите напряженность в точках O, A, C, зная, что заряды сфер равны $q_1 = 0{,}10$ мкКл и $q_2 = -0{,}60$ мкКл, а расстояние от центра до точки A равно $r_1 = 20$ см, до точки C — $r_2 = 50$ см.

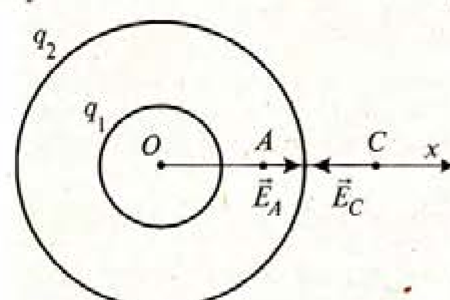


Рис. 19.18

Ответ: $E_0 = 0$, $E_A = 22{,}5$ кВ/м; $E_C = -18$ кВ/м.

Решение. Напряженность поля в точке O равна нулю: $E_0 = 0$. Напряженность поля в точке A (рис. 19.18):

$$E_A = E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} = 22{,}5 \text{ кВ/м}.$$

Для точки C $\vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$;

$$E_C = E_1 - E_2;\ E_C = \frac{kq_1}{r_2^2} - \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k}{r_2^2}(q_1 - |q_2|) = -18 \text{ кВ/м}.$$

19.26. Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами. Найдите потенциал в центре, а также в точках, отстоящих от центра на расстоянии $r_1 = 20$ см и $r_2 = 50$ см. Заряды сфер равны соответственно $q_1 = 1{,}0$ нКл и $q_2 = -1{,}0$ нКл, а их радиусы равны $R_1 = 10$ см и $R_2 = 30$ см.

Ответ: $\varphi_0 = 60$ В, $\varphi_1 = 15$ В, $\varphi_2 = 0$.

Решение. Потенциал в центре сфер, согласно принципу суперпозиции, равен $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$; $\varphi_0 = \dfrac{kq_1}{R_1} - \dfrac{k|q_2|}{R_2} = 60$ В. Потенциал в точке A на расстоянии r_1 от центра сфер $\varphi_A = \dfrac{kq_1}{r_1} - \dfrac{k|q_2|}{R_2} = 15$ В.

Потенциал в точке C на расстоянии r_2 от центра сфер

$$\varphi_C = \frac{kq_1}{r_2} - \frac{k|q_2|}{r_2} = \frac{k}{r_2}(q_1 - |q_2|) = 0.$$

19.27. Две концентрические проводящие сферы радиусами R и $2R$ заряжены соответственно зарядами одного знака $q_1 = 0{,}10$ мкКл и $q_2 = 0{,}20$ мкКл. На равном расстоянии от каждой из сфер потенциал $\varphi = 3{,}0$ кВ. Найдите R.

Ответ: $R = 50$ см.

Решение. Потенциал точки A $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (рис. 19.19);

$$\varphi = \frac{kq_1}{R + \dfrac{R}{2}} + \frac{kq_2}{2R}; \quad \varphi = \frac{k}{6R}(4q_1 + 3q_2),$$ откуда $$R = \frac{4q_1 + 3q_2}{24\pi\varepsilon_0\varphi} = 0{,}5 \text{ м}.$$

Рис. 19.19

19.28. Определите напряженность поля между двумя пластинами и вне их, если площадь каждой пластины S, их заряды q_1 и $q_2 < q_1$. Рассмотрите также случай, когда заряд второй пластины отрицательный.

Решение: 1) Пусть q_1 и q_2 положительны. Согласно принципу суперпозиции в любой точке $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$, поэтому в векторной форме во всех точках A, B и C $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (рис. 19.20а).

Направляем координатную ось Ox перпендикулярно пластинам. Спроецировав векторы напряженностей на эту ось, получим: $E_A = -(E_1 + E_2)$; $E_B = E_1 - E_2$; $E_C = E_1 + E_2$.

а) б)

в) г)

Рис. 19.20

Поскольку размеры пластин велики по сравнению с расстоянием до рассматриваемых точек, то: $E_1 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{q_1}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$;

$E_2 = \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$. Следовательно, ($x$): $E_A = -\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = -\dfrac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$;

$E_B = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$; $E_C = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$.

Значение величины напряженности для разных областей приведено на рис. 19.20б.

2) Когда заряд второй пластины отрицательный, напряженность поля между пластинами (рис. 19.20в, 19.20г)

в точке A $\quad E_A = -\dfrac{\sigma_1 - |\sigma_2|}{2\varepsilon_0\varepsilon} = -\dfrac{q_1 - |q_2|}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$,

в точке B $\quad E_B = \dfrac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{q_1 + |q_2|}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$,

в точке C $\quad E_C = \dfrac{\sigma_1 - |\sigma_2|}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{q_1 - |q_2|}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$.

19.29. Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1 = 1{,}0$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = -3{,}0$ нКл/м^2. Определите напряженность: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Постройте график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

Ответ: $E_{\text{I}} = 113$ В/м; $E_{\text{II}} = 226$ В/м; $E_{\text{III}} = -113$ В/м.

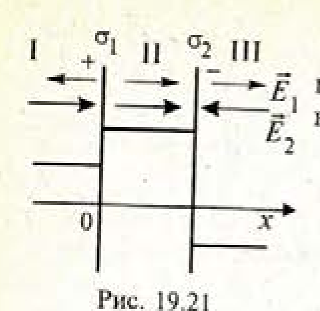


Рис. 19.21

Решение. Согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (рис. 19.21). Проецируем векторы напряженностей на ось *x*.

Область I: $E_I = E_2 - E_1$; $E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$;

$E_2 = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}$; $E_I = \frac{|\sigma_2| - \sigma_1}{2\varepsilon_0} = 113$ В/м.

Область II: $E_{II} = E_1 + E_2$;

$$E_{II} = \frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0} = 226 \text{ В/м.}$$

Область III: $E_{III} = E_1 - E_2$; $E_{II} = \frac{\sigma_1 - |\sigma_2|}{2\varepsilon_0} = -113$ В/м.

19.30. Напряженность поля в плоском воздушном конденсаторе E, а заряд на пластинах q. Какая сила действует на каждую из пластин? Равна ли она qE?

Ответ: $F = \frac{1}{2}qE$.

Решение. Напряженность электрического поля в пространстве между пластинами конденсатора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{E}_1$, $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$, где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ — напряженности, создаваемые первой и второй пластинами конденсатора соответственно. Сила, действующая, например, на первую пластину $\vec{F}_1$, определяется только полем, создаваемым второй пластиной, т. е. вектором $\vec{E}_2$, т. к. сам на себя заряд не действует. Поэтому $F_1 = qE_2 = \frac{1}{2}qE$, где q — заряд первой пластины. Аналогично на вторую пластину, имеющую заряд $-q$, действует сила $\vec{F}_2$ со стороны поля, создаваемого первой пластиной (с напряженностью $\vec{E}_1$): $F_2 = qE_1 = \frac{1}{2}qE$, т. е. сила, действующая на каждую из пластин, не равна qE.

19.31. Два заряда по $q_1 = q_2 = q = 1{,}0$ мкКл каждый находятся на расстоянии $r_1 = 50$ см друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до $r_2 = 5$ см?

Ответ: $A = 0{,}16$ Дж.

Решение. Считаем первый заряд закрепленным, а второй заряд передвигается в поле первого. Работа совершается против сил поля $A_{вн} = -A = q(\varphi_2 - \varphi_1)$, где $A_{вн}$ — работа внешних сил, A — работа

сил поля. $\varphi_1 = \frac{kq_1}{r_1}$; $\varphi_2 = \frac{kq_1}{r_2}$; $A_{вн} = kq_1q_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = kq^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$;

$A_{вн} = 0{,}16$ Дж.

19.32. Заряды 0,15 мкКл и 3,0 нКл находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Какую работу совершат силы поля, если второй заряд, отталкиваясь от первого, удалится от него на расстояние 10 м?

Ответ: $A = 40$ мкДж.

Решение самостоятельное. См. задачу 19.31.

19.33. Какую работу необходимо совершить при переносе точечного заряда $q_0 = 30$ нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 10$ см от поверхности заряженного металлического шара? Потенциал на поверхности шара $\varphi = 200$ В, радиус шара $R = 2$ см.

Ответ: $A = 1$ мкДж.

Решение. Работа электрического поля по переносу заряда $A = q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$, работа внешних сил $A_{вн} = -A = q_0(\varphi_2 - \varphi_1)$ $\varphi_1 = \varphi_\infty = 0$.

Потенциал точки φ_2 найдем, зная потенциал шара. $\varphi = \frac{kq}{R}$, тогда заряд шара $q = \frac{\varphi R}{k}$, и потенциал φ_2 равен

$$\varphi_2 = \frac{kq}{(R+r)} = \frac{k\varphi R}{k(R+r)} = \varphi\frac{R}{R+r}. \quad A_{вн} = q_0\varphi\frac{R}{R+r} = 1 \text{ мкДж.}$$

19.34. При переносе точечного заряда $q_0 = 10$ нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 20$ см от поверхности заряженного металлического шара, необходимо совершить работу $A = 0{,}5$ мкДж. Радиус шара $R = 4$ см. Найдите потенциал φ на поверхности шара.

Ответ: $\varphi = 0{,}3$ кВ.

Решение самостоятельное. См. задачу 19.33.

19.35. Найдите работу по переносу заряда $q_0 = 1$ нКл из точки A в точку B (рис. 19.22). Расстояние $a = 10$ см, величина зарядов $q_1 = 8$ нКл, $q_2 = -5$ нКл.

Ответ: $A = 0{,}44$ мкДж.

Рис. 19.22

Решение. $A = q_0(\varphi_A - \varphi_B)$;

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{kq_1}{a/2} - \frac{k|q_2|}{a/2} = \frac{2k}{a}(q_1 - |q_2|);$$

$$\varphi_B = \varphi_1' + \varphi_2' = \frac{kq_1}{\sqrt{a^2+4a^2}} - \frac{k|q_2|}{2a} = \frac{k}{a}\left(\frac{q_1}{\sqrt{5}} - \frac{|q_2|}{2}\right);$$

$$A = q_0\frac{k}{a}\left[2(q_1 - |q_2|) - \left(\frac{q_1}{\sqrt{5}} - \frac{|q_2|}{2}\right)\right] = 0{,}44 \text{ мкДж}.$$

19.36. Заряды $q_1 = 0{,}1$ мкКл и $q_2 = 1$ нКл находятся на расстоянии $r = 10$ см друг от друга. Какова потенциальная энергия этой ситемы?

Ответ: $W_п = 9$ мкДж.

Решение. Потенциальная энергия двух зарядов равна

$$W_п = k\frac{q_1q_2}{r} = 9 \text{ мкДж}.$$

19.37. Заряды q, $-2q$, $3q$ расположены в вершинах правильного треугольника со стороной a. Какова потенциальная энергия этой системы?

Ответ: $W_п = \frac{-5q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

Решение. Потенциальная энергия системы зарядов равна

$W_п = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i\varphi_i$, где φ_i — потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме i-го в точке, где находится i-й заряд.

$$W_п = \frac{k}{2}\left[q\left(-\frac{2q}{a} + \frac{3q}{a}\right) - 2q\left(\frac{q}{a} + \frac{3q}{a}\right) + 3q\left(\frac{q}{a} - \frac{2q}{a}\right)\right] = -\frac{5q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

19.38. Точечные заряды $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q = 1$ мкКл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 0{,}5$ м. Найдите потенциальную энергию этой системы.

Ответ: $W_п = 0{,}1$ Дж.

Решение. Потенциал, созданный в первой вершине зарядом, расположенным во второй вершине, $\varphi_{12} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Следовательно, потенциальные энергии взаимодействия зарядов q_1 и q_2, а также q_1 и q_3, q_1 и q_4, q_2 и q_3, q_2 и q_4, q_3 и q_4 будут:

$$W_{12} = k\frac{q_1q_2}{a} = k\frac{q^2}{a}, \quad W_{23} = k\frac{q_2q_3}{a} = k\frac{q^2}{a},$$

$$W_{13} = k\frac{q_1q_3}{a\sqrt{2}} = k\frac{q^2}{a\sqrt{2}}, \quad W_{24} = k\frac{q_2q_4}{a\sqrt{2}} = k\frac{q^2}{a\sqrt{2}},$$

$$W_{14} = k\frac{q_1q_4}{a} = k\frac{q^2}{a}, \quad W_{34} = k\frac{q_3q_4}{a} = k\frac{q^2}{a}.$$

Полная энергия системы равна сумме энергий, полученных выше: $W_п = k\frac{4q^2}{a} + k\frac{2q^2}{a\sqrt{2}} = k\frac{(4+\sqrt{2})q^2}{a} \approx 0{,}1$ Дж.

С другой стороны тот же результат можно получить сразу же, используя выражение $W_п = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i\varphi_i$.

19.39. Два электрона движутся под действием сил электростатического отталкивания. Какую скорость они будут иметь на бесконечно большом расстоянии, если в начальный момент электроны находились на расстоянии $r = 1{,}0$ см друг от друга и имели скорость, равную нулю?

Ответ: $v = 0{,}16$ км/с.

Решение. По закону сохранения энергии $W_1 = W_2$; $W_1 = W_п = \frac{ke^2}{r}$;

$W_2 = W_к = 2\frac{mv^2}{2}$, тогда $\frac{ke^2}{r} = 2\frac{mv^2}{2}$; $v = e\sqrt{\frac{k}{mr}} = 160$ м/с, здесь e и m — заряд и масса электрона.

19.40. Два электрона, находившиеся на бесконечно большом расстоянии один от другого, начинают двигаться навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $v = 1{,}0$ км/с. Определите, на какое наименьшее расстояние сблизятся электроны.

Ответ: $r = 0{,}25$ мм.

Решение самостоятельное. См. задачу 19.39.

19.41. Четыре электрона помещены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Предоставленные сами себе электроны начнут двигаться под действием сил электростатического отталкивания. Определите предельное значение скорости каждого электрона.

Ответ: $v = 83$ м/с.

Решение. По закону сохранения энергии потенциальная энергия системы зарядов в начальном состоянии равна их кинетической энергии при бесконечно большом расстоянии между ними: $W_п = W_к$. Потенциальная энергия системы 4 зарядов равна (см. задачу 19.38) $W_п = \frac{ke^2}{a}(4+\sqrt{2})$, тогда $\frac{ke^2}{a}(4+\sqrt{2}) = 4\frac{mv^2}{2}$, следовательно, $v = e\sqrt{\frac{k(4+\sqrt{2})}{2ma}} = 83$ м/с.

19.42. Электрическое поле образовано двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии $d = 2$ см друг от друга; разность потенциалов между ними $U = 120$ В. Какую скорость получил электрон под действием поля, пройдя по силовой линии расстояние $l = 3$ мм? Начальная скорость электрона равна нулю.

Ответ: $\upsilon = 2{,}52 \cdot 10^6$ м/с.

Решение. Изменение кинетической энергии электрона равно работе сил электрического поля $\frac{m\upsilon^2}{2} = Fl$ (начальная скорость электрона равна нулю).

$F = |e|E = |e|\frac{U}{d}$, тогда $\upsilon = \sqrt{\frac{2|e|Ul}{md}} = 2{,}52 \cdot 10^6$ м/с.

19.43. Электрон вылетает из точки, потенциал которой $\varphi_1 = 600$ В, со скоростью $\upsilon_1 = 1{,}2 \cdot 10^7$ м/с в направлении силовых линий поля. Определите потенциал точки поля, дойдя до которой электрон затормозится.

Ответ: $\varphi_2 = 190{,}5$ В.

Решение. Электрическое поле совершает работу по перемещению электрона, которая, с одной стороны, равна произведению величины заряда на разность потенциалов между точками $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, а с другой стороны, равна изменению кинетической энергии электрона $A = \Delta W_к = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$.

Тогда $q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$, $\quad \upsilon_2 = 0$; $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{m\upsilon_1^2}{2|e|} = 190{,}5$ В;

$q = -|e|$ — заряд электрона.

19.44. Электрон вылетает из точки, потенциал которой $\varphi_1 = 450$ В, со скоростью $\upsilon_1 = 190$ м/с. Какую скорость он будет иметь в точке с потенциалом $\varphi_2 = 475$ В?

Ответ: $\upsilon = 3{,}0$ мм/с.

Решение. По теореме о кинетической энергии

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = e(\varphi_1 - \varphi_2); \quad e = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 - \frac{2|e|}{m}(\varphi_1 - \varphi_2)} = 3{,}0 \text{ мм/с}.$$

19.45. Протон, летящий по направлению к ядру двукратно ионизированного неподвижного атома гелия, в некоторой точке поля с

напряженностью $E = 10$ кВ/см имеет скорость $\upsilon_1 = 1{,}0$ км/с. На какое расстояние сможет протон приблизиться к ядру?

Ответ: $r_2 = 130$ нм.

Решение. Изменение кинетической энергии протона равно работе сил электрического поля, созданного ионизированным атомом гелия: $\frac{m_p\upsilon_2^2}{2} - \frac{m_p\upsilon_1^2}{2} = |e|(\varphi_1 - \varphi_2)$, (1)

где φ_1 — потенциал точки, в которой находится протон первоначально, φ_2 — потенциал точки, в которой протон остановился.

Заряд протона равен $+|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, заряд двукратно ионизированного атома гелия равен $2|e|$. Напряженность поля, создаваемая ионизированным ядром гелия, $E = \frac{k2|e|}{r_1^2}$, откуда $r_1 = \sqrt{\frac{2k|e|}{E}}$,

потенциал φ_1 в этой точке равен $\varphi_1 = \frac{2k|e|}{r_1} = \sqrt{2k|e|E}$. (2)

Потенциал в точке остановки протона $\varphi_2 = \frac{2k|e|}{r_2}$. (3)

Учитывая, что $\upsilon_2 = 0$ из (1) с учетом (2) и (3) получаем

$-\frac{m_p\upsilon_1^2}{2} = |e|\left(\sqrt{2k|e|E} - \frac{2k|e|}{r_2}\right)$, следовательно,

$$r_2 = \left(\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 E}{|e|}} + \frac{\pi\varepsilon_0 m_p\upsilon_1^2}{|e|^2}\right)^{-1} = 130 \text{ нм}.$$

19.46. Электрон движется по направлению силовых линий однородного поля, напряженность которого $E = 120$ В/м. Какое расстояние он пролетит до полной остановки, если его начальная скорость $\upsilon = 1{,}0$ мм/с? Сколько времени электрон будет двигаться до остановки?

Ответ: $S = 2{,}4$ см, $t = 4$ нс.

Решение. Изменение кинетической энергии электрона равно работе сил электрического поля $A = FS = eES$, тогда

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = -|e|ES; \quad \upsilon_2 = 0, \quad S = \frac{m\upsilon_1^2}{2|e|E} = 2{,}4 \text{ см}.$$

Движение замедленное, поэтому $S = \frac{|a|t^2}{2}$; $t = \sqrt{\frac{2S}{|a|}}$.

По второму закону Ньютона $|e|E = m|a|$; $|a| = \frac{|e|E}{m}$; откуда

$t = \sqrt{\frac{2Sm}{|e|E}} = 48$ нс.

19.47. С какой скоростью пролетит электрон, втягиваемый в кольцо, заряженное положительно и с линейной плотностью $\tau = 5$ нКл/м, через центр кольца? Электрон находится на бесконечности.

Ответ: $v = 10$ Мм/с.

Решение. По закону сохранения энергии $W_1 = W_2$. Энергия электрона на бесконечности (точка 1) равна нулю, энергия электрона в момент прохождения середины кольца равна сумме его кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия с положительно заряженным кольцом.

$\frac{mv^2}{2} + k\frac{qe}{R} = 0$, где m — масса электрона, $q = 2\pi R\tau$ — заряд кольца $\frac{mv^2}{2} - k\frac{2\pi R\tau|e|}{R} = 0$, откуда $v = \sqrt{\frac{4k\pi\tau|e|}{m}} = 10$ Мм/с.

19.48. При внесении заряженного металлического шарика, подвешенного на изолирующей нити, в однородное электрическое поле нить составила с вертикалью угол 45°. На сколько уменьшится угол отклонения нити при стекании с шарика 0,1 части ее заряда? Линии напряженности поля направлены горизонтально.

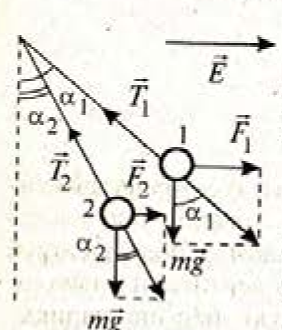


Рис. 19.23

Ответ: $\Delta\alpha = 3°$.

Решение. Сила электростатического взаимодействия точечного заряда с однородным электрическим полем $\vec{F} = q\vec{E}$.

В первом положении $F_1 = q_1E$, во втором $F_2 = q_2E = (q_1 - 0{,}1q_1)E = 0{,}9q_1E = 0{,}9F_1$.

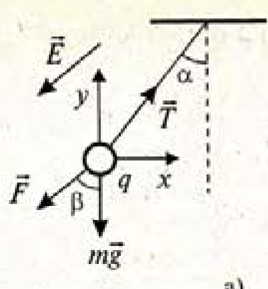
Из рис. 19.23 имеем $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{F_1}{mg}$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{F_2}{mg} = \frac{0{,}9F_1}{mg}$.

$\alpha_1 = 45°$; $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1$, т. е. $F_1 = mg$, тогда $\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}9$;

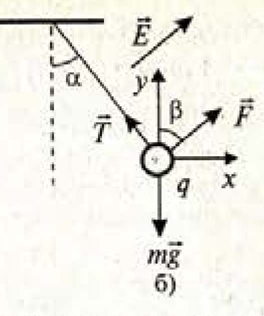
$\alpha_2 = \operatorname{arctg} 0{,}9 = 42°$; $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 45° - 42° = 3°$.

19.49. Шарик массой $m = 5$ г с зарядом $q = 20$ нКл подвешен на нити в однородном электрическом поле с напряженностью $E = 3$ МВ/м, направленной под углом $\beta = 45°$ к вертикали. Найдите силу натяжения нити T.

Ответ: а) $T = 100$ мН; б) $T = 43$ мН.



а)



б)

Рис. 19.24

Решение. Возможны два случая: а) вектор напряженности направлен вниз и б) вектор напряженности направлен вверх.

Уравнение равновесия шарика $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0$, где $\vec{F} = q\vec{E}$.

(x): $T\sin\alpha = qE\sin\beta$; (1)

(y): $T\cos\alpha = mg \pm qE\cos\beta$, (2)

знак (+) относится к случаю а) (рис. 19.24а),

знак (–) относится к случаю б) (рис. 19.24б).

Из уравнения (1) получим $\sin\alpha = \frac{qE\sin\beta}{T}$,

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{q^2E^2\sin^2\beta}{T^2}}$.

Подставив значение $\cos\alpha$ в (2) получим

$T = \sqrt{(mg)^2 \pm 2mgqE\cos\beta + (qE)^2}$.

Случай а) $T = 100$ мН; случай б) $T = 43$ мН.

19.50. В однородном электростатическом поле, вектор напряженности $\vec{E}$ которого направлен вертикально вниз, равномерно вращается шарик массой m с положительным зарядом q, подвешенный на нити длиной l. Угол отклонения нити от вертикали равен α. Найдите силу натяжения нити и кинетическую энергию шарика.

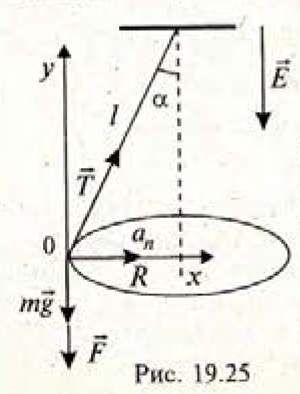


Рис. 19.25

Ответ: $T = \frac{mg + qE}{\cos\alpha}$, $W_к = \frac{(mg + qE)l\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

Решение. На шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила со стороны электростатического поля $\vec{F} = q\vec{E}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Уравнение движения шарика по окружности имеет вид:

$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = m\vec{a}_n$, где a_n — нормальное ускорение шарика, направленное к центру окружности.

По второму закону Ньютона $|e|E = m|a|$; $|a| = \frac{|e|E}{m}$; откуда

$$t = \sqrt{\frac{2Sm}{|e|E}} = 48 \text{ нс}.$$

19.47. С какой скоростью пролетит электрон, втягиваемый в кольцо, заряженное положительно и с линейной плотностью $\tau = 5$ нКл/м, через центр кольца? Электрон находится на бесконечности.

Ответ: $\upsilon = 10$ Мм/с.

Решение. По закону сохранения энергии $W_1 = W_2$. Энергия электрона на бесконечности (точка 1) равна нулю, энергия электрона в момент прохождения середины кольца равна сумме его кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия с положительно заряженным кольцом.

$\frac{m\upsilon^2}{2} + k\frac{qe}{R} = 0$, где m — масса электрона, $q = 2\pi R\tau$ — заряд кольца $\frac{m\upsilon^2}{2} - k\frac{2\pi R\tau|e|}{R} = 0$, откуда $\upsilon = \sqrt{\frac{4k\pi\tau|e|}{m}} = 10$ Мм/с.

19.48. При внесении заряженного металлического шарика, подвешенного на изолирующей нити, в однородное электрическое поле нить составила с вертикалью угол 45°. На сколько уменьшится угол отклонения нити при стекании с шарика 0,1 части ее заряда? Линии напряженности поля направлены горизонтально.

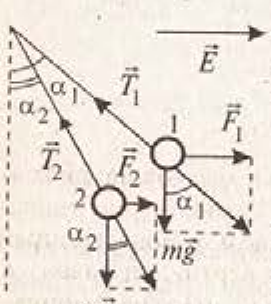


Рис. 19.23

Ответ: $\Delta\alpha = 3°$.

Решение. Сила электростатического взаимодействия точечного заряда с однородным электрическим полем $\vec{F} = q\vec{E}$.

В первом положении $F_1 = q_1E$, во втором $F_2 = q_2E = (q_1 - 0{,}1q_1)E = 0{,}9q_1E = 0{,}9F_1$.

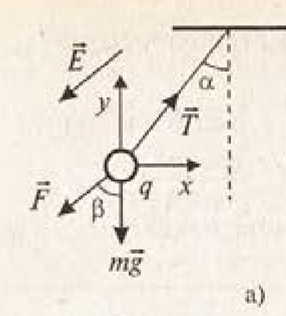
Из рис. 19.23 имеем $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{F_1}{mg}$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{F_2}{mg} = \frac{0{,}9F_1}{mg}$.

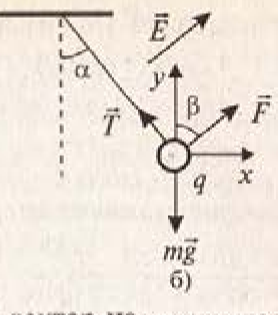
$\alpha_1 = 45°$; $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1$, т. е. $F_1 = mg$, тогда $\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}9$;

$\alpha_2 = \operatorname{arctg} 0{,}9 = 42°$; $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 45° - 42° = 3°$.

19.49. Шарик массой $m = 5$ г с зарядом $q = 20$ нКл подвешен на нити в однородном электрическом поле с напряженностью $E = 3$ МВ/м, направленной под углом $\beta = 45°$ к вертикали. Найдите силу натяжения нити T.

Ответ: а) $T = 100$ мН; б) $T = 43$ мН.





а) Рис. 19.24 б)

Решение. Возможны два случая: а) вектор напряженности направлен вниз и б) вектор напряженности направлен вверх.

Уравнение равновесия шарика $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0$, где $\vec{F} = q\vec{E}$.

(x): $T\sin\alpha = qE\sin\beta$; (1)

(y): $T\cos\alpha = mg \pm qE\cos\beta$, (2)

знак (+) относится к случаю а) (рис. 19.24а),

знак (–) относится к случаю б) (рис. 19.24б).

Из уравнения (1) получим $\sin\alpha = \frac{qE\sin\beta}{T}$,

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{q^2E^2\sin^2\beta}{T^2}}.$$

Подставив значение $\cos\alpha$ в (2) получим

$$T = \sqrt{(mg)^2 \pm 2mgqE\cos\beta + (qE)^2}.$$

Случай а) $T = 100$ мН; случай б) $T = 43$ мН.

19.50. В однородном электростатическом поле, вектор напряженности $\vec{E}$ которого направлен вертикально вниз, равномерно вращается шарик массой m с положительным зарядом q, подвешенный на нити длиной l. Угол отклонения нити от вертикали равен α. Найдите силу натяжения нити и кинетическую энергию шарика.

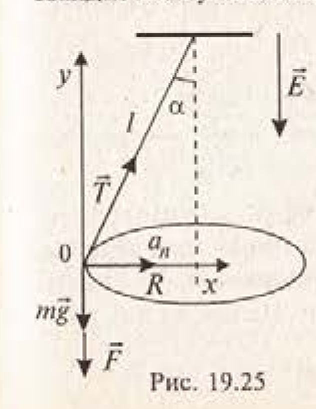


Рис. 19.25

Ответ: $T = \frac{mg + qE}{\cos\alpha}$, $W_к = \frac{(mg + qE)l\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

Решение. На шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила со стороны электростатического поля $\vec{F} = q\vec{E}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Уравнение движения шарика по окружности имеет вид:

$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = m\vec{a}_n$, где a_n — нормальное ускорение шарика, направленное к центру окружности.

Спроецировав это уравнение на оси x и y получаем:

(x): $T\sin\alpha = mv^2/R$, (1)

где v — линейная скорость шарика, R — радиус окружности.

(y): $T\cos\alpha - mg - qE = 0$. Отсюда $T = \frac{mg + qE}{\cos\alpha}$.

Из рисунка видно, что $R = l\sin\alpha$, тогда из (1):

$$\frac{(mg + qE)\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{mv^2}{l\sin\alpha}.$$

Кинетическая энергия шарика: $W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mg + qE)l\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

19.51. Между вертикальными пластинками, заряженными разноименно, подвешен на шелковой нити заряженный шарик массой $m = 0{,}05$ г. Найдите заряд шарика q и натяжение нити, если нить расположилась под углом $\alpha = 45°$ к вертикали. Заряд каждой пластины $Q = 8{,}85\cdot10^{-8}$ Кл, площадь $S = 2$ м².

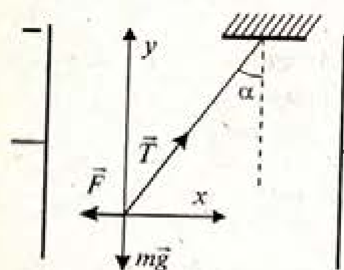


Рис. 19.26

Ответ: $q = 9{,}8\cdot10^{-8}$ Кл,
$T \approx 6{,}9\cdot10^{-4}$ Н.

Решение. Напряженность электростатического поля в пространстве между заряженными пластинами

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$, ($\varepsilon = 1$). Электростатическая сила, действующая на заряженный шарик, $F = qE = \frac{qQ}{\varepsilon_0 S}$. Отсюда $q = \frac{\varepsilon_0 S}{Q}F$. Силу F и силу натяжения нити T можно найти из условия равновесия заряженного шарика $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0$.

В проекциях на оси координат это уравнение запишется так:

(x): $T\sin\alpha - F = 0$; (y): $T\cos\alpha - mg = 0$.

Откуда $T = \frac{mg}{\cos\alpha} \approx 6{,}9\cdot10^{-4}$ Н и $F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Тогда $q = \frac{\varepsilon_0 S}{Q}\cdot mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = 9{,}8\cdot10^{-8}$ Кл.

19.52. Какой угол α с вертикалью составит нить, на которой висит шарик массой $m = 25$ мг, если поместить шарик в горизонтальное однородное электрическое поле с напряженностью $E = 35$ В/м, сообщив ему заряд $q = 7$ мкКл?

Ответ: $\alpha \approx 45°$.

Решение самостоятельное. См. задачу 19.51.

19.53. Маленький шарик, имеющий заряд $q = 10$ нКл, подвешен на нити в пространстве плоского воздушного конденсатора, круглые пластины которого расположены горизонтально. Радиус пластины конденсатора $R = 10$ см. Когда пластинам сообщили заряд $Q = 1$ мкКл, сила натяжения нити увеличилась вдвое. Найдите массу шарика.

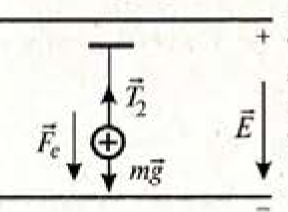


Рис. 19.27

Ответ: $m = 3{,}6$ г.

Решение. В отсутствие электрического поля уравнение равновесия шарика

$mg - T_1 = 0$; $T_1 = mg$.

После сообщения пластинам конденсатора заряда Q на шарик действует еще и электростатическая сила, направленная вниз (рис. 19.27): $F_e = qE$; $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\pi R^2}$; $F_e = \frac{qQ}{\varepsilon_0\pi R^2}$.

В этом случае уравнение равновесия шарика

$mg + F_e - T_2 = 0$; $T_2 = 2T_1 = 2mg$; $F_e = 2mg - mg = mg$;

$\frac{qQ}{\varepsilon_0\pi R^2} = mg$; $m = \frac{qQ}{\varepsilon_0\pi R^2 g} = 3{,}6$ г.

19.54. Металлический шар радиусом r помещен в жидкий диэлектрик плотностью ρ_2. Плотность материала, из которого изготовлен шар, равна ρ_1. Чему равен заряд шара, если в однородном электрическом поле, направленном вертикально вверх, шар оказался взвешенным в жидкости? Электрическое поле создается двумя параллельными пластинами, расстояние между которыми d, а разность потенциалов U.

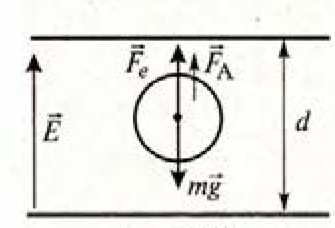


Рис. 19.28

Ответ: $q = \frac{4\pi r^3 g(\rho_1 - \rho_2)d}{3U}$.

Решение. Условие равновесия шара (рис. 19.28): $mg - F_e - F_A = 0$,

где $F_e = qE = q\frac{U}{d}$ — электрическая сила;

$F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 g\rho_2$ — сила Архимеда; $m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1$;

тогда $\frac{4}{3}\pi r^3 g\rho_1 - q\frac{U}{d} - \frac{4}{3}\pi r^3 g\rho_2 = 0$; заряд шара $q = \frac{4\pi r^3 g(\rho_1 - \rho_2)d}{3U}$.

19.55. В электрическом поле плоского конденсатора, пластины которого расположены горизонтально, помещена капелька масла,

имеющая заряд $q = 1e$. Напряженность электрического поля подобрана так, что капелька покоится. Разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 500$ В, расстояние между пластинами $d = 0{,}5$ см. Плотность масла $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите радиус капельки масла.

Ответ: $r = 7{,}6 \cdot 10^{-5}$ см.

Решение самостоятельное. См. задачу 19.54.

19.56. Заряженная пылинка массой $m = 10^{-8}$ г находится в однородном электростатическом поле между двумя горизонтальными пластинами, из которых нижняя заряжена до потенциала $\varphi_1 = 3$ кВ, а верхняя до потенциала $\varphi_2 = -3$ кВ. Расстояние между пластинами $d = 5$ см. Пылинка, находясь вначале на расстоянии $d_0 = 1$ см от нижней пластины, долетает до верхней пластины за время $t = 0{,}1$ с. Найти заряд пылинки. Каким зарядом должна обладать пылинка, чтобы оставаться в равновесии?

Ответ: $q = 1{,}5 \cdot 10^{-15}$ Кл; $q_1 = 0{,}81 \cdot 10^{-15}$ Кл.

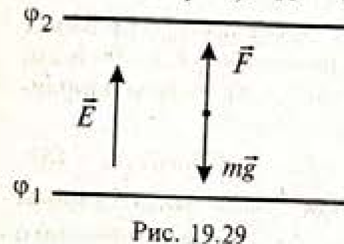


Рис. 19.29

Решение. Пылинка движется в направлении электрического поля (от большего потенциала к меньшему). Значит, она заряжена положительно. Напряженность электрического поля между пластинами $E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d$, следовательно, сила, действующая на пылинку, $F = qE = q(\varphi_1 - \varphi_2)/d$. Уравнение движения пылинки имеет вид: $\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$.

Спроецировав уравнение на направление электрического поля, получаем: $F - mg = ma$, $q(\varphi_1 - \varphi_2)/d - mg = ma$; $a = \dfrac{q(\varphi_1 - \varphi_2)}{md} - g$.

Так как движение равноускоренное, то $(d - d_0) = \dfrac{at^2}{2}$;

$a = \dfrac{2(d - d_0)}{t^2}$, тогда $\dfrac{q(\varphi_1 - \varphi_2)}{md} - g = \dfrac{2(d - d_0)}{t^2}$.

Отсюда заряд пылинки $q = \dfrac{md}{\varphi_1 - \varphi_2}\left[\dfrac{2(d - d_0)}{t^2} + g\right] = 1{,}5 \cdot 10^{-15}$ Кл.

Пылинка будет оставаться в равновесии, если $q_1 E = mg$; $q_1(\varphi_1 - \varphi_2)/d = mg$, или $q_1 = mgd/(\varphi_1 - \varphi_2) = 0{,}81 \cdot 10^{-15}$ Кл.

19.57. На дне сосуда с жидким диэлектриком с проницаемостью ε закреплена пластина конденсатора, имеющая форму круга радиусом r. Вторая такая же пластина толщиной h плавает над первой

пластиной. На какую глубину Δh погрузится верхняя пластина, если пластины зарядить разноименными зарядами с поверхностной плотностью σ? Плотность материала пластины ρ, диэлектрика ρ_0.

Ответ: $\Delta h = \dfrac{\rho}{\rho_0} h + \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0\rho_0 g}$.

Решение. Согласно второму закону Ньютона для верхней пластины $mg + F - F_A = 0$, где $F = \dfrac{1}{2}qE = \dfrac{1}{2}\sigma S \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ — сила взаимодействия пластин конденсатора. $F_A = \rho_0 g S \Delta h$ — сила Архимеда, действующая на верхнюю пластину; $mg = \rho g S h$.

Тогда $\rho g S h + \dfrac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \rho_0 g S \Delta h$; откуда глубина погружения верхней пластины в жидкость $\Delta h = \dfrac{\rho}{\rho_0} h + \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0\rho_0 g}$.

19.58. Электрон, летевший горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 1{,}6$ Мм/с, влетел в однородное электрическое поле с напряженностью $E = 90$ В/см, направленное вертикально вверх. Какова будет по модулю и направлению скорость электрона через время $t = 1{,}0$ нс?

Ответ: $\upsilon = 2{,}25$ Мм/с, $\alpha = 45°$.

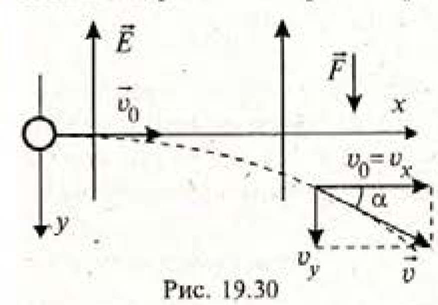


Рис. 19.30

Решение. Движение электрона в вертикальном электрическом поле аналогично движению тела, брошеного горизонтально, в поле силы тяжести. На электрон действует сила, направленная вертикально вниз, действие которой приводит к появлению у электрона ускорения (рис. 19.30): $ma_y = |e|E$; $a_y = \dfrac{|e|E}{m}$, тогда $\upsilon_y = a_y t = \dfrac{|e|Et}{m}$.

Движение вдоль горизонтального направления (ось x) происходит с постоянной скоростью $\upsilon_0 = \upsilon_x$. Полная скорость в момент времени t равна $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + \left(\dfrac{|e|Et}{m}\right)^2} = 2{,}25$ Мм/с;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \dfrac{|e|Et}{m\upsilon_0} = 1$; $\alpha = 45°$.

19.59. В плоский воздушный конденсатор параллельно пластинам влетает электрон со скоростью 10^6 м/с. На какое расстояние смес-

тится электрон перпендикулярно пластинам на выходе из конденсатора, если напряженность поля между пластинами 1,2 В/м, а длина конденсатора $l = 20$ см?

Ответ: $\Delta h = 4,22$ мм.

Решение. Сила, действующая на электрон в данном поле, равна $F = eE = 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 1,2 = 1,92\cdot 10^{-19}$ Н. Для сравнения сила тяжести $mg = 9,1\cdot 10^{-31}\cdot 9,81 = 8,9\cdot 10^{-30}$ Н $<< F$. Поэтому даже в сравнительно слабых электрических полях можно не учитывать силу тяжести. В любой точке траектории скорость электрона $\vec{v}$ можно разложить на v_x и v_y. Движение перпендикулярно пластинам проходит под действием постоянной силы, т. е. равноускоренно со скоростью $v_y = a_y t$. $eE = ma_y$; $a_y = eE/m$. Движение параллельно пластинам происходит с постоянной скоростью $v_x = v_0$, $v_0 = \frac{l}{t}$, $t = \frac{l}{v_0}$.

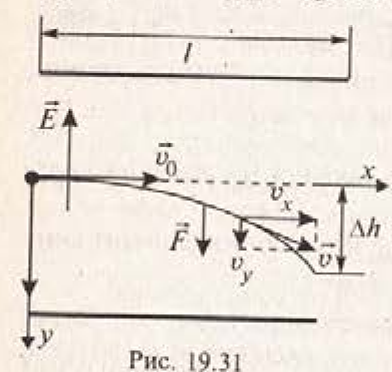


Рис. 19.31

$$\Delta h = \frac{at^2}{2} = \frac{eEl^2}{2mv_0^2} = 4,22 \text{ мм.}$$

19.60. В пространство между горизонтально расположенными квадратными металлическими пластинами посередине между ними влетает параллельно одной из сторон пластины электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U_0 = 625$ В. Расстояние между пластинами $d = 0,4$ м; сторона пластины $b = 0,5$ м; нижняя пластина заземлена, верхняя — имеет заряд $q = 2$ нКл. Найдите скорость, с которой электрон вылетит за пределы пластины. На какой высоте над нижней пластиной электрон окажется в этот момент?

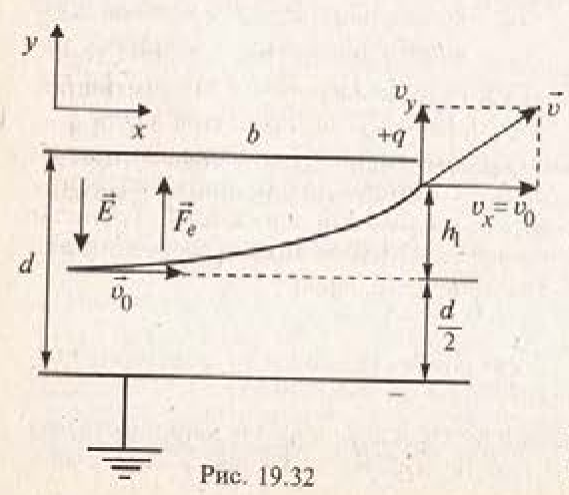


Рис. 19.32

Ответ: $v = 15,8\cdot 10^6$ м/с, $h = 29,0$ см.

Решение. Скорость, с которой электрон влетает в конденсатор, найдем из теоремы о кинетической энергии $\frac{mv_0^2}{2} = |e|U_0$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{2|e|U_0}{m}}$. (1)

Так как нижняя пластина конденсатора заземлена, то на ней будет индуцироваться такой же заряд, как и на верхней, только отрицательного знака $-q$. Напряженность поля в конденсаторе равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{S\varepsilon_0} = \frac{q}{b^2\varepsilon_0}. \quad (2)$$

В направлении оси y на электрон действует сила $F_e = |e|E$ (рис. 19.32), под действием которой электрон движется ускоренно:

$$ma = |e|E;\ a = \frac{|e|E}{m},\ v_y = at = \frac{|e|Et}{m}. \quad (3)$$

Вдоль оси x движение равномерное со скоростью $v_x = v_0$, тогда $b = v_0 t$, откуда $t = \frac{b}{v_0}$ — время, за которое электрон пролетит конденсатор. Скорость электрона при вылете из конденсатора

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{|e|Eb}{mv_0}\right)^2}$. С учетом (1), (2) и (3) получим

$v = \sqrt{\frac{|e|}{m}\left(2U_0 + \frac{q^2}{2\varepsilon_0^2 b^2 U_0}\right)} = 15,8\cdot 10^6$ м/с. Расстояние, на которое сместится электрон при вылете из конденсатора, $h_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{|e|Eb^2}{2mv_0^2}$.

Высота над нижней пластиной:

$$h = h_1 + \frac{d}{2} = \frac{|e|qb^2m}{4b^2\varepsilon_0 m|e|U_0} + \frac{d}{2} = \frac{q}{4\varepsilon_0 U_0} + \frac{d}{2} = 29 \text{ см.}$$

19.61. С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, соскальзывает маленький кубик массой $m = 20$ г, имеющий заряд $q_1 = 10$ нКл. В вершине прямого угла находится заряд $q_2 = -5$ нКл. Высота наклонной плоскости $h = 0,2$ м. Определите скорость, с которой кубик достигнет основания наклонной плоскости. Трением пренебречь. Кубик можно рассматривать как точечный заряд.

Рис. 19.33

Ответ: $v = 1,9$ м/с.

Решение. Используем закон сохранения энергии (рис. 19.33)

$$W_A = W_B;\ W_A = mgh + \frac{kq_1q_2}{h};$$

$$W_B = \frac{mv^2}{2} + \frac{kq_1q_2}{S};\ S = h\operatorname{ctg}\alpha;\ mgh + \frac{kq_1q_2}{h} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kq_1q_2}{h\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$v = \sqrt{2gh - \frac{2k|q_1||q_2|}{mh}(1 - \operatorname{tg}\alpha)} = 1{,}9 \text{ м/с}.$$

20. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

20.1. В каком случае листочек незаряженной металлической фольги с большого расстояния притянется к заряженной палочке: если он лежит на заземленном стальном листе или если он находится на сухом стекле?

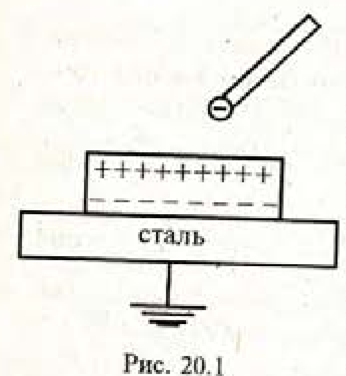


Рис. 20.1

Решение. Если листок фольги лежит на заземленном стальном листе, то, согласно явлению электростатической индукции, отрицательные заряды будут отталкиваться от отрицательно заряженной палочки и их излишек через заземление «стечет» на землю.

Листочек фольги станет положительно заряженным и притянется к палочке (рис. 20.1). Через сухое стекло (диэлектрик) заряды не смогут «стечь», поэтому листок фольги притягиваться не будет.

20.2. Сравните силу взаимодействия двух одинаковых шариков в случае одноименных и разноименных одинаковых по модулю зарядов. Расстояние между шариками сравнимо с их радиусом.

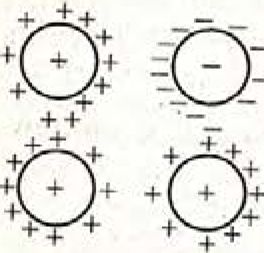


Рис. 20.2

Решение. Явление электростатической индукции приводит к перераспределению зарядов на шариках так, что одноименные заряды находятся на большем расстоянии, чем разноименные (рис. 20.2). Поэтому разноименно заряженные металлические шары притягиваются с большей силой, чем отталкиваются одноименные (все заряды одинаковые по модулю).

20.3. Каким образом заряженный проводник может полностью отдать свой заряд другому незаряженному проводнику?

Решение. Заряженный проводник нужно внести внутрь другого незаряженного проводника и прикоснуться к его внутренней стенке. Так как заряд на проводнике располагается только на внешней поверхности, то он полностью перейдет на внутреннюю поверхность незаряженного тела, а потом на его внешнюю поверхность.

20.4. Чему равен заряд заземленной металлической сферы радиусом R, если на расстоянии a $(a > R)$ от ее центра находится точечный заряд $q > 0$?

Ответ: $q_{\text{инд}} = -qR/a$.

Решение. Для заземленной сферы потенциал любой ее точки на поверхности и внутри должен быть равен нулю. Так как рядом со сферой находится положительный заряд, то, вследствие явления электростатической индукции, сфера зарядится отрицательно $q_{\text{инд}} < 0$ (заряды притекут с земли).

Величина индуцированного заряда и характер его распределения по поверхности такие, что в любой точке сферы сумма потенциалов, создаваемых зарядами q и $q_{\text{инд}}$, должна быть равна нулю:

$\varphi_1 + \varphi_2 = 0;\ \varphi_1 = \frac{kq}{a},\ \varphi_2 = \frac{kq_{\text{инд}}}{R};\ \frac{kq}{a} + \frac{kq_{\text{инд}}}{R} = 0$, отсюда следует $q_{\text{инд}} = -q\frac{R}{a}$.

20.5. Чему равен потенциал изолированного незаряженного металлического шара радиусом R, если на расстоянии $a > R$ от его центра находится точечный заряд $q > 0$?

Ответ: $\varphi = kq/a$.

Решение. Потенциал шара равен сумме потенциалов $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 — потенциал, созданный точечным зарядом q, φ_2 — потенциал, созданный индуцированным на шаре зарядом $q_{\text{инд}}$. Учитывая, что потенциалы всех точек шара одинаковы, найдем потенциал в центре шара: $\varphi_1 = \frac{kq}{a}$, $\varphi_2 = \frac{kq_{\text{инд}}}{R}$.

Но суммарный индуцированный заряд шара $q_{\text{инд}} = 0$, поэтому потенциал шара $\varphi = \frac{kq}{a}$.

20.6. Заряженная металлическая пластинка находится в электрическом поле. Результирующее поле показано на рисунке 20.3. Заряд пластинки q. Слева от пластинки напряженность поля E_1, а справа — E_2. Какая сила действует на пластинку?

Ответ: $F = \frac{q(E_2 - E_1)}{2}$.

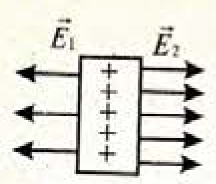


Рис. 20.3

Решение. Такая картина силовых линий может наблюдаться, если заряженную пластину поместить во внешнее однородное поле $\vec{E}$, направленное вправо.

Считаем это направление положительным. Тогда, проецируя на него векторы напряженностей, получаем: слева $E' - E = E_1$; справа $E' + E = E_2$. E' — напряженность собственного поля пластины. Тогда со стороны внешнего поля $E = \dfrac{E_2 - E_1}{2}$ на пластину действует сила $F = qE = \dfrac{q(E_2 - E_1)}{2}$.

20.7. Почему птицы слетают с провода высокого напряжения при включении напряжения?

Решение. Ответ можно найти, если вспомнить, как действует электрофорная машина. При присоединении к ней бумажных султанчиков, полоски бумаги расходятся. Это связано с появлением статического электрического заряда на бумажных полосках. Аналогично, при включении высокого напряжения, на перьях птицы появляется статический электрический заряд, из-за которого перья птицы расходятся. Это влияние статического заряда и заставляет птицу улететь.

20.8. Заряженный металлический лист скрутили в цилиндр. Как изменится поверхностная плотность заряда?

Решение. В металлическом проводнике заряд сосредоточен только на поверхности проводника. В металлическом листе заряд распределен равномерно по обеим поверхностям листа. Если лист скрутить в цилиндр, то на внутренней поверхности цилиндра заряда не будет, он весь перейдет на внешнюю поверхность, что приведет к увеличению поверхностной плотности заряда вдвое на внешней стороне цилиндра.

20.9. Как изменится сила взаимодействия заряженного шарика с металлическим нейтральным шариком, если расстояние между ними уменьшить вдвое? Расстояние больше размеров шариков.

Ответ: Увеличится в 32 раза.

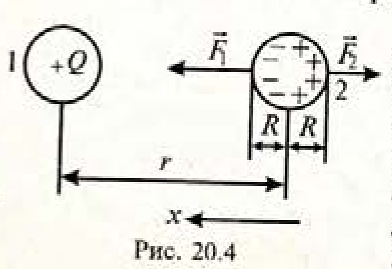


Рис. 20.4

Решение. Вследствие явления электростатической индукции на металлическом шарике 2 слева появится индукционный отрицательный заряд, а справа такой же положительный (рис. 20.4). Силы, действующие на края шарика 2, F_1 и F_2 и, соответственно, напряженности E_1 и E_2 неодинаковы, $F_1 > F_2$ и $E_1 > E_2$ из-за различных расстояний до заряженного шарика 1: $r_1 = r - R$; $r_2 = r + R$. Если величина индуцированных зарядов $\pm q$, то $F = F_1 - F_2 = q(E_1 - E_2)$;

$$E_1 \sim \frac{Q}{(r-R)^2};\quad E_2 \sim \frac{Q}{(r+R)^2};$$

$$F \sim qQ\left[\frac{1}{(r-R)^2} - \frac{1}{(r+R)^2}\right] = qQ\frac{\left(r^2 + 2rR + R^2 - r^2 + 2rR - R^2\right)}{(r^2 - R^2)^2} =$$

$$= qQ\frac{4rR}{(r^2 - R^2)^2}.$$

Если учесть, что шарик небольшой, и пренебречь R^2, то получим $F \sim qQ\dfrac{4R}{r^3}$. Следует обратить внимание, что индуцированный заряд возник из-за поля E, созданного шариком 1, тогда можно считать, что $q \sim E \sim \dfrac{1}{r^2}$, следовательно, сила взаимодействия шариков пропорциональна $\dfrac{1}{r^5}$, т. е. $F \sim \dfrac{1}{r^5}$. При уменьшении расстояния между шариками вдвое сила увеличится в 32 раза: $r' = \dfrac{r}{2}$; $\dfrac{F_1}{F_2} = 2^5 = 32$.

20.10. Точечный заряд $q = 0{,}15$ мкКл находится в центре сферической проводящей оболочки, внешний радиус которой равен $R_1 = 25$ см и внутренний $R_2 = 20$ см. Определите напряженность поля в точках 1 и 2, удаленных от заряда соответственно на $r_1 = 50$ см и $r_2 = 10$ см, а также разность потенциалов между этими точками.

Ответ: $E_1 = 5$ кВ/м, $E_2 = 140$ кВ/м; $\varphi_2 - \varphi_1 = 9$ кВ.

Решение. В отсутствие проводящей оболочки напряженность поля точечного заряда и разность потенциалов для точек 2 и 1 равны

$$E_{01} = \frac{kq}{r_1^2} = 5 \text{ кВ/м} \text{ и } E_{02} = \frac{kq}{r_2^2} = 140 \text{ кВ/м}.$$

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 11 \text{ кВ}. \quad (1)$$

При наличии сферической проводящей оболочки на ее внутренней и внешней поверхностях появятся индуцированные заряды (рис. 20.5), одинаковые по величине и противоположные по знаку. Распределение зарядов по поверхности равномерное. Напряженность поля индуцированных зарядов такова, как если бы оба заряда ($+q_{инд}$ и $-q_{инд}$) оказались в центре сферы.

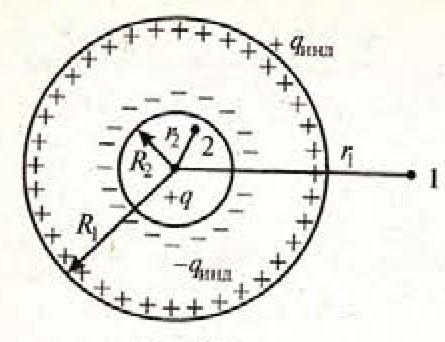


Рис. 20.5

Результирующее поле внутри металлической оболочки равно нулю, наличие металлической оболочки не изменит напряженности поля заряда в точках 1 и 2.

Потенциалы в точках 1 и 2 определим, исходя из принципа суперпозиции, $\varphi_1 = \varphi_q + \varphi_{+инд} + \varphi_{-инд}$.

Для точки 1:

$$\varphi_1 = \frac{kq}{r_1} + \frac{kq_{инд}}{r_1} - \frac{kq_{инд}}{r_1} = \frac{kq}{r_1},$$

здесь учтено, что $|q_{инд}| = q$.

Для точки 2 внутри сферы $\varphi_2 = \frac{kq}{r_2} + \frac{q_{инд}}{R_1} - \frac{q_{инд}}{R_2} = kq\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ (учтено, что потенциал внутри сферы равен потенциалу поверхности сферы). Тогда $\varphi_2 - \varphi_1 = kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 9$ кВ. (2)

Сравнивая (1) и (2) можно сделать вывод, что в результате явления электростатической индукции разность потенциалов уменьшилась.

20.11. Положительный заряд находится внутри полого сферического проводника. Изобразите с помощью силовых линий электрические поля внутри и вне проводника. Как изменится поле внутри и вне сферы, если заряд будет находится не в центре сферы?

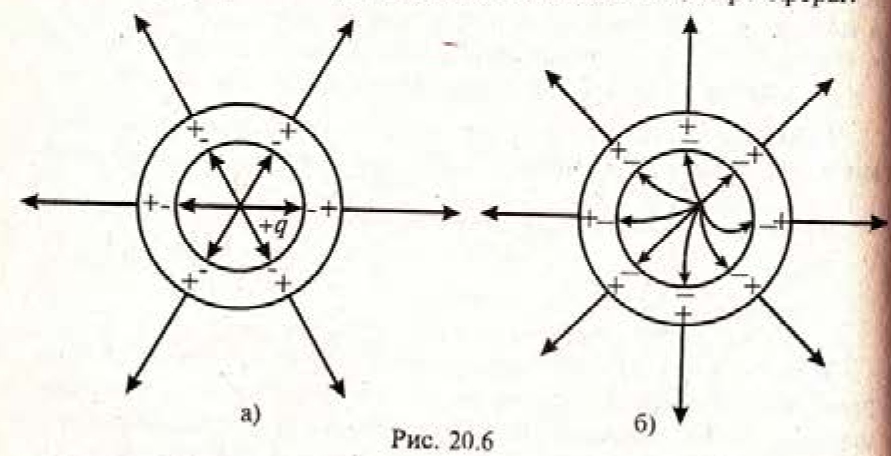


Рис. 20.6

Решение. Вследствие явления электростатической индукции на внутренней поверхности сферы возникнет индуцированный отрицательный заряд, а на внешней — положительный (рис. 20.6а). Так как поле внутри проводника равно нулю, то индуцированные заряды по величине равны заряду в центре сферы.

Вне сферы поле равно полю точечного заряда, помещенного в центр сферы, т.е. сама сфера влияния на поле заряда не оказывает. При смещении заряда из центра сферы распределение зарядов по внутренней поверхности сферы будет неравномерным (рис. 20.6б), но величина индуцированного заряда также равна q. Силовые линии поля будут обязательно перпендикулярны к поверхности. На внешней поверхности заряды свободны и поэтому распределятся равномерно. Количество силовых линий внутри и вне сферы одинаково.

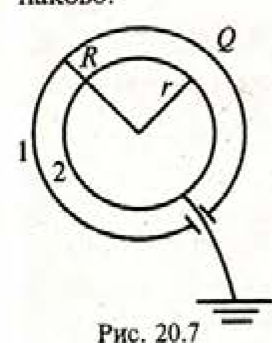


Рис. 20.7

20.12. Внутрь тонкостенной металлической сферы радиусом $R = 20$ см концентрически помещен шар радиусом $r = 10$ см. Шар через отверстие в сфере соединен с землей с помощью очень тонкого длинного проводника (рис. 20.7). На внешнюю сферу помещают заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Определите потенциал φ этой сферы.

Ответ: $\varphi = 225$ В.

Решение. Потенциал внутри заряженной сферы — величина постоянная: $\varphi_1 = \frac{kQ}{R}$, но внутренний шар заземлен, поэтому он от земли должен получить такой заряд q, чтобы его потенциал был равен нулю: $\varphi_2 = 0$; $\frac{kQ}{R} + \frac{kq}{r} = 0$; $q = -\frac{r}{R}Q$. Тогда потенциал внешней сферы равен:

$$\varphi = \frac{kQ}{R} + \frac{kq}{r} = \frac{kQ}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 225 \text{ В}.$$

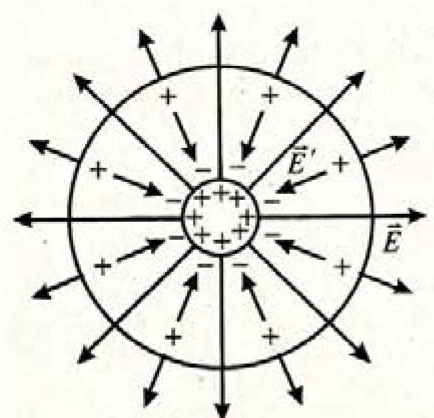


Рис. 20.8

20.13. Металлический заряженный шар окружен толстым сферическим слоем диэлектрика. Нарисуйте картину силовых линий электрического поля внутри и вне диэлектрика.

Решение. В электрическом поле заряженной сферы происходит поляризация диэлектрической оболочки: на внутренней поверхности, прилегающей к положительно заряженной сфере, появ-

ляются связанные (поляризационные) отрицательные заряды (рис. 20.8), а на внешней поверхности положительные заряды. Электрическое поле связанных зарядов E' направлено против поля свободных зарядов на сфере $\vec{E}$, что и приводит к уменьшению электрического поля в диэлектрике в ε раз.

Картина силовых линий электрического поля приведена на рис. 20.8. Здесь $\varepsilon = 2$.

20.14. Металлический шар радиусом $R = 5{,}0$ см, несущий заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\sigma = 2{,}0 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2, погружают в керосин. Определите величину и знак поляризационного заряда, наведенного на границе металл—диэлектрик.

Ответ: $q_{св} = -31$ пКл.

Решение. Напряженность электрического поля в диэлектрике $\vec{E}$ равна векторной сумме напряженности поля в вакууме $\vec{E}_0$ и напряженности поля, созданного связанным зарядом, $\vec{E}_{св}$.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{св}; \quad \frac{kq}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{kq}{\varepsilon_0} + \frac{kq_{св}}{\varepsilon\varepsilon_0};$$

$$q_{св} = -\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} q = -\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} 4\pi R^2 \sigma = -31 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} = -31 \text{ пКл}.$$

20.15. Две вертикально расположенные пластины заряжены так, что разность потенциалов между ними равна $\Delta\varphi = 400$ В. Пластины погружают в масло. Какова поверхностная плотность связанных зарядов, если толщина масляного слоя $d = 2{,}0$ мм?

Ответ: $\sigma_{св} = 0{,}88$ мкКл/м^2.

Рис. 20.9

Решение. Напряженность поля между пластинами в воздухе $E_0 = \dfrac{\Delta\varphi}{d} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$; $\sigma = \varepsilon_0 \dfrac{\Delta\varphi}{d}$.

В масле $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{св}$, где $\vec{E}_{св}$ — напряженность поля, созданного связанными зарядами в диэлектрике, направлена против поля $\vec{E}_0$ (рис. 20.9). $E = E_0 - E_{св}$; $\dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma_{св}}{\varepsilon\varepsilon_0}$;

$$\sigma_{св} = \sigma\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} = \frac{\Delta\varphi}{\varepsilon d}\varepsilon_0(\varepsilon - 1) = 0{,}88 \text{ мкКл/м}^2.$$

20.16. Радиус металлического шара $R = 5{,}0$ см, а толщина сферического слоя эбонита, окружающего шар, $d = 5{,}0$ см. Заряд шара $q = 6{,}0 \cdot 10^{-9}$ Кл. Вычислите напряженность поля в точках, лежащих на расстоянии $r_1 = 6{,}0$ см и $r_2 = 12$ см от центра шара, и постройте график зависимости напряженности от расстояния.

Ответ: $E_1 = 5$ кВ/м, $E_2 = 3{,}75$ кВ/м.

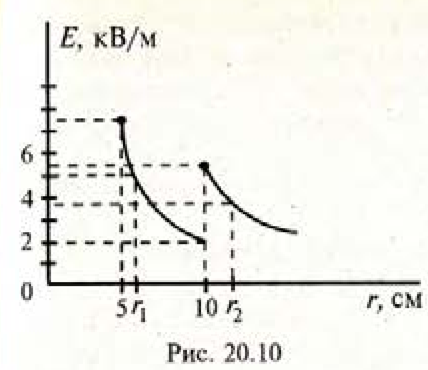


Рис. 20.10

Решение. Первая точка находится в диэлектрике ($\varepsilon = 3$), тогда $E_1 = \dfrac{kq}{\varepsilon r_1^2} = 5$ кВ/м. Вторая точка находится вне диэлектрика ($\varepsilon = 1$), для нее $E_2 = \dfrac{kq}{r_2^2} = 3{,}75$ кВ/м.

Для построения зависимости $E(r)$ (рис. 20.10) учтем, что внутри металлического шара напряженность поля равна нулю. На границе с диэлектриком (вблизи заряженной поверхности $\varepsilon = 3$)

$$E(R) = \frac{kq}{\varepsilon R^2} = 7{,}2 \text{ кВ/м}.$$

На внутренней поверхности диэлектрика (на границе диэлектрик—воздух $\varepsilon = 3$) $E(R + d) = \dfrac{kq}{\varepsilon(R + d)^2} = 1{,}8$ кВ/м.

Вблизи внешней поверхности диэлектрика (со стороны воздуха $\varepsilon = 1$) $E'(R + d) = \dfrac{kq}{(R + d)^2} = 5{,}4$ кВ/м.

Скачок напряженности на границе с диэлектриком связан с наличием на поверхности диэлектрика связанных зарядов.

20.17. Маленький шарик, имеющий заряд $q = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ Кл, находится на расстоянии $r = 3{,}0$ см от плоской металлической заземленной стенки. С какой силой они взаимодействуют?

Ответ: $F = 0{,}25$ мН.

Решение. Заряды на проводнике должны находиться в равновесии, поэтому поле внутри металла равно нулю. Это поле равно сумме поля заряда q и поля индуцированных на стенке поверхностных зарядов $-q$. Силовые линии поля должны быть перпендикулярны к поверхности металлической стенки (поверхность является эквипотенциальной), т. е. поле, созданное индуцированным зарядом, можно заменить полем точечного заряда $-q$, помещенного в точку внутри металла, являющуюся зеркальным изображением точки, в которой находится заряд q (рис. 20.11). Фиктивный заряд $-q$ называется изображением заряда q, а метод ре-

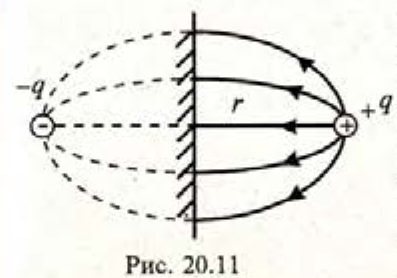


Рис. 20.11

шения с использованием таких фиктивных зарядов — методом зеркального изображения. Тогда силу взаимодействия заряда с металлической плоскостью можно рассматривать как силу взаимодействия двух точечных зарядов разного знака, расположенных симметрично относительно металлической плоскости: $F = \dfrac{kq^2}{(2r)^2} = 0,25$ мН.

20.18. Три разноименных точечных заряда расположены так, как показано на рис. 20.12а), где AOB — прямой угол, образованный двумя проводящими полуплоскостями. Величина каждого заряда $|q|$. Найдите суммарный заряд, индуцируемый на проводящих полуплоскостях, и силу, действующую на заряд $-q$.

О т в е т: $q_{инд} = -q$; $F = k\left(2\sqrt{2} - 1\right)\dfrac{q^2}{2a^2}$.

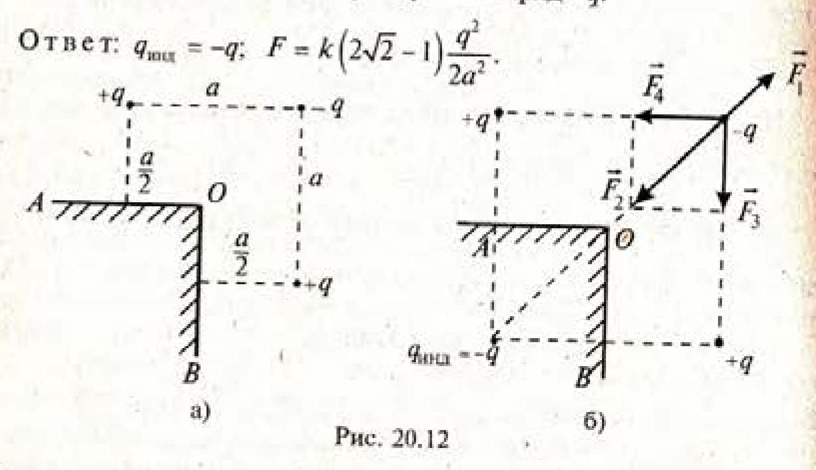


Рис. 20.12

Решение. Используем метод зеркального изображения. Действие зарядов, индуцированных на проводящих полуплоскостях, эквивалентно действию фиктивного точечного заряда $q_{инд} = -q$, помещенного в левый нижний угол пунктирного квадрата (рис. 20.12б). Получилась система четырех точечных зарядов. Сила, действующая на заряд $-q$ равна $F = F_2 - F_1$, где $F_2 = F_3\sqrt{2} = \dfrac{kq^2\sqrt{2}}{a^2}$, $F_3 = F_4$,

$F_1 = \dfrac{kq^2}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}$; $F = \dfrac{kq^2}{2a^2}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

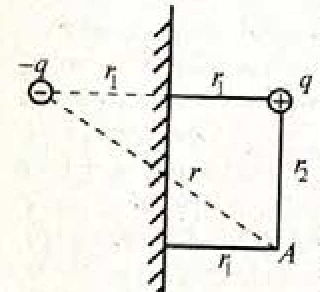


Рис. 20.13

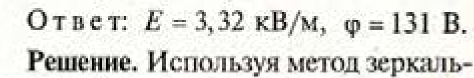
20.19. На расстоянии $r_1 = 2,0$ см от проводящей бесконечной плоскости находится заряд $q = 1,0 \cdot 10^{-9}$ Кл. Определите потенциал поля в точке, отстоящей от плоскости на расстояние r_1 и от заряда на расстояние $r_2 = 3,0$ см.

О т в е т: $\varphi = 120$ В.

Решение. Воспользуемся методом зеркального изображения (см. задачу 20.17). Тогда (рис. 20.13)

$$\varphi_A = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{kq}{r_2} - \frac{kq}{r} = kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + 4r_1^2}}\right) = 120 \text{ В}.$$

20.20. На расстоянии $a = 10$ см от бесконечной проводящей плоскости находится точечный заряд $q = 10$ нКл. Вычислить напряженность поля и потенциал в точке, удаленной от плоскости на расстояние a и от заряда q на расстояние $2a$.



О т в е т: $E = 3,32$ кВ/м, $\varphi = 131$ В.

Решение. Используя метод зеркального изображения, получаем, что действие заряда, индуцированного на бесконечной проводящей плоскости, эквивалентно действию точечного заряда $-q$, являющегося зеркальным изображением заряда q (рис. 20.14).

Рис. 20.14

Тогда напряженность поля в точке A равна $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$,

где $E_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 4a^2}$; $E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 8a^2}$.

По теореме косинусов: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha}$, угол $\alpha = 45°$.

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{\sqrt{2}}{32}} = \frac{q}{32\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}. \quad E = 3,32 \text{ кВ/м}.$$

Потенциал, согласно принципу суперпозиции, равен: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$,

где $\varphi_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 2a}$; $\varphi_2 = \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 2\sqrt{2}a}$.

Тогда $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 2a}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\varphi = 131$ В.

20.21. Металлическая пластина, расположенная в вертикальной плоскости, соединена с землей. На расстоянии $r = 10$ см от пластины помещают шарик массой $m = 0,10$ г, подвешенный на нити длиной $l = 12$ см. При сообщении шарику заряда q он притянулся к пластине так, что нить отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 30°$. Найдите заряд шарика.

О т в е т: $q = 0,2$ пКл.

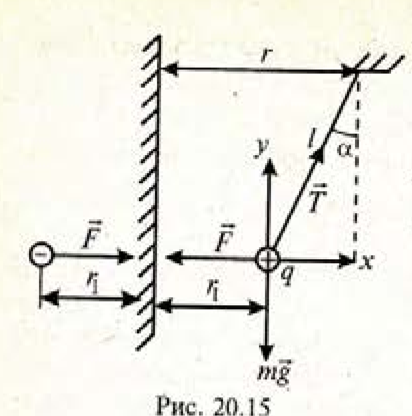


Рис. 20.15

Решение. Используем метод зеркального изображения, тогда сила, с которой шарик притягивается к пластине, равна (рис. 20.15) $F = \frac{kq^2}{(2r_1)^2}$.

Уравнение равновесия шарика:

(x): $T\sin\alpha - F = 0$; $T\sin\alpha = F$;

(y): $T\cos\alpha - mg = 0$;

$T\cos\alpha = mg$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg} = \frac{kq^2}{mg(2r_1)^2};$$

$$q = \frac{2r_1}{k}\sqrt{mg\operatorname{tg}\alpha};\quad r_1 = r - l\sin\alpha;$$

$$q = 8\pi\varepsilon_0(r - l\sin\alpha)\sqrt{mg\operatorname{tg}\alpha} = 0{,}2\ \text{пКл}.$$

20.22. Небольшой шарик висит над горизонтальной проводящей плоскостью на изолирующей упругой нити. После того как шарику сообщили заряд $q = 1{,}4\cdot10^{-6}$ Кл, он опустился на $\Delta r = 9{,}0$ мм, и его расстояние до проводящей плоскости стало $r = 10$ см. Найдите жесткость нити.

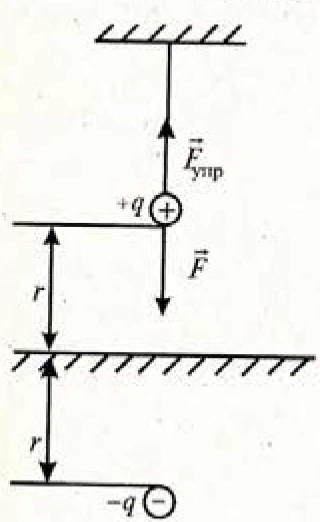


Рис. 20.16

Ответ: $k = 49$ Н/м.

Решение. Пользуемся методом зеркального изображения $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)^2}$ (рис. 20.16).

Условие равновесия шарика $F_{упр} = F$; $k\Delta r = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)^2}$; откуда коэффициент упругости (жесткость) нити равен

$$k = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)^2\Delta r} = 49\ \text{Н/м}.$$

21 ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

21.1. Два металлических шара — большой и маленький — заряжаются одинаковым количеством электричества. Будут ли одинако-

выми потенциалы шаров? Что произойдет, если шары соединить проволокой?

Решение. Электроемкость уединенного шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$, где ε — диэлектрическая проницаемость среды (в вакууме $\varepsilon = 1$). Потенциал маленького шара $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, большого $\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, где r и R — радиусы малого и большого шаров соответственно. Очевидно $\varphi_1 > \varphi_2$. Если шары соединить проволокой, то согласно закону сохранения заряда, произойдет его перераспределение так, что потенциалы шаров станут одинаковыми.

21.2. Два металлических шара — большой и маленький — заряжаются до одинакового потенциала. На каком шаре при этом будет больший заряд? В какую сторону будет перетекать заряд, если шары соединить проволокой?

Решение. Если шары имеют одинаковые потенциалы, то $q_1 = \varphi\cdot4\pi\varepsilon_0 r$, а $q_2 = \varphi\cdot4\pi\varepsilon_0 R$, так как $R > r$ (по условию), то и $q_2 > q_1$, т. е. больший заряд будет на большом шаре. В данном случае при соединении шаров проволокой заряды не будут перетекать, т. к. потенциалы на них одинаковы.

21.3. Два металлических заряженных шара соединяют проволокой. Покажите, что после соединения поверхностные плотности зарядов на шарах будут обратно пропорциональны их радиусам.

Решение. Поверхностная плотность заряда $\sigma_1 = \frac{q_1}{S_1} = \frac{q_1}{4\pi r^2}$ — для малого шара, и $\sigma_2 = \frac{q_2}{S_2} = \frac{q_2}{4\pi R^2}$ — для большого шара. При соединении шаров их потенциал одинаков и равен $\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$ и $\varphi = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

Тогда $\sigma_1 = \varphi\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0 r}{4\pi r^2} = \varphi\frac{\varepsilon_0}{r}$, а $\sigma_2 = \varphi\frac{\varepsilon_0}{R}$, т. е. $\sigma \sim \frac{1}{r}$.

21.4. Вычислите емкость Земного шара. На сколько увеличит потенциал Земли заряд $q = 1{,}0$ Кл?

Ответ: $C = 0{,}71$ мФ; $\Delta\varphi = 1{,}4$ кВ.

Решение. Считая, что Земля — шар, радиус которого $R_з = 6400$ км, находим ее емкость $C = 4\pi\varepsilon_0 R = 0{,}71$ мФ; $\Delta\varphi = \frac{q}{C} = 1{,}4\cdot10^3$ В.

21.5. Металлический шар, диаметр которого $d = 18$ см, заряжают до потенциала $\varphi = 10$ кВ. Определите величину заряда шара.

Ответ: $\varphi = 0{,}10$ мкКл.

Решение. Заряд шара $q = \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 r = \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{d}{2} = 0{,}1$ мкКл.

21.6. Металлический шар радиусом R_1, заряженный до некоторого потенциала, окружают концентрической сферической проводящей оболочкой радиусом R_2. Как изменится потенциал и чему станет равна емкость шара, если внешнюю оболочку заземлить?

Ответ: $\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} = 1 - \dfrac{R_1}{R_2}$; $C_2 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

Решение. Потенциал заряженного шара: $\varphi_1 = \dfrac{q}{C_1} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$.

После заземления оболочки на ней появится индуцированный заряд $-q$. Потенциал внутреннего шара станет равен

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{q}{C_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2},$$ отсюда $\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} = 1 - \dfrac{R_1}{R_2}$. Емкость внутреннего шара изменится и станет равна $C_2 = \dfrac{q}{\varphi_2} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

21.7. Два шара, один радиусом $r_1 = 5{,}0$ см с зарядом $q_1 = 0{,}80$ нКл, другой радиусом $r_2 = 10{,}0$ см с зарядом $q_2 = -2{,}0$ нКл, соединяют длинной тонкой проволокой. Какой заряд переместится по ней? Каков будет общий потенциал шаров после соединения?

Ответ: $\Delta q = 1{,}2$ нКл, $\varphi = -72$ В.

Решение. После соединения шаров их потенциал одинаков и равен $\varphi = \dfrac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 (r_1 + r_2)} = -72$ В. Заряд первого шара q_1' — после соединения шаров равен $q_1' = \varphi \cdot C_1 = \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 (r_1 + r_2)} \cdot 4\pi\varepsilon_0 r_1 = \dfrac{(q_1 + q_2) r_1}{(r_1 + r_2)}$. По проволоке от второго к первому шару протечет отрицательный заряд $|q| = q_1 - q_1' = q_1 - \dfrac{(q_1 + q_2) r_1}{r_1 + r_2} = \dfrac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{r_1 + r_2} = 1{,}2$ нКл.

21.8. Заряженный до потенциала $\varphi_1 = 300$ В шар радиусом $R_1 = 15$ см соединяется с незаряженным шаром длинной тонкой проволокой. После соединения потенциал шара φ_2 оказался равен 100 В. Каков радиус второго шара?

Ответ: $R_2 = 30$ см.

Решение. Согласно закону сохранения заряда $q_1 = q_1' + q_2'$, где $q_1 = \varphi_1 C_1 = \varphi_1 \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1$ — заряд первого шара до соединения его с незаряженным шаром; $q_1' = \varphi C_1 = \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1$ и $q_2' = \varphi C_2 = \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_2$ — заряды первого и второго шаров после соединения проволокой. Тогда $\varphi_1 \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1 = \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1 + \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_2$, откуда следует

$$R_2 = R_1 \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - 1 \right) = 30 \text{ см}.$$

21.9. Металлический шарик радиусом $r_1 = 1{,}0$ см, заряженный до потенциала $\varphi_1 = 270$ В, вносится внутрь полого металлического шара радиусом $r_2 = 10$ см, заряженного до потенциала $\varphi_2 = 450$ В. Определите потенциалы и заряды на шарах после их соприкосновения.

Ответ: $\varphi_1' = \varphi_2' = 0{,}48$ кВ, $q_1' = 0$, $q_2' = 5{,}3$ нКл.

Решение. $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$. Так как шар большего радиуса полый, то $q_1' = 0$, тогда $q_2' = q_1 + q_2 = \varphi_1 C_1 + \varphi_2 C_2 = 4\pi\varepsilon_0 (\varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2) = 5{,}3$ нКл. Потенциал шаров будет одинаков и равен

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \frac{q_2'}{C_2} = \frac{\varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2}{r_2} = 0{,}48 \text{ кВ}.$$

21.10. Проводник емкостью C_1 заряжен до потенциала φ_1, а проводник емкостью C_2 — до потенциала φ_2. Проводники удалены на очень большое расстояние друг от друга. Каким будет потенциал этих проводников, если соединить их проволокой?

Ответ: $\varphi = \dfrac{(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)}{(C_1 + C_2)}$.

Решение. По закону сохранения заряда $q_1 + q_2 = q$ или $\varphi_1 C_1 + \varphi_2 C_2 = \varphi(C_1 + C_2)$, отсюда $\varphi = \dfrac{\varphi_1 C_1 + \varphi_2 C_2}{C_1 + C_2}$.

21.11. Проводники, заряженные одинаковым зарядом, имеют потенциалы $\varphi_1 = 40$ В и $\varphi_2 = 60$ В. Каким будет потенциал этих проводников, если соединить их тонкой проволокой?

Ответ: $\varphi = 48$ В.

Указание. Используя закон сохранения заряда $q_1 + q_2 = 2q$, получим $\varphi = \dfrac{2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$.

21.12. Два проводящих шара с радиусами $R_1 = 10$ см и $R_2 = 5$ см, заряженных до потенциалов $\varphi_1 = 20$ В и $\varphi_2 = 10$ В, соединяются проводником. Найдите поверхностные плотности зарядов на шарах σ_1 и σ_2 после их соединения. Расстояние между шарами велико по сравнению с их радиусами. Емкостью проводника, соединяющего шары, пренебречь.

Ответ: $\sigma_1 = 4{,}425$ нКл/м^2, $\sigma_2 = 8{,}85$ нКл/м^2.

Решение. Заряды на шарах до и после соединения $q_1 = \varphi_1 \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1$, $q_2 = \varphi_2 \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_2$ и $q_1' = \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1$, $q_2' = \varphi \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_2$. Общий потенциал шаров после соединения определим из условия сохранения заряда:

$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$, откуда $\varphi = \dfrac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2}$. Тогда $q_1' = \left(\dfrac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2}\right) \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1$,

$q_2' = \left(\dfrac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2}\right) \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_2$. Поверхностные плотности

$$\sigma_1 = \frac{q_1'}{S_1} = \frac{q_1'}{4\pi R_1^2} = \frac{\varepsilon_0 (R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2)}{R_1 (R_1 + R_2)} = 4{,}425 \text{ нКл/м}^2 \text{ и}$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2'}{S_2} = \frac{q_2'}{4\pi R_2^2} = \frac{\varepsilon_0 (R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2)}{R_2 (R_1 + R_2)} = 8{,}85 \text{ нКл/м}^2.$$

21.13. Плоский конденсатор образован двумя квадратными пластинами, отстоящими друг от друга на $d = 1{,}0$ мм. Какой должна быть ширина каждой из этих пластин, чтобы емкость конденсатора была $C = 1{,}0$ мкФ? Чему будет равна сторона пластины для получения такой же емкости, если между ними поместить гетинакс $(\varepsilon_2 = 5{,}0)$?

Ответ: $a_1 = 10{,}6$ м, $a_2 = 4{,}8$ м.

Решение. Емкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$. В первом случае $\varepsilon_1 = 1$, во втором случае $\varepsilon = 5$. Так как $S = a^2$, то $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2}{d}$, откуда $a_1 = \sqrt{\dfrac{Cd}{\varepsilon_1\varepsilon_0}} = 10{,}6$ м, $a_2 = \sqrt{\dfrac{Cd}{\varepsilon_2\varepsilon_0}} = 4{,}8$ м.

21.14. Как изменится емкость C_0 плоского конденсатора, если между его обкладками поместить пластинку: 1) стеклянную; 2) металлическую? Толщина каждой пластинки равна половине расстояния между обкладками.

Ответ: 1) $C = 1{,}75C_0$; 2) $C = 2C_0$.

Решение. $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$. 1) При помещении внутрь конденсатора диэлектрической пластинки образуется два последовательно соединенных конденсатора с емкостями $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_1}$ и $C_2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}$, $\left(d_1 = \dfrac{d}{2}\right)$, их общая емкость $C = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{d(1+\varepsilon)} = \dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot C_0 = 1{,}75C_0$.

2) Если половину расстояния между обкладками конденсатора заполнить металлической пластинкой, то конденсатор будет иметь емкость $C = \dfrac{\varepsilon_0 S \cdot 2}{d} = 2C_0$.

21.15. Найдите емкости конденсаторных батарей, изображенных на рис. 21.1.

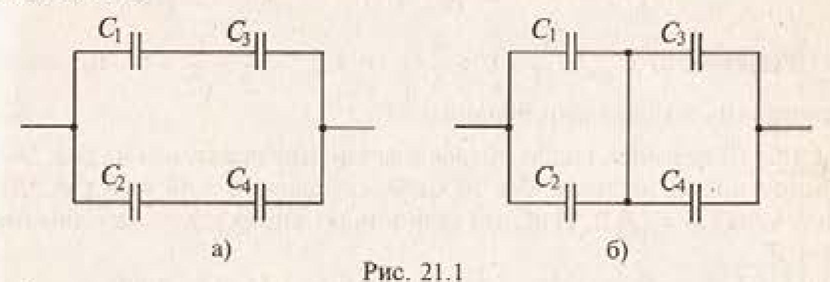


Рис. 21.1

Ответ: а) $C = \dfrac{C_1C_3}{C_1 + C_3} + \dfrac{C_2C_4}{C_2 + C_4}$; б) $C = \dfrac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$.

Решение. а) Емкости C_1 и C_3, C_2 и C_4 соединены последовательно; батареи C_1C_3 и C_2C_4 соединены параллельно $C = \dfrac{C_1C_3}{C_1 + C_3} + \dfrac{C_2C_4}{C_2 + C_4}$;

б) Емкости C_1C_2, C_3C_4 соединены параллельно; батареи C_1C_2 и C_3C_4 соединены последовательно $C = \dfrac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$.

21.16. Найдите емкость системы конденсаторов, включенных между точками A и B, как показано на рис. 21.2.

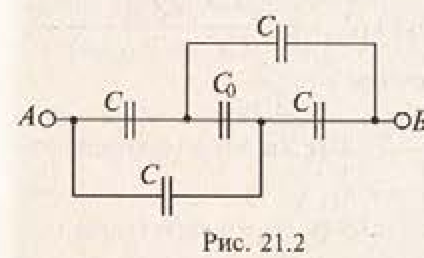


Рис. 21.2

Ответ: $C_{общ} = C$.

Решение. На рисунке представлена мостиковая схема, где конденсатор C_0 подсоединен к точкам, разность потенциалов между которыми равна нулю. Тогда $C_{общ} = \dfrac{C}{2} + \dfrac{C}{2} = C$.

21.17. Батарея из четырех одинаковых конденсаторов включена один раз по схеме а), а другой раз — по схеме б) (рис. 21.3). В каком случае емкость батареи будет больше?

Ответ: а) $C_{общ} = \dfrac{4}{3}C$; б) $C_{общ} = C$.

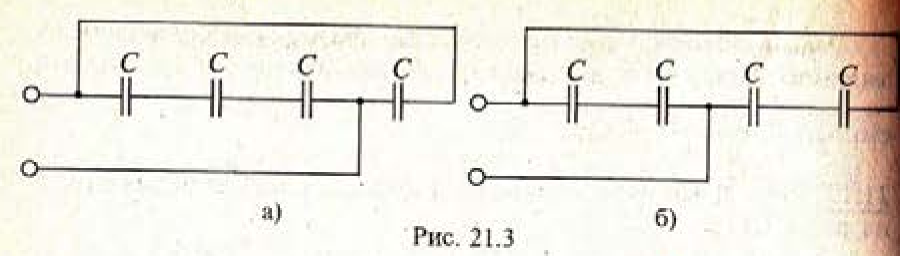


Рис. 21.3

Решение. а) $C_{общ} = \frac{C}{3} + C = \frac{4}{3}C$; б) $C_{общ} = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C$. В первом случае емкость батареи больше.

21.18. В некоторой цепи имелся участок, изображенный на рис. 21.4. Емкость конденсатора $C = 10$ мкФ, его заряд $q = 40$ мкКл и ЭДС источника $\mathscr{E} = 1{,}0$ В. Найдите разность потенциалов между точками A и B.

Ответ: $\varphi_B - \varphi_A = 5{,}0$ В.

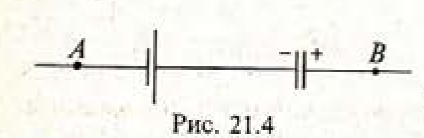


Рис. 21.4

Решение. Разность потенциалов между точками A и B

$$\varphi_B - \varphi_A = \mathscr{E} + \frac{q}{C} = 5 \text{ В}.$$

21.19. На участке цепи (рис. 21.5) $\mathscr{E}_1 = 1{,}0$ В, $\mathscr{E}_2 = 2{,}0$ В, $\varphi_A - \varphi_B = 3{,}0$ В, $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 30$ мкФ, $C_3 = 60$ мкФ. Найдите напряжение на каждом конденсаторе.

Рис. 21.5

Ответ: $U_1 = 1{,}0$ В, $U_2 = 0{,}67$ В, $U_3 = 0{,}33$ В.

Решение. Заряд на участке цепи AB

$$q = \left[(\varphi_A - \varphi_B) + (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)\right]C = \left[(\varphi_A - \varphi_B) + (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)\right]\frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}.$$

Напряжение на первом конденсаторе

$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{\left[(\varphi_A - \varphi_B) + (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)\right]C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} = 1$ В; на втором конденсаторе $U_2 = \frac{\left[(\varphi_A - \varphi_B) + (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)\right]C_1C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} = 0{,}67$ В; на третьем конденсаторе $U_3 = \frac{\left[(\varphi_A - \varphi_B) + (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)\right]C_1C_2}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} = 0{,}33$ В.

21.20. На участке цепи (рис. 21.6) $\mathscr{E}_1 = 1{,}0$ В, $\mathscr{E}_2 = 2{,}0$ В, $C_1 = 10$ мкФ, $C_2 = 20$ мкФ. Найдите заряд конденсатора C_2, зная, что заряд конденсатора C_1 равен $q_1 = 10$ мкКл.

Ответ: $q_2 = 0$.

Решение. $\varphi_A - \varphi_B = \mathscr{E}_1 + \frac{q_1}{C_1} = \mathscr{E}_2 + \frac{q_2}{C_2}$. Откуда следует

$$q_2 = C_2(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) + q_1\frac{C_2}{C_1} = 0.$$

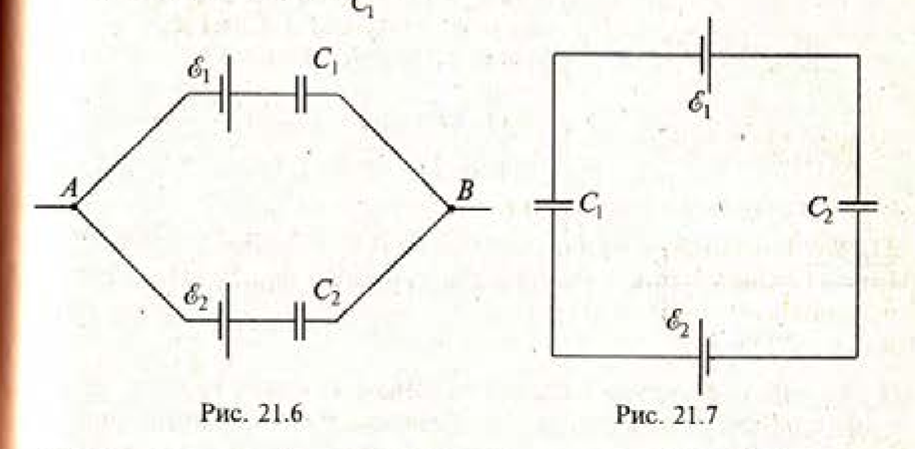


Рис. 21.6 Рис. 21.7

21.21. Найдите заряд каждого конденсатора в цепи, показанной на рис. 21.7.

Ответ: $q_1 = q_2 = \frac{C_1C_2(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2}$.

Решение. Заряды конденсаторов одинаковы и равны

$$q_1 = q_2 = (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)C_{общ} = (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

21.22. Определите разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рис. 21.8.

Ответ: $\varphi_A - \varphi_B = \mathscr{E}(C_2C_3 - C_1C_4)/\left[(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)\right]$.

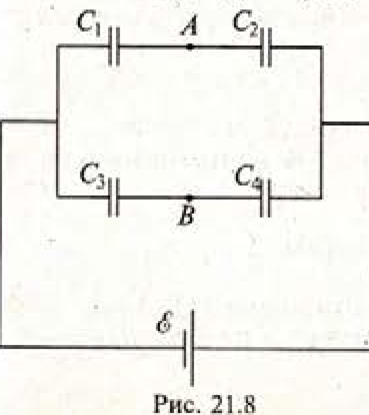


Рис. 21.8

Решение. Сумма падений напряжений на конденсаторах каждой из ветвей цепи равна приложенной ЭДС, а заряды одинаковы. $U_1 + U_2 = \mathscr{E}$; $C_1U_1 = C_2U_2$; $U_3 + U_4 = \mathscr{E}$; $C_3U_3 = C_4U_4$. Решая каждую пару этих уравнений, найдем $U_1 = \frac{\mathscr{E}C_2}{C_1 + C_2}$ и

$$U_3 = \frac{\mathscr{E}C_4}{C_3 + C_4};$$

$$\varphi_A - \varphi_B = U_1 - U_3 = \mathscr{E}\frac{(C_2C_3 - C_1C_4)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}.$$

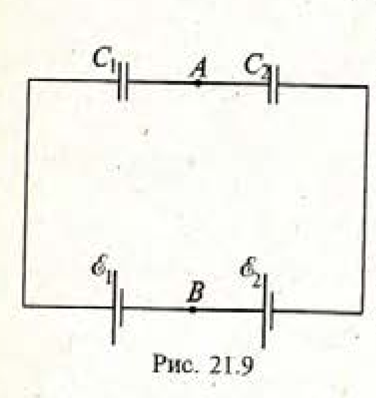


Рис. 21.9

21.23. Определите разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рис. 21.9.

Ответ: $\varphi_A - \varphi_B = \dfrac{\mathscr{E}_1C_1 - \mathscr{E}_2C_2}{C_1 + C_2}$.

Решение. $U_1 + U_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$; $C_1U_1 = C_2U_2$, откуда $U_1 = \dfrac{(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)C_2}{C_1 + C_2}$. Разность потенциалов между точками A и B

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathscr{E}_1 - U_1 = \frac{\mathscr{E}_1C_1 - \mathscr{E}_2C_2}{C_1 + C_2}.$$

21.24. Два одинаковых шарика диаметром $d = 1{,}0$ см каждый заряжены один до потенциала $\varphi_1 = -6{,}0$ кВ, другой — до потенциала $\varphi_2 = 6{,}0$ кВ. Вычислите силу притяжения между этими шариками на расстоянии $R = 1{,}0$ м.

Ответ: $|F| = 0{,}10$ мкН.

Решение. Расстояние между шариками велико по сравнению с их размерами, поэтому их можно считать точечными зарядами. Сила притяжения между шариками

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{R^2} = \frac{\varphi_1 4\pi\varepsilon_0 \frac{d}{2}\cdot\varphi_2 4\pi\varepsilon_0\frac{d}{2}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\pi\varepsilon_0 d^2\varphi_1\varphi_2}{R^2} = -0{,}1 \text{ мкН}.$$

Здесь $q_1 = \varphi_1 C = \varphi_1\cdot 4\pi\varepsilon_0\dfrac{d}{2}$, а $q_2 = \varphi_2 C = \varphi_2\cdot 4\pi\varepsilon_0\dfrac{d}{2}$.

21.25. С какой силой взаимодействуют пластинки плоского конденсатора площадью $S = 0{,}010$ м², если разность потенциалов между ними $U = 500$ В и расстояние $d = 3{,}0$ мм?

Ответ: $F = 1{,}23$ мН.

Решение. Каждая из пластин конденсатора находится в однородном электрическом поле E, создаваемом другой пластиной и равном половине поля E внутри конденсатора.

$$F = Q\frac{E}{2} = Q\frac{U}{2d} = \frac{CU^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d^2} = 1{,}23 \text{ мН}.$$

21.26. Пластины плоского конденсатора имеют заряды $+Q$ и $-Q$. Как изменится сила взаимодействия этих пластин, если расстояние между ними увеличить в три раза?

Ответ: Не изменится.

Решение. Сила взаимодействия между пластинами $F = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2}\left(\dfrac{U}{d}\right)^2$, т. е. $F \sim \left(\dfrac{U}{d}\right)^2$, так как $U = \dfrac{Q}{C}$. $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, то $U \sim d$, и при увеличении d в 3 раза, напряжение тоже увеличится в 3 раза, а сила взаимодействия не изменится.

21.27. Решить задачу 21.26, считая, что пластины конденсатора присоединены к батарее аккумуляторов.

Ответ: уменьшится в 9 раз.

Решение. В случае подсоединения конденсатора к батарее аккумуляторов (U = const) сила взаимодействия между пластинами $F \sim \dfrac{1}{d^2}$, т. е. уменьшится в d^2 раз, т. е. в 9 раз.

21.28. Пространство между пластинками плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков: фарфора толщиной $d_1 = 1{,}0$ см и парафина толщиной $d_2 = 2{,}0$ см. Разность потенциалов между обкладками $U = 2{,}1$ кВ. Определите напряженность поля и падение потенциала в каждом из слоев. $\varepsilon_1 = \varepsilon_ф = 6$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_п = 2$.

Ответ: $U_ф = U_1 = 0{,}30$ кВ, $E_ф = E_1 = 30$ кВ/м, $U_П = U_2 = 1{,}8$ кВ, $E_П = E_2 = 90$ кВ/м.

Решение. В каждом диэлектрике поле будет однородным, а напряженности полей в них $\left(E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)$ будут обратно пропорциональны их диэлектрическим проницаемостям: $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. Напряжение между обкладками конденсатора $U = E_1d_1 + E_2d_2$. Решив эти уравнения, получим $E_1 = \dfrac{U\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1} = 30$ кВ/м, $E_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_1 = 90$ кВ/м,

$U_1 = E_1d_1 = 0{,}3$ кВ; $U_2 = U - U_1 = 1{,}8$ кВ.

21.29. Плоский воздушный конденсатор зарядили до разности потенциалов $U_0 = 200$ В. Затем конденсатор отключили от источника тока. Какой станет разность потенциалов между пластинами, если расстояние между ними увеличить от $d_0 = 0{,}2$ мм до $d = 0{,}7$ мм, а пространство между пластинами заполнить слюдой (диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 7$)?

Ответ: $U = 100$ В.

Решение. Заряд конденсатора, отключенного от источника, не изменяется: $q = C_0U_0 = CU$; отсюда разность потенциалов между

обкладками конденсатора после внесения пластинки и увеличения расстояния между обкладками $U = \frac{C_0 U_0}{C}$; $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0}$, $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$.

Тогда $U = \frac{\varepsilon_0 S d U_0}{d_0 \varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{d}{d_0 \varepsilon} U_0 = 100$ В.

21.30. Плоский конденсатор, между обкладками которого находится слюдяная пластинка, присоединен к аккумулятору. Заряд конденсатора равен $q_0 = 14$ мкКл. Какой заряд пройдет через аккумулятор при удалении пластинки?

Ответ: $q = 12$ мкКл.

Решение. При удалении пластинки через аккумулятор пройдет заряд $q = \Delta C \cdot U = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 S}{d} U$. Так как напряжение на конденсаторе не изменялось, то $U = \frac{q_0}{C_0} = \frac{q_0 d}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$. Тогда

$$q = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 S}{d} \frac{q_0 d}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{(\varepsilon - 1) q_0}{\varepsilon} = 12 \text{ мкКл}.$$

21.31. Найдите заряд, который нужно сообщить двум параллельно соединенным конденсаторам с емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 1$ мкФ, чтобы зарядить их до разности потенциалов $U = 20$ кВ.

Ответ: $q = 0{,}6$ мкКл.

Решение. Общий заряд параллельно соединенных конденсаторов $q = (C_1 + C_2)U = 0{,}6$ мкКл.

21.32. Конденсатор емкостью $C_1 = 20$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $U_1 = 100$ В, соединили параллельно с заряженным до разности потенциалов $U_2 = 40$ В конденсатором, емкость которого C_2 неизвестна (соединили одноименно заряженные обкладки конденсаторов). Найти емкость C_2 второго конденсатора, если разность потенциалов между обкладками конденсатора после соединения оказалась равной $U = 80$ В.

Ответ: $C_2 = 10$ мкФ.

Решение. $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$, $C_1 U_1 + C_2 U_2 = (C_2 + C_1)U$,

$$C_2 = \frac{C_1 (U_1 - U)}{U - U_2} = 10 \text{ мкФ}.$$

21.33. Конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_1 = 20$ В, соединили параллельно с заряженным до разности потенциалов $U_2 = 4$ В конденсатором емкостью $C_2 = 33$ мкФ (соединили разноименно заряженные обкладки конденсаторов). Найдите емкость C_1 первого конденсатора, если разность потенциалов между обкладками конденсаторов после их соединения $U = 2$ В.

Ответ: $C_1 = 11$ мкФ, $C_1' = 3$ мкФ.

Решение. После соединения разноименных обкладок общий заряд $q = CU$ равен разности зарядов $q_1 = C_1 U_1$ и $q_2 = C_2 U_2$, где $C = C_1 + C_2$. Таким образом, $(C_1 + C_2)U = C_1 U_1 - C_2 U_2$ если $q_1 > q_2$; $(C_1 + C_2)U = C_2 U_2 - C_1 U_1$ если $q_1 < q_2$. Решая эти уравнения, получим в первом случае $C_1 = \frac{(U_2 + U)C_2}{U_1 - U} = 11$ мкФ, а во втором: $C_1 = \frac{(U_2 - U)C_2}{U_1 + U} = 3$ мкФ.

21.34. Плоский воздушный конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_0 = 800$ В, соединили параллельно с таким же по размерам незаряженным конденсатором, заполненным диэлектриком. Какова диэлектрическая проницаемость ε диэлектрика, если после соединения разность потенциалов между пластинами конденсаторов оказалась равной $U = 100$ В?

Ответ: $\varepsilon = 7$.

Решение. Согласно закону сохранения заряда $q_0 = q_1 + q_2$ или $U_0 C_0 = U C_0 + U \varepsilon C_0$, откуда $\varepsilon = \frac{U_0 - U}{U} = 7$.

21.35. В заряженном плоском конденсаторе, отсоединенном от источника тока, напряженность электрического поля равна E_0. Половину пространства между пластинами конденсатора заполнили диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (толщина диэлектрика равна расстоянию между пластинами). Найдите напряженность электрического поля E в пространстве между пластинами, свободном от диэлектрика.

Ответ: $E = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}$.

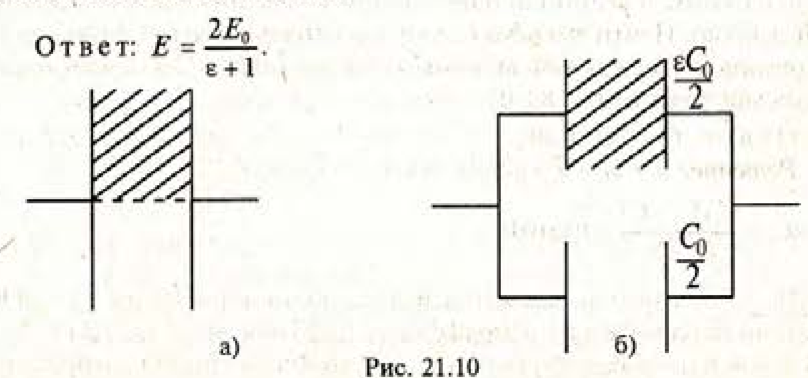


Рис. 21.10

Решение. Заряд на пластинах конденсатора без диэлектрика $q = C_0U_0 = C_0E_0d$, где d — расстояние между пластинами. Если половина конденсатора заполнена диэлектриком (рис. 21.10а), то его можно рассматривать как два конденсатора, соединенные параллельно (рис. 21.10б). Их емкость $C = \frac{C_0}{2} + \frac{\varepsilon C_0}{2} = \frac{(\varepsilon+1)C_0}{2}$. Если конденсатор отключен от источника, то его заряд сохраняется. Тогда $q = C_0E_0d = CEd$; $C_0E_0 = \frac{\varepsilon+1}{2}C_0E$, откуда напряженность поля между пластинами равна $E = \frac{2E_0}{\varepsilon+1}$.

21.36. Плоский воздушный конденсатор емкостью C заряжается от батареи, разность потенциалов на зажимах которой равна U. Определите разность потенциалов на обкладках конденсатора после увеличения расстояния между пластинами в n раз и работу внешних сил по раздвижению пластин, если: 1) после зарядки конденсатор отключается от источника; 2) конденсатор остается подключенным к источнику.

Ответ: 1) $U_1 = nU$, $A_1 = \frac{CU^2(n-1)}{2}$; 2) $A_2 = \frac{CU^2(1-n)}{2n}$.

Решение. 1) $q = \text{const}$; $C_1 = \frac{C}{n}$; $CU = C_1U_1$; $U_1 = nU$.

$$A_1 = W_2 - W_1 = \frac{C_1U_1^2}{2} - \frac{CU^2}{2} = \frac{Cn^2U^2}{2n} - \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2(n-1)}{2}.$$

2) $U = \text{const}$, $C_1 = \frac{C}{n}$.

$$A_2 = W_2' - W_1' = \frac{C_1U^2}{2} - \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2}{2n} - \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2(1-n)}{2n}.$$

21.37. Проводник емкостью $C_1 = 1{,}0$ мкФ заряжен до потенциала $\varphi_1 = 6{,}0$ кВ, а проводник емкостью $C_2 = 2{,}0$ мкФ — до потенциала $\varphi_2 = 12$ кВ. Расстояние между проводниками велико по сравнению с их размерами. Какое количество теплоты выделится при соединении этих проводников проволокой?

Ответ: $Q = 12$ Дж.

Решение. Выделившееся количество теплоты равно разности энергий конденсаторов до и после соединения $Q = W_0 - W$, где $W_0 = \frac{C_1\varphi_1^2}{2} + \frac{C_2\varphi_2^2}{2} = 162$ Дж. $W = \frac{(C_1 + C_2)\varphi^2}{2}$, где $\varphi = \frac{C_1\varphi_1 + C_1\varphi_2}{C_1 + C_2}$.

Тогда $W = \frac{(C_1\varphi_1 + C_1\varphi_2)^2\varphi^2}{2(C_1 + C_2)} = 150$ Дж. $Q = W_0 - W = 12$ Дж.

21.38. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C_1 = 20$ нФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 100$ В. Какую работу надо совершить, чтобы вдвое увеличить расстояние между обкладками?

Ответ: $A = 0{,}1$ мДж.

Решение. $A = W_2 - W_1 = \frac{C_2U_2^2}{2} - \frac{C_1U_1^2}{2}$. Так как $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, а $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$, то ясно, что $C_2 = C_1/2$. $q_1 = q_2$; $C_1U_1 = C_2U_2$, т. е. $U_2 = 2U_1$.

Тогда $A = \frac{C_1 4U_1^2}{2\cdot 2} - \frac{C_1U_1^2}{2} = \frac{C_1U_1^2}{2} = 0{,}1$ мДж.

21.39. Между обкладками плоского конденсатора находится парафиновая пластинка. Емкость конденсатора $C = 4{,}0$ мкФ, его заряд $q = 0{,}20$ мКл. Какую работу нужно совершить, чтобы вытащить пластинку из конденсатора?

Ответ: $A = -5{,}0$ мДж.

Решение. $A = W - W_0 = \frac{q^2\varepsilon}{2C_0} - \frac{q^2}{2C_0} = 5$ мДж.

21.40. Два одинаковых шара удалены на очень большое расстояние друг от друга. Поле первого шара обладает энергией $W_1 = 1{,}6$ мДж, а поле второго — энергией $W_2 = 3{,}6$ мДж. Какое количество теплоты выделится при соединении этих шаров проволокой?

Ответ: $Q = 0{,}20$ мДж.

Решение. После соединения одинаковых шаров их энергии, потенциалы и заряды будут одинаковы.

$Q = W_1 + W_2 - 2W$, W — энергия каждого шара после их соединения. Где $W_1 = \frac{q_1^2}{2C}$; $W_2 = \frac{q_2^2}{2C}$; $W = \frac{q^2}{2C}$; $q_1 = \sqrt{2CW_1}$; $q_2 = \sqrt{2CW_2}$.

По закону сохранения заряда $q_1 + q_2 = 2q = \sqrt{2CW_1} + \sqrt{2CW_2}$;

$$q = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2CW_1} + \sqrt{2CW_2}\right);$$

$$Q = W_1 + W_2 - \frac{2q^2}{2C} = W_1 + W_2 - \frac{\left(\sqrt{2CW_1} + \sqrt{2CW_2}\right)^2}{4C} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(W_1 + W_2 - 2\sqrt{W_1W_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{W_2} - \sqrt{W_1}\right)^2 = 0{,}2 \text{ мДж}.$$

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Уровень II

1. Два одинаковых металлических шарика радиусом r и плотностью ρ надеты на тонкий непроводящий стержень. Верхний шарик закреплен, нижний может свободно перемещаться вдоль стержня. Шарики опущены в жидкость, диэлектрическая проницаемость которой ε, плотность ρ_1. У каждого миллиардного атома верхнего шарика забрали по одному электрону и перенесли на подвижный шарик. На каком расстоянии будет находиться нижний шарик от верхнего в состоянии равновесия, если стержень расположен вертикально?

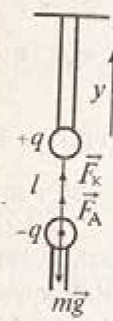


Рис. 1

Ответ: $l = \dfrac{\rho N_A e r}{\mu Z}\sqrt{\dfrac{r}{3\varepsilon\varepsilon_0 g(\rho - \rho_1)}}$.

Решение. Заряды шариков одинаковы по величине и противоположны по знаку, т. е. шарики притягиваются (рис. 1). Условие равновесия нижнего шарика $m\vec{g} + \vec{F}_А + \vec{F}_К = 0$,

$$(y):\quad F_А + F_К = mg, \tag{1}$$

где $m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$; сила Архимеда $F_А = \frac{4}{3}\pi r^3 g\rho_1$, кулоновская сила $F_К = \dfrac{kq^2}{\varepsilon l^2}$, т. к. $|q_1| = |q_2| = ne$, n — число перенесенных электронов, e — заряд электрона.

Тогда из (1) $\dfrac{4}{3}\pi r^3 g\rho_1 + \dfrac{n^2e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l^2} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 g\rho$.

$n = \dfrac{N}{Z} = \dfrac{m}{M}\dfrac{N_A}{Z} = \dfrac{4\pi r^3\rho N_A}{3MZ}$, где N — число атомов, содержащихся в шарике массой m и молекулярным весом M, Z — отношение полного числа атомов к числу атомов, лишенных одного электрона, N_A — число Авогадро.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g\rho_1 + \frac{\left(4\pi r^3\right)^2\rho^2 N_A^2 e^2}{3^2 M^2 Z^2 4\pi\varepsilon_0\varepsilon l^2} = \frac{4}{3}\pi r^3 g\rho, \text{ откуда } l = \frac{\rho N_A e r}{\mu Z}\sqrt{\frac{r}{3\varepsilon_0\varepsilon g(\rho - \rho_1)}}.$$

2. Шарик массой m, имеющий заряд q, свободно падает в однородном электрическом поле параллельном поверхности земли напряженностью $\vec{E}$. Опишите движение шарика и напишите уравнение траектории $y = y(x)$. Начальная скорость шарика равна нулю.

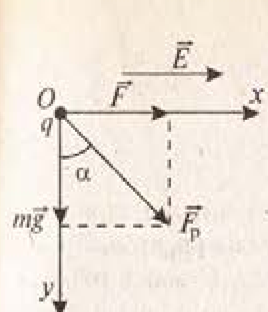


Рис. 2

Ответ: $y = \dfrac{mg}{qE}x$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{qE}{mg}$.

Решение. Согласно второму закону Ньютона (рис. 2)

$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$; $\vec{F} = q\vec{E}$;

(x): $qE = ma_x$; $a_x = \dfrac{qE}{m}$;

(y): $mg = ma_y$; $a_y = g$.

Движение равноускоренное. Кинематические уравнения движения имеют вид: $x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}$; $y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}$.

Начальные условия: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\upsilon_0 = 0$, откуда

$$x = \frac{a_x t^2}{2} = \frac{qE}{2m}t^2; \tag{1}$$

$$y = \frac{a_y t^2}{2} = \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Из (1) $t^2 = \dfrac{2mx}{qE}$, подставим в (2), тогда уравнение траектории $y = \dfrac{mg}{qE}x$. Это уравнение прямой, т. е. движение прямолинейное, направление которого определяется направлением результирующей силы $\vec{F}_р$ (рис. 2), для которой $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{qE}{mg}$.

3. Тонкое проводящее кольцо радиусом R несет электрический заряд q, распределенный по кольцу равномерно. В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q, причем $Q >> q$. Определите силу, с которой растянуто кольцо.

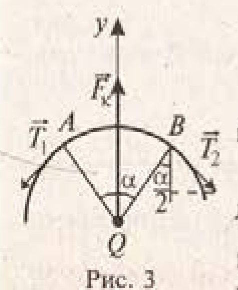


Рис. 3

Ответ: $F = \dfrac{kQq}{2\pi R^2}$.

Решение. Рассмотрим маленький элемент кольца AB (рис. 3). Заряд этого элемента $\Delta q = \dfrac{q\alpha}{2\pi}$, тогда $F_К = k\dfrac{\Delta qQ}{R^2} = k\dfrac{qQ}{R^2}\dfrac{\alpha}{2\pi}$. Условие равновесия элемента кольца $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_К = 0$; $T_1 = T_2 = T$ — силы, растягивающие этот участок.

(y): $F_K - 2T\sin\frac{\alpha}{2} = 0$; $\frac{\alpha}{2}$ мал, поэтому полагаем $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, тогда $k\frac{qQ}{R^2}\frac{\alpha}{2\pi} = T\alpha$, откуда $T = k\frac{qQ}{2\pi R^2}$.

4. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 10$ нКл и $q_2 = -20$ нКл, которые находятся на расстоянии $d = 20$ см один от другого. Определите напряженность E поля в точке A, отдаленной от первого заряда на $r_1 = 30$ см и от второго на $r_2 = 40$ см.

Рис. 4

Ответ: $E = 545$ В/м.

Решение. По принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (рис. 4).

По теореме косинусов из ΔAEE_2

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha}.$$

Из ΔABC по теореме косинусов найдем $\cos\alpha$:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2} = 0,875.$$

$$E_1 = k\frac{q_1}{r_1^2} = 10^3 \text{ В/м}; \quad E_2 = k\frac{q_2}{r_2^2} = 1,125\cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

$$E = \sqrt{\left(k\frac{q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(k\frac{q_2}{r_2^2}\right)^2 - 2\left(k\frac{q_1}{r_1^2}\right)\left(k\frac{q_2}{r_2^2}\right)\cos\alpha} = 545 \text{ В/м}.$$

5. Два параллельных тонких кольца радиусами R_1 и R_2 расположены на расстоянии d друг от друга на одной оси. Найдите работу электрических сил при перемещении заряда q_0 из центра первого кольца в центр второго, если на первом кольце равномерно распределен заряд q_1, а на втором заряд q_2.

Ответ: $A = kq_0(q_1 - q_2)\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{(R^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$, при $R_1 = R_2 = R$.

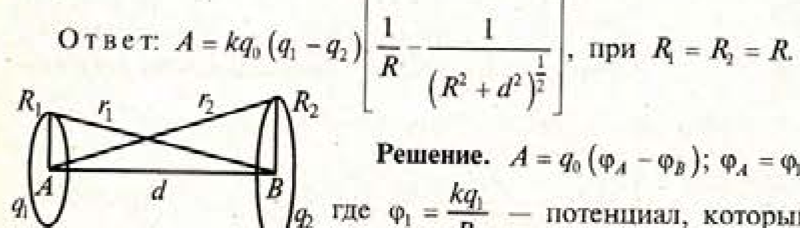


Рис. 5

Решение. $A = q_0(\varphi_A - \varphi_B)$; $\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2$; где $\varphi_1 = \frac{kq_1}{R_1}$ — потенциал, который создает заряд первого кольца в точке A (рис. 5),

$\varphi_2 = \frac{kq_2}{\sqrt{R_2^2 + d^2}}$ — потенциал, создаваемый зарядом второго кольца в точке A. Аналогично для точки B: $\varphi_B = \varphi_1' + \varphi_2'$; $\varphi_1' = \frac{kq_1}{\sqrt{R_1^2 + d^2}}$;

$\varphi_2' = \frac{kq_2}{R_2}$. Тогда работа равна $A = q_0k\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{\sqrt{R_2^2 + d^2}} - \frac{q_1}{\sqrt{R_1^2 + d^2}} - \frac{q_2}{R_2}\right) =$

$$= q_0k\left[q_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + d^2}}\right) - q_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + d^2}}\right)\right].$$

Если радиусы колец одинаковы $R_1 = R_2 = R$, тогда

$$A = kq_0(q_1 - q_2)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right).$$

6. Шар радиусом R равномерно заряжен электричеством с объемной плотностью ρ. Найдите модуль напряженности как функцию расстояния от центра шара. Постройте график функции $E(r)$.

Ответ: $E_i = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$; $0 \le r \le R$; $E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$, $r > R$.

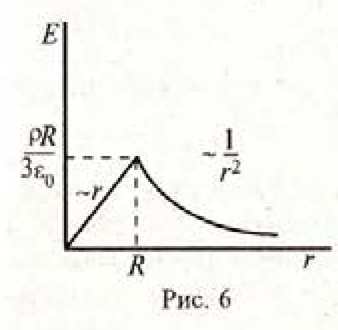


Рис. 6

Решение. 1) $0 \le r \le R$. Напряженность поля сферически симметрично распределенного заряда определяется только зарядом, находящимся внутри шара радиусом r. Тогда $q_1 = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$,

$$E_1(r) = \frac{kq_1}{r^2} = \frac{4\rho\pi r^3}{3\cdot 4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, \quad E_1 \sim r.$$

Напряженность поля на границе заряженного шара $(r = R)$ $E_1(R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$.

2) $r > R$. Вне заряженного шара напряженность поля определяется как напряженность поля точечного заряда, равного заряду шара, помещенного в центр шара. $q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$.

$$E_2(r) = \frac{kq}{r^2} = \frac{4\rho\pi R^3}{3\cdot 4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}; \quad E_2 \sim \frac{1}{r^2}.$$

График зависимости $E(r)$ представлен на рис. 6.

7. Внутри равномерно заряженного шара с объемной плотностью заряда ρ имеется сферическая полость. Расстояние между центрами шара и полости равно l. Чему равна напряженность электрического поля внутри полости и как она направлена?

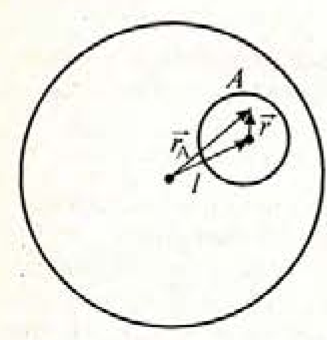


Рис. 7

Ответ: $\vec{E}_A = \dfrac{\rho \vec{l}}{3\varepsilon_0}$.

Решение. См. решение задачи 6. Напряженность поля объемнозаряженного шара линейно зависит от расстояния до центра и направлена по радиусу. Возьмем любую точку (A) внутри полости. Для большого шара $\vec{E}_{A_1} = \dfrac{\rho \vec{r}_A}{3\varepsilon_0}$; для малого шара, который можно поместить на место полости, $\vec{E}_{A_2} = \dfrac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}$. Для малого шара (полости) объемную плотность заряда можно считать отрицательной. Тогда, согласно принципу суперпозиции, напряженность поля в полости равна $\vec{E}_A = \vec{E}_{A_1} - \vec{E}_{A_2} = \dfrac{\rho \vec{r}_A}{3\varepsilon_0} - \dfrac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0} = \dfrac{\rho(\vec{r}_A - \vec{r})}{3\varepsilon_0} = \dfrac{\rho \vec{l}}{3\varepsilon_0}$.

То есть напряженность электрического поля внутри полости $\vec{E} = \dfrac{\rho \vec{l}}{3\varepsilon_0}$ и направлена вдоль прямой, соединяющей центры шара и полости (рис. 7).

8. Эбонитовый сплошной шар радиусом $R = 5{,}0$ см несет заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м³. Определите напряженность в точках, отстоящих от центра шара на расстояниях $r_1 = 3{,}0$ см, $r_2 = 5{,}0$ см, $r_3 = 10$ см. Постройте график зависимости $E(r)$.

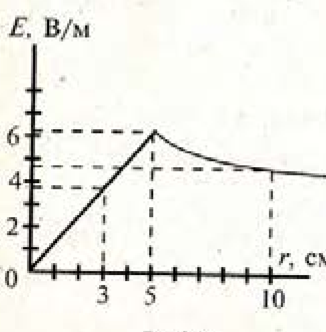


Рис. 8

Ответ: $E_1 = 3{,}8$ В/м; $E_2 = 6{,}3$ В/м; $E_3 = 4{,}7$ В/м.

Решение. См. задачу 6.

$E_1(r_1) = \dfrac{\rho r_1}{3\varepsilon\varepsilon_0} = 3{,}8$ В/м;

$E_2(r_2) = E_2(R) = \dfrac{\rho r_2}{3\varepsilon\varepsilon_0} = 6{,}3$ В/м;

$E_3(r_3) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_3^2} = 4{,}7$ В/м.

Зависимость $E(r)$ показана на рис. 8.

9. В плоский конденсатор длиной $l = 5$ см влетает электрон под углом $\alpha = 15°$ к пластинам. Электрон обладает энергией $W = 1500$ эВ. Расстояние между пластинами $d = 1$ см. Определите величину напряжения на пластинах конденсатора U, при котором электрон при выходе из пластины будет двигаться параллельно им.

Ответ: $U = 150$ В.

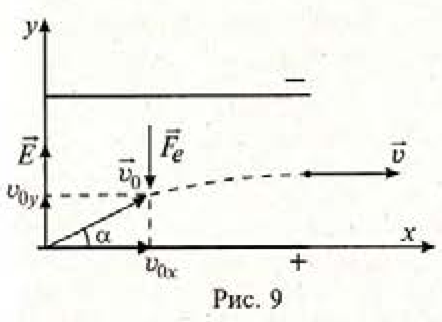


Рис. 9

Решение. Начальную скорость электрона находим, зная его энергию $W = \dfrac{mv_0^2}{2}$; $v_0 = \sqrt{\dfrac{2W}{m}}$. (1)

Движение заряда в электрическом поле конденсатора аналогично движению тела, брошенного под углом к горизонту, в поле силы тяжести (рис. 9). По оси y на заряд действует сила $F_e = |e|E = |e|\dfrac{U}{d}$, заряд движется с ускорением $ma_y = |e|E$; $a_y = \dfrac{|e|E}{m} = \dfrac{|e|U}{md}$. Начальная скорость $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, проекция скорости на ось y: $v_y = v_{0y} - a_y t = v_0 \sin\alpha - \dfrac{|e|Ut}{md}$. (2)

По условию в момент вылета электрона из конденсатора $v_y = 0$. (3)

Время движения электрона в конденсаторе найдем, учитывая, что движение вдоль оси x равномерное, $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $l = v_0 \cos\alpha \cdot t$;

$$t = \frac{l}{v_0 \cos\alpha}. \quad (4)$$

Тогда из (2), с учетом (1), (3) и (4), получим

$$v_0 \sin\alpha - \frac{|e|Ul}{v_0 md \cos\alpha} = 0; \quad U = \frac{Wd \sin 2\alpha}{|e|l} = 150 \text{ В}.$$

10. Электрон влетает в плоский конденсатор под углом α к плоскости пластин и вылетает под углом β, причем $\beta < \alpha$. Длина конденсатора — l, разность потенциалов между пластинами — U, расстояние между ними — d. Определите начальную скорость электрона и его энергию при вылете из конденсатора.

Ответ: $v_0^2 = \dfrac{eUl}{\left[md\cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\right]}$, $W = \dfrac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}$.

Решение. Электрон в электрическом поле конденсатора движется равномерно по оси x: $v_{0x} = v_x = v_0 \cos\alpha$, и равнозамедленно по оси y (рис. 10) с ускорением $ma_y = |e|E = |e|\dfrac{U}{d}$; $a_y = \dfrac{|e|U}{md}$.

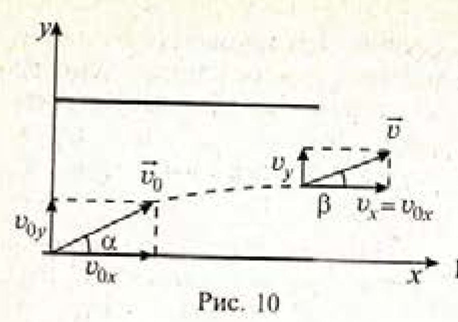


Рис. 10

В момент вылета из конденсатора компоненты скорости

$v_x = v_0 \cos\alpha$;

$v_y = v_{0y} - at = v_0 \sin\alpha - \dfrac{|e|Ut}{md}$.

Время полета в конденсаторе определим из $l = v_0 \cos\alpha \cdot t$;

$$t = \frac{l}{v_0 \cos\alpha};$$

тогда $v_y = v_0 \sin\alpha - \dfrac{|e|Ul}{mdv_0 \cos\alpha}$.

Из рисунка 10 следует, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{v_y}{v_x}$;

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_0 \sin\alpha - \dfrac{|e|Ul}{mdv_0 \cos\alpha}}{v_0 \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{|e|Ul}{mdv_0^2 \cos^2\alpha};$$

$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{|e|Ul}{mdv_0^2 \cos^2\alpha}$; откуда $v_0^2 = \dfrac{|e|Ul}{md \cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)}$.

Скорость электрона v при вылете из конденсатора найдем, используя $v_{0x} = v_x$; $v_0 \cos\alpha = v \cos\beta$; тогда $v = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{\cos\beta}$.

Энергия электрона $W = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mv_0^2 \cos^2\alpha}{2\cos^2\beta}$.

11. Электрон влетает со скоростью v_0 в пространство между пластинами конденсатора под углом α к плоскости пластин через отверстие в нижней пластине. Расстояние между пластинами d, разность потенциалов U. Какую кривую опишет электрон при своем движении? На сколько приблизится он к верхней пластине? Силой тяжести пренебречь.

Ответ: $x = d\left(1 - \dfrac{mv_0^2 \sin^2\alpha}{2eU}\right)$.

Решение. См. задачу 9. Движение заряда, влетающего в электрическое поле конденсатора под углом α, аналогично движению тела, брошенного под углом, в поле силы тяжести. Ускорение для заряда определяем из условия $ma_y = |e|E = |e|\dfrac{U}{d}$, откуда $a_y = \dfrac{|e|U}{md}$.

Вдоль оси x движение равномерное. Траектория движения — парабола. Максимальное удаление заряда от нижней, положительно заряженной пластины находим как высоту максимального подъема тела ($g = a_y$): $h = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2a_y} = \dfrac{mdv_0^2 \sin^2\alpha}{2|e|U}$.

К верхней пластине электрон приблизится на расстояние

$$x = d - h = d\left(1 - \frac{mv_0^2 \sin^2\alpha}{2|e|U}\right).$$

12. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $d = 1$ см, находится в вакууме и расположен так, что сила тяжести перпендикулярна к его пластинам (рис. 11). Верхняя пластина конденсатора закреплена, а нижняя, изготовленная из фольги толщиной $h = 0{,}1$ мм, лежит на изолирующей подставке. До какого напряжения U нужно зарядить конденсатор, чтобы нижняя пластина перестала давить на опору? Плотность фольги $\rho = 2830$ кг/м³.

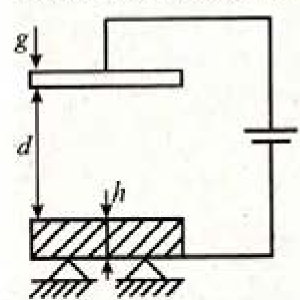


Рис. 11

Ответ: $U = 7900$ В.

Решение. Пластины в конденсаторе притягиваются с силой $F = \dfrac{1}{2}qE$, (1)

где $q = \sigma S$ — заряд пластины, σ — поверхностная плотность заряда, S — площадь пластины,

$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ — напряженность поля в плоском конденсаторе. В воздушном конденсаторе $\varepsilon = 1$, т. е. $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, откуда $\sigma = \varepsilon_0 E$. (2)

Нижняя пластина не будет давить на опору, если сила тяжести пластины будет равна силе взаимного притяжения пластин $F = mg$;

$\dfrac{1}{2}qE = \rho gSh$. С учетом (1) и (2) получим $\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S = \rho gSh$. (3)

Для однородного поля $E = \dfrac{U}{d}$, где U — напряжение между пластинами, тогда из (3) следует $\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \dfrac{U^2}{d^2} = \rho gh$; $U = d\sqrt{\dfrac{2\rho gh}{\varepsilon_0}} = 7{,}9$ кВ.

13. Найдите емкость системы одинаковых конденсаторов, изображенной на рис. 12. Емкость каждого конденсатора C.

Ответ: $C_{AB} = 2C$.

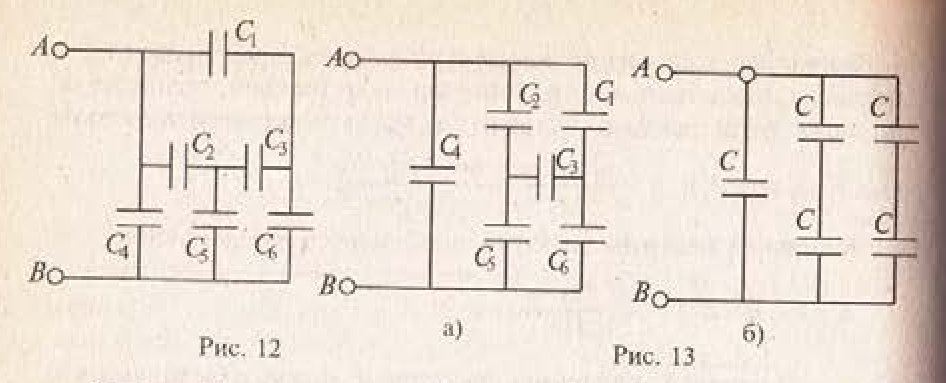


Рис. 12 а) Рис. 13 б)

Решение. Перерисуем схему (рис. 12) так, как показано на рис. 13а. Из симметрии схемы следует, что разность потенциалов пластин конденсатора C_3 равна нулю. Следовательно, этот конденсатор не заряжен и может быть исключен (рис. 13б). Емкость получившейся системы $C_{AB} = 2C$.

14. Найдите емкость батарей конденсаторов, включенных по схеме, изображенной на рисунке. Пространство между квадратными обкладками конденсаторов, имеющими сторону l, заполнено слоями диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Расстояние между обкладками равно d.

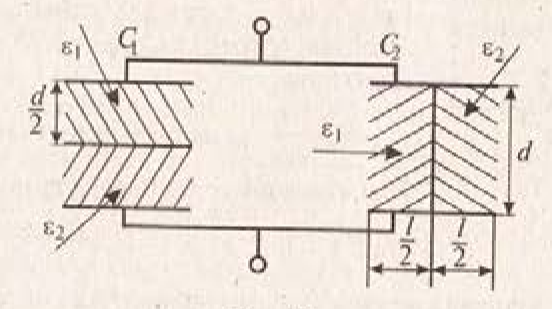


Рис. 14

Решение. Конденсаторы C_1 и C_2 соединены параллельно. Поэтому общая емкость батареи конденсаторов $C = C_1 + C_2$. Конденсатор C_1 можно рассматривать как два конденсатора, соединенных последовательно: $\frac{1}{C_1} = \frac{(d/2)}{\varepsilon_0\varepsilon_1 l^2} + \frac{(d/2)}{\varepsilon_0\varepsilon_2 l^2} = \frac{d}{2\varepsilon_0 l^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$, $C_1 = \frac{2\varepsilon_0 l^2 \varepsilon_1\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$.

Конденсатор C_2 можно рассматривать как два конденсатора, соединенных параллельно. Следовательно:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 l(l/2)}{d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 l(l/2)}{d} = \frac{\varepsilon_0 l^2}{2d}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Таким образом, емкость батареи конденсаторов:

$$C = \frac{2\varepsilon_0 l^2 \varepsilon_1\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_0 l^2}{2d}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{\varepsilon_0 l^2\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 6\varepsilon_1\varepsilon_2\right)}{2d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

15. Найдите разность потенциалов между обкладками конденсаторов, а также между точками b и e схемы, изображенной на рисунке 15.

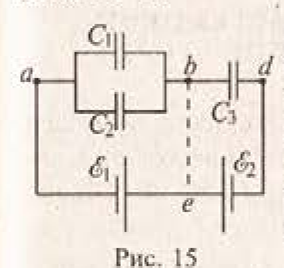


Рис. 15

Решение. Предположим, что $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$, и обозначим разность потенциалов на обкладках конденсаторов через U_{ab} и U_3. Тогда, учитывая полярность источников, запишем: $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = U_{ab} + U_3$, поскольку напряжение на всей батарее конденсаторов между точками a и d равно разности $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$.

Конденсаторы C_1 и C_2 соединены между собой параллельно, конденсатор C_3 подключен к ним последовательно. Если на этих конденсаторах находятся соответственно заряды q_1, q_2 и q_3, то должно быть $q_1 + q_2 = q_3$, т. к. при указанном соединении конденсаторов заряд на участке ab равен заряду на участке bd: $q_1 = C_1U_{ab}$; $q_2 = C_2U_{ab}$, $q_3 = C_3U_3$. Решая вышеприведенные уравнения относительно U_{ab} и U_3, получаем $U_{ab} = \frac{C_1(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$; $U_3 = \frac{(C_1 + C_2)(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$.

Разность потенциалов между точками b и e можно определить из $U_{be} = \mathcal{E}_1 - U_{ab} = \mathcal{E}_2 + U_3$.

Подставляя значение U_{ab}, получаем $U_{be} = \frac{(C_1 + C_2)\mathcal{E}_1 + C_3\mathcal{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}$.

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Уровень I

22. СИЛА ТОКА. ЗАКОН ОМА ДЛЯ УЧАСТКА ЦЕПИ. СОЕДИНЕНИЕ ПРОВОДНИКОВ

22.1. Какое напряжение можно приложить к катушке, имеющей 1000 витков медного провода со средним диаметром витков $d = 6$ см, если допустимая плотность тока $j = 2$ А/мм², $\rho_{меди} = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ом · м?

Ответ: $U = 6{,}4$ В.

Решение. Плотность тока $j = \dfrac{I}{S}$. Напряжение $U = I \cdot R = I\rho\dfrac{\pi d}{S}n =$

$= j\rho\pi dn \approx 6{,}4$ В.

22.2. Во сколько раз изменится сопротивление проводника (без изоляции), если его свернуть пополам и скрутить?

Ответ: В 4 раза уменьшится.

Решение. Сопротивление проводника $R_1 = \rho\dfrac{l_1}{S_1}$. Если его свернуть пополам и скрутить, его длина станет вдвое меньше $l_2 = l_1/2$, а площадь поперечного сечения — вдвое больше $S_2 = 2S_1$, тогда $R_2 = \rho\dfrac{l_2}{S_2} = \rho\dfrac{l_1}{2 \cdot 2S_1} = \rho\dfrac{l_1}{4S_1} = \dfrac{R_1}{4}$.

22.3. Можно ли включить в сеть с напряжением 220 В реостат, на котором написано: а) 30 Ом, 5 А; б) 2000 Ом, 0,2 А?

Ответ: а) Нельзя; б) можно.

Решение. Максимальное напряжение, на которое рассчитан реостат, $U_{max} = I \cdot R$, тогда а) $U_{1max} = I_1 \cdot R_1 = 150$ В. $U_{1max} < 220$ В, реостат нельзя включать в сеть с напряжением 220 В.

б) $U_{2max} = I_2 \cdot R_2 = 400$ В. $U_{2max} > 220$ В, реостат можно включать в сеть.

22.4. По проводу течет ток силой $I = 10$ А. Найдите массу электронов, проходящих через поперечное сечение этого провода за время $t = 1{,}0$ ч.

Ответ: $m = 0{,}2$ мг.

Решение. Масса N электронов равна $m = Nm_e$, где m_e — масса одного электрона. Количество электронов $N = q/e$, где $q = I \cdot t$ — заряд всех электронов. Тогда $m = Itm_e/e = 0{,}2$ мг.

22.5. Электрическая цепь состоит из двух последовательно соединенных кусков медного провода сечениями $S_1 = 2{,}0$ мм², $S_2 = 3{,}0$ мм². Сравните средние скорости упорядоченного движения электрона в проводах.

Ответ: $\dfrac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} = \dfrac{S_2}{S_1} = 1{,}5$.

Решение. Средняя скорость упорядоченного движения электронов и плотность тока связаны соотношением $j = ne\bar{u}$. Плотность тока $j = \dfrac{I}{S}$. Из сравнения этих формул для двух кусков меди разного сечения получим $\dfrac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} = \dfrac{S_2}{S_1} = 1{,}5$.

22.6. Определите плотность тока, текущего по мотку тонкой медной проволоки длиной $l = 10$ м, на которую подано напряжение $U = 17$ мВ.

Ответ: $j = 10$ А/см².

Решение. Плотность тока $j = \dfrac{I}{S}$. $I = \dfrac{U}{R}$, $R = \rho\dfrac{l}{s}$, где ρ — удельное сопротивление меди, S — сечение провода. $j = \dfrac{U}{\rho l} = 10$ А/см².

22.7. На конденсатор переменной емкости подано напряжение $U = 100$ В. Какой силы ток течет по проводам, если емкость конденсатора меняется равномерно со скоростью $\Delta C/\Delta t = 10$ нФ/с?

Ответ: $I = 1$ мкА.

Решение. Сила тока $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$; $\Delta q = U \cdot \Delta C$, так как изменение заряда происходит за счет изменения емкости. Тогда $I = \dfrac{U\Delta C}{\Delta t} =$

$= 1$ мкА.

22.8. Плоский конденсатор с пластинами квадратной формы размерами $a^2 = 21^2$ см² и расстоянием между пластинами $d = 2$ мм присоединен к полюсам источника ЭДС $\mathscr{E} = 750$ В. В пространство между пластинами с постоянной скоростью $v = 8$ см/с вдвигают стеклянную пластинку толщиной 2 мм. Какой ток пройдет при этом по цепи? Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$.

Ответ: $I = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ А.

Решение. За время $t = a/v$ в цепи протекает заряд $q = \mathcal{E}(C_2 - C_1) = \mathcal{E}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{d}\frac{a^2}{}$. Сила тока $I = \frac{q}{t} = \mathcal{E}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)av}{d} = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ А.

22.9. На концах провода из материала с удельным сопротивлением ρ, длиной l и диаметром d за время t напряжение равномерно возрастает от U_1 до U_2. Какое количество электричества протекает при этом через провод?

Ответ: $q = \frac{\pi d^2 t(U_1 + U_2)}{8\rho l}$.

Решение. Количество электричества протекающее по проводу $q = It$, где $I = \frac{U}{R}$ — сила тока. Сопротивление провода $R = \frac{\rho l}{S}$, где ρ — удельное сопротивление проводника. Среднее напряжение равно $(U_1 + U_2)/2$. Тогда $q = \frac{\pi d^2 t(U_1 + U_2)}{8\rho l}$.

22.10. Нихромовая спираль нагревательного прибора должна иметь сопротивление $R = 30$ Ом при температуре накала $t = 900$ °С. Сколько метров проволоки надо взять для изготовления спирали, если площадь поперечного сечения проволоки $S = 0{,}3$ мм²?

Ответ: $l = 6$ м.

Решение. Зависимость удельного сопротивления от температуры имеет вид: $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, где α — температурный коэффициент сопротивления. Сопротивление спирали $R = \frac{\rho_0(1+\alpha t)l}{S}$, откуда

$l = \frac{RS}{\rho_0(1+\alpha t)} = 6$ м.

22.11. Вольфрамовая нить электрической лампы при температуре $t_1 = 2000$ °С имеет сопротивление $R_1 = 204$ Ом. Определите ее сопротивление при температуре $t_2 = 20$ °С.

Ответ: $R_2 = 22$ Ом.

Решение. Используем зависимость сопротивления от температуры. $R_1 = \frac{\rho_0(1+\alpha t_1)l}{S}$, $R_2 = \frac{\rho_0(1+\alpha t_2)l}{S}$. Откуда $R_2 = \frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1} \cdot R_1 = 22$ Ом.

22.12. Железный стержень соединен последовательно с угольным такой же толщины. При каком соотношении их длин сопротивление такой комбинации не зависит от температуры?

Ответ: $l_ж/l_у = 6$.

Решение. Общее сопротивление стержней R_t при температуре t определяется формулой $R_t = R_{01}(1+\alpha_1 t) + R_{02}(1+\alpha_2 t) = (R_{01} + R_{02}) + (R_{01}\alpha_1 + R_{02}\alpha_2)t$, где $R_{01} = \rho_1 l_1/S$ и $R_{02} = \rho_2 l_2/S$ — сопротивления стержней при 0 °С. Сопротивление стержней не зависит от температуры, если $R_{01}\alpha_1 + R_{02}\alpha_2 = 0$, откуда получаем $l_1/l_2 = l_ж/l_у = -\frac{\alpha_2\rho_2}{\alpha_1\rho_1} = 6$.

22.13. Для измерения температуры применили железную проволочку, имеющую при температуре $t_1 = 10$ °С сопротивление $R_1 = 15$ Ом. При некоторой температуре t_2 она имела сопротивление $R_2 = 18{,}25$ Ом. Найдите эту температуру. Температурный коэффициент сопротивления железа $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹.

Ответ: $t_2 = 48{,}3$ °С.

Решение. При температуре t_1 и t_2 сопротивления проволочки соответственно равны $R_1 = R_0(1 + \alpha t_1)$ и $R_2 = R_0(1 + \alpha t_2)$, где R_0 — ее сопротивление при $t = 0$ °С. Тогда $t_2 = \frac{R_2(1+\alpha t_1) - R_1}{\alpha R_1} = 48{,}3$ °С.

22.14. Реостат из железной проволоки, миллиамперметр и источник тока включены последовательно. При температуре $t_0 = 0$ °С сопротивление реостата $R_0 = 200$ Ом. Сопротивление миллиамперметра $R = 20$ Ом, его показания $I_0 = 30$ мА. Какой ток I будет показывать миллиамперметр, если реостат разогреется до температуры $t = 50$ °С? Температурный коэффициент сопротивления железа $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹.

Ответ: $I = 23{,}6$ мА.

Решение. $I_0 = \frac{U}{R_0 + R}$, $I = \frac{U}{R_0(1+\alpha t) + R}$.

Откуда следует $I = \frac{I_0(R_0 + R)}{R_0(1+\alpha t) + R} = 23{,}6$ мА.

22.15. Проволока имеет сопротивление 36 Ом. Когда ее разрезали на несколько равных частей и соединили эти части параллельно, то получилось сопротивление 1 Ом. На сколько частей n разрезали проволоку?

Ответ: $n = 6$.

Решение. При последовательном соединении n равных частей проволоки общее сопротивление $R_1 = nr$, при параллельном — $R_2 = r/n$, r — сопротивление одной части проволоки. Очевидно, $R_1 = n^2 R_2$, $n = \sqrt{R_1/R_2} = 6$.

22.16. Определите сопротивление цепей, показанных на рис. 22.1а—г. Сопротивление каждого резистора равно r.

Ответ: а) $R = r$; б) $R = r/3$; в) $R = 0,6r$; г) $R = r$.

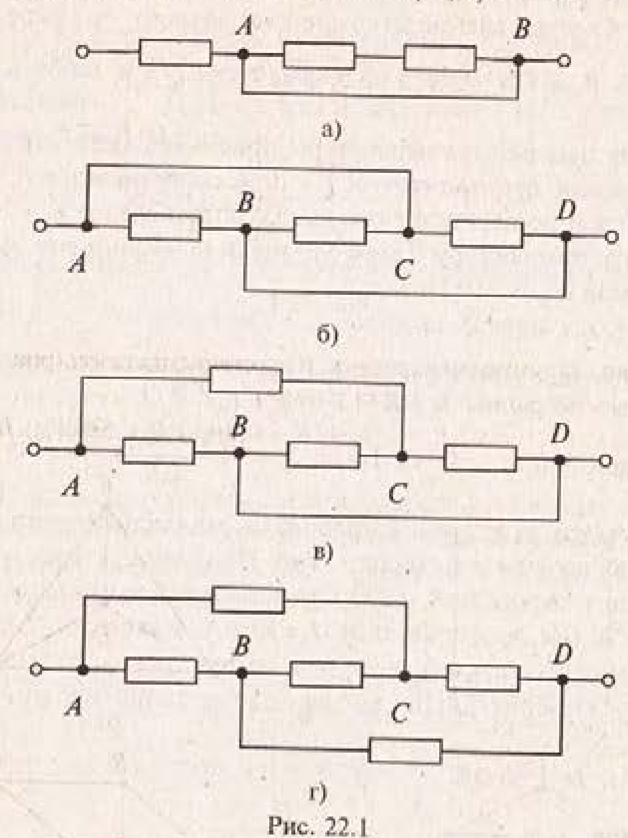


Рис. 22.1

Решение. а) Точки A и B закорочены, их потенциалы одинаковы. Соединив эти точки, получим $R = r$.

б) Поскольку $\varphi_A = \varphi_C$, а $\varphi_B = \varphi_D$, соединив точки A и C, B и D, получим $R = r/3$.

в) Эквивалентная схема (рис. 21.1в′). $R = 0,6r$.

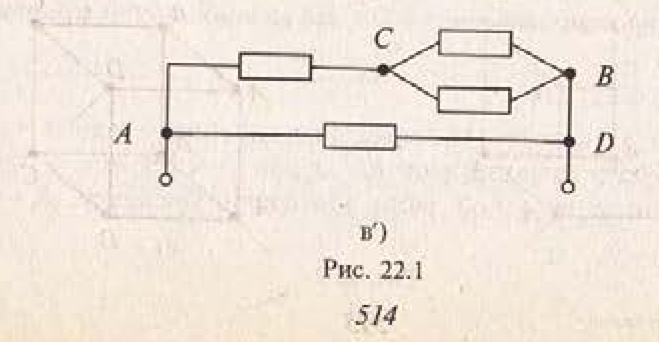


Рис. 22.1

г) Эквивалентная схема (рис. 22.1г′). Из симметрии схемы следует, что $\varphi_B = \varphi_C$, поэтому резистор, включенный между точками B и C, можно исключить. $R = r$.

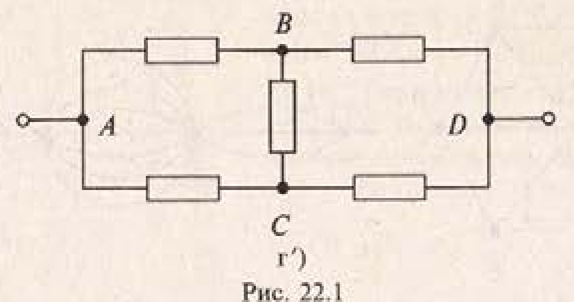


Рис. 22.1

22.17. Определите сопротивление R проволочных сеток (рис. 22.2а—е). Сопротивление каждого звена равно r.

Ответ: а) $R = r$; б) $R = r/2$; в) $R = 0,8r$; г) $R = 5r/6$; д) $R = 7r/12$; е) $R = 3r/4$.

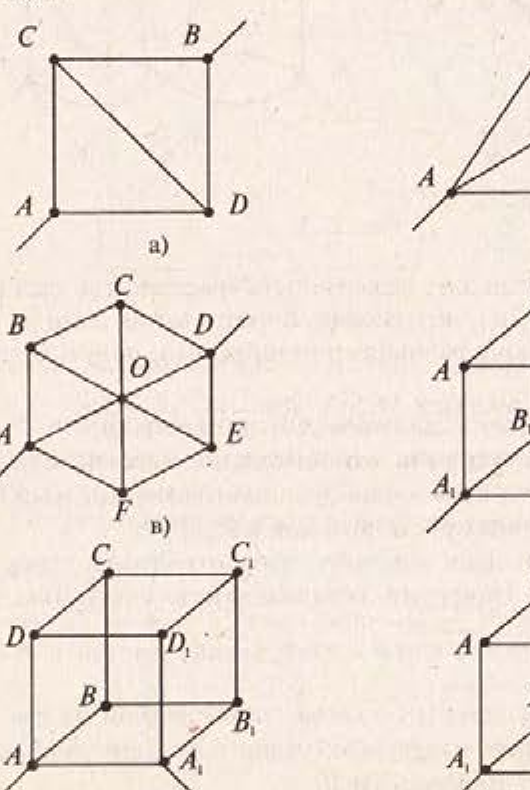


Рис. 22.2

Решение. а) $\varphi_D = \varphi_C$, поэтому $R = r$.
б) $\varphi_B = \varphi_D$, поэтому $R = r/2$.

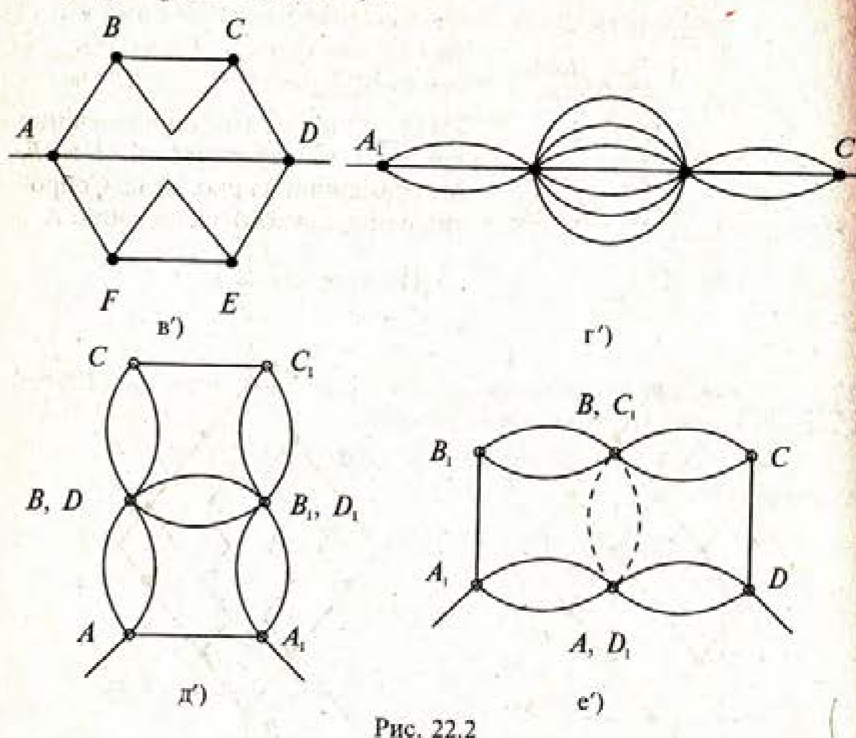


Рис. 22.2

в) Симметрия цепи дает возможность «расщепить» узел в центре (см. рисунок 22.2в′), не изменяя сопротивления цепи. $R = 0{,}8r$.

г) Соединив точки с равными потенциалами, получим эквивалентную схему (см. рисунок 22.2г′). $R = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6}r$.

д) Система симметрична относительно плоскости AA_1CC_1. $\varphi_B = \varphi_D$, $\varphi_{B1} = \varphi_{D1}$. Соединив точки с равными потенциалами, получим эквивалентную схему (см. рисунок 22.2д′).

е) Из симметрии цепи вытекает, что потенциалы точек A, B, C_1, D_1 одинаковы. Начертив эквивалентную схему (см. рисунок 22.2е′), соединив эти точки в одну, можно получить $R = \frac{3}{4}r$.

22.18. Провода соединены по схеме, приведенной на рис. 22.3. Сопротивление каждого из проводов равно 1Ом. Чему равно сопротивление $R_{общ}$ между точками A и B?

Ответ: $R_{общ} = 0{,}5$ Ом.

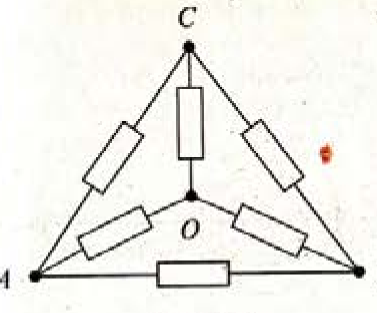
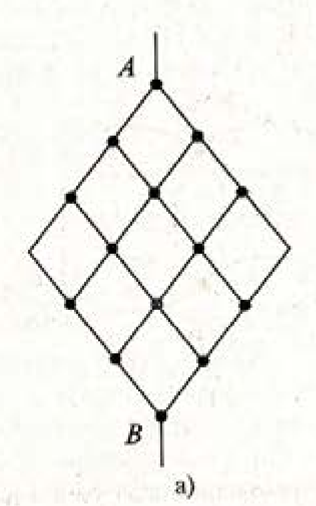


Рис. 22.3

Решение. $R_{AOB} = R_{ACB}$, значит, $\varphi_C = \varphi_O$ и ток в ветви OC равен нулю, сопротивление между точками C и O можно исключить. Тогда $1/R_{общ} = 1/2 + 1/2 + 1 = 2$. $R_{общ} = 0{,}5$ Ом.

22.19. Определить сопротивление цепочки между точками A и B, изображенной на рис. 22.4а. Сопротивление каждого звена равно r.

Ответ: $R = \frac{13}{7}r$.



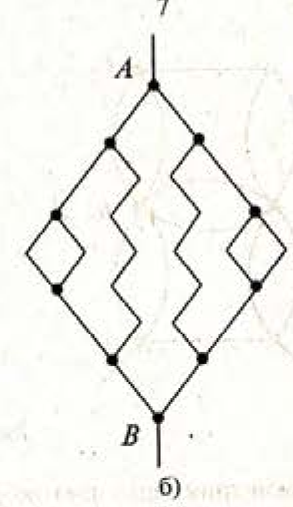


Рис. 22.4

Решение. Эквивалентная схема (рис. 22.4б): $R = \frac{13}{7}r$.

22.20. Сопротивление цепи измеряется между точками A и B (рис. 22.5а). Какое сопротивление R_x необходимо включить между точками C и D, чтобы сопротивление всей цепи не зависело от количества ячеек в нем? Сопротивление каждого резистора равно R.

Ответ: $R_x = (\sqrt{3} - 1) \cdot R$.

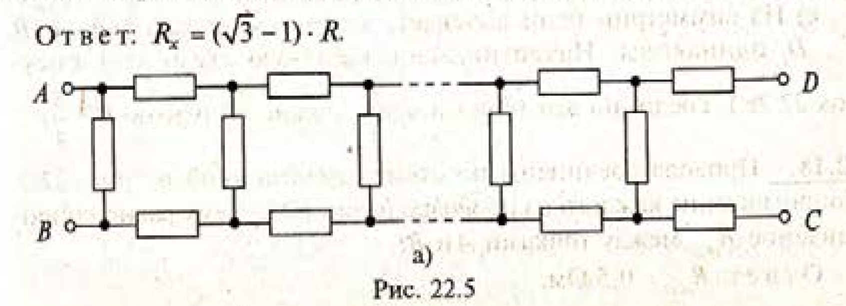


Рис. 22.5

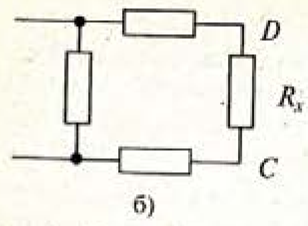


Рис. 22.5

Указание. Сопротивление цепи не изменится при исключении крайней правой ячейки, если изображенная на рисунке 22.5б цепь, которая состоит из этой ячейки и резистора R_x, тоже имеет сопротивление R_x.

22.21. Определите сопротивление реостата, позволяющего уменьшить ток в n раз (рис. 22.6).

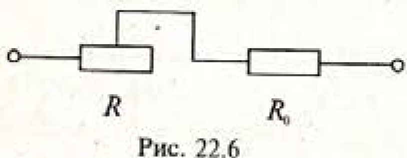


Рис. 22.6

Ответ: $R = R_0 \cdot (n - 1)$.

Решение. При отсутствии реостата $R_0 = U/I$. При соединении реостата последовательно с R_0 имеем $R_0 + R = \frac{U \cdot n}{I}$. Откуда следует $R_0 + R = R_0 \cdot n$ или $R = R_0 \cdot (n - 1)$.

22.22. Как изменится показание вольтметра при перемещении ползунка реостата вправо (рис. 22.7)?

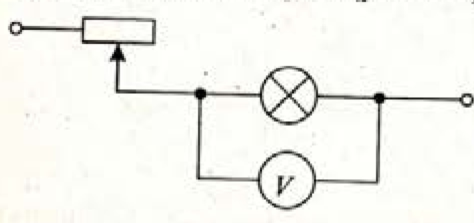


Рис. 22.7

Ответ: Показания вольтметра будут уменьшаться.

Решение. При перемещении ползунка вправо увеличивается сопротивление реостата, следовательно, увеличивается падение напряжения на нем. Так как напряжение в сети постоянно, то показания вольтметра будут уменьшаться. $U_V = U - U_R$.

22.23. Постройте график зависимости общего сопротивления $R_{общ}$ цепи от сопротивления r правой части реостата (рис. 22.8а—в).

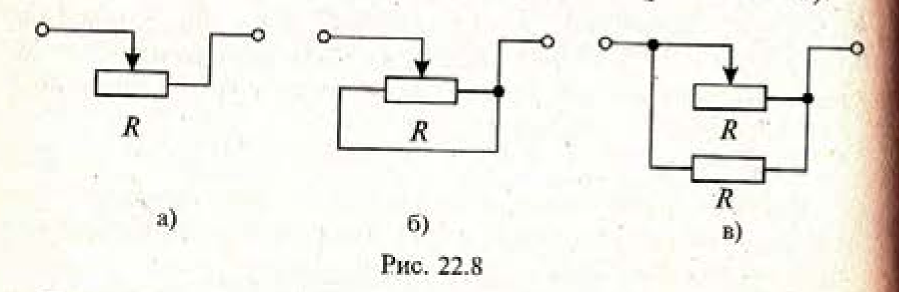


Рис. 22.8

Решение. График зависимости $R_{общ}$ от r приведен на рисунке.
а) $R_{общ} = r$. График — прямая линия.

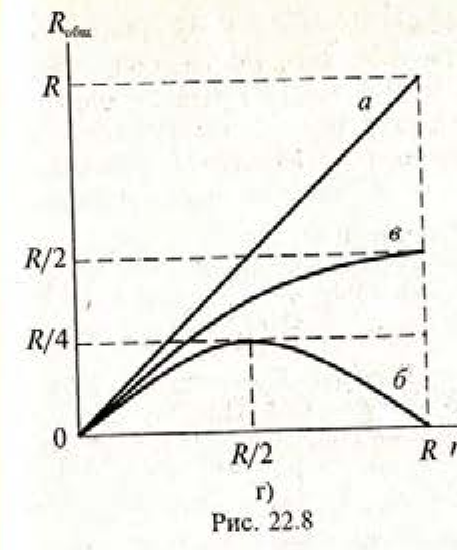


Рис. 22.8

б) $R_{общ} = \frac{(R-r) \cdot r}{(R-r)+r} = r(1 - \frac{r}{R})$.
При $r = R$, $R_{общ} = 0$. При $r = R/2$, $R_{общ} = R/4$.

в) $R_{общ} = \frac{r \cdot R}{r + R} = \frac{R}{1 + \frac{R}{r}}$. При $r = R$, $R_{общ} = R/2$.

22.24. На вход цепочки из резисторов, показанной на рис. 22.9, подано напряжение U_0. Определите напряжение на выходе.

Ответ: $U_{вых} = U_0/8$.

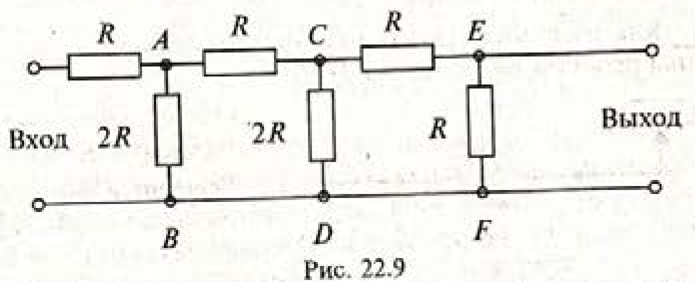


Рис. 22.9

Решение. Общее сопротивление цепи $R_{общ} = 2R$. Сила тока $I = \frac{U_0}{2R}$, $U_{AB} = U_0 - \frac{U_0}{2} = \frac{U_0}{2}$. Сила тока в точке A разделилась поровну. $U_{CD} = \frac{U_0}{2} - \frac{U_0}{4R} R = \frac{U_0}{4}$. Откуда следует $U_{EF} = \frac{U_0}{8}$.

22.25. К проволочному кольцу в двух точках присоединили подводящие ток провода. В каком отношении делят точки присоединения длину окружности кольца, если общее сопротивление получившейся цепи в $n = 4{,}5$ раза меньше сопротивления проволоки, из которой сделано кольцо?

Ответ: 1 : 2.

Решение. Точки присоединения подводящих проводов делят длину окружности кольца в отношении 1 : 2, т. е. отстоят друг от друга по дуге на 120°.

22.26. Вольтметр сопротивлением $r = 10$ Ом рассчитан на силу тока $I_0 = 30$ мА. Какие добавочные сопротивления R_1, R_2, R_3, R_4 надо

взять, чтобы можно было измерять напряжение U в четырех пределах: 3 В, 15 В, 75 В и 150 В?

Ответ: $R_1 = 90$ Ом; $R_2 = 0,49$ кОм; $R_3 = 2,5$ кОм; $R_4 = 5$ кОм.

Решение. Вольтметр рассчитан на $U = I_0 r = 30 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 0,3$ В. Чтобы с его помощью измерять большие напряжения, нужно последовательно с вольтметром включить дополнительные сопротивления.

1. $U_R = 3 - 0,3 = 2,7$ В; $R_1 = U_R/I = 90$ Ом.
2. $U_R = 15 - 0,3 = 14,7$ В; $R_2 = 0,49$ кОм.
3. $U_R = 75 - 0,3 = 74,7$ В; $R_3 = 2,5$ кОм.
4. $U_R = 150 - 0,3 = 149,7$ В; $R_4 = 5$ кОм.

22.27. Параллельно амперметру, имеющему сопротивление $r = 0,02$ Ом, включен медный проводник длиной $l = 20$ см и сечением $S = 3,4$ мм^2. Определите силу тока в цепи, если амперметр показывает $I_A = 0,30$ А.

Ответ: $I = 6,3$ А.

Решение. Напряжение на параллельно соединенных амперметре и проводнике одинаково. Тогда $I_A r = I_{пр} \cdot R_{пр}$. Если учесть, что $R_{пр} = \rho \dfrac{l}{S}$, то $I_{пр} = \dfrac{I_A r S}{\rho l} = 6$ А. Сила тока в цепи $I = 6,3$ А.

22.28. Вольтметр, включенный последовательно с сопротивлением $R_1 = 70$ Ом, показывает напряжение $U_1 = 100$ В при напряжении в цепи $U = 240$ В. Что покажет вольтметр, если его включить последовательно с сопротивлением $R_2 = 35$ кОм в ту же сеть?

Ответ: $U_2 = 0,34$ В.

Решение. Напряжение на сопротивлении R_1 равно $U' = U - U_1 = 140$ В. Сила тока $I = U'/R_1 = 2$ А. Сопротивление вольтметра $R_V = U_1/I = 50$ Ом. Рассуждая аналогично во втором случае, получим

$$U_2 = \frac{U}{R_V + R_2} R_V = 0,34 \text{ В}.$$

22.29. Вольтметр рассчитан на измерение напряжений до максимального значения $U = 3$ В. Сопротивление прибора $R = 300$ Ом. Число делений шкалы прибора $N = 100$. Какова будет цена деления шкалы прибора, если его использовать в качестве миллиамперметра?

Ответ: 0,1 мА/деление.

Решение. Вольтметр рассчитан на силу тока $I = U/R = 10^{-4}$ А $= 0,1$ мА. Если число делений прибора $N = 100$, то цена деления шкалы равна $I/N = 0,1$ мА/деление.

22.30. Гальванометр имеет сопротивление $R_1 = 200$ Ом, и при силе тока $I_1 = 100$ мкА стрелка отклоняется на всю шкалу. Какое добавочное сопротивление R_2 надо подключить, чтобы прибор можно было использовать как вольтметр для измерения напряжения U до 2 В? Какой шунт R_3 надо подключить к этому гальванометру, чтобы его можно было использовать как миллиамперметр для измерения силы тока I до 10 мА?

Ответ: $R_2 = 19,8$ кОм; $R_3 = 2,02$ Ом.

Решение. 1. Максимальное напряжение, которое можно измерить с помощью гальванометра (гальванометр используется как вольтметр) равно $U_1 = I_1 R_1 = 0,02$ В. Для измерения напряжения до 2 В необходимо последовательно с вольтметром включить дополнительное сопротивление. $U_1 = IR_1$, $U_2 = IR_2$; $U_2 = U - U_1$; $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{U}{U_1} - 1$;

$\dfrac{IR_2}{IR_1} = \dfrac{U}{U_1} - 1$, откуда $R_2 = R_1\left(\dfrac{U}{U_1} - 1\right) = 19,8$ кОм.

2. Гальванометр используется как амперметр. Для измерения тока до 10 мА параллельно гальванометру необходимо подключить шунт, сопротивление которого равно $R_3 = \dfrac{R_1}{\dfrac{I}{I_1} - 1} = 2,02$ Ом.

22.31. Стрелка миллиамперметра отклоняется до конца шкалы, если через миллиамперметр проходит ток $I = 0,01$ А. Сопротивление прибора $R = 5$ Ом. Какое добавочное сопротивление $R_д$ нужно присоединить к прибору, чтобы его можно было использовать в качестве вольтметра с пределом измерения напряжений $U = 300$ В?

Ответ: $R_д = 30$ кОм.

Решение. Для измерения прибором напряжений не превышающих U, необходимо последовательно с ним включить такое добавочное сопротивление $R_д$, чтобы $U = I(R + R_д)$, где I — максимальный ток через прибор; отсюда $R_д = \dfrac{U}{I} - R = 30$ кОм.

22.32. Вольтметр с сопротивлением $R = 50$ кОм, подключенный к источнику тока вместе с добавочным сопротивлением $R_д = 120$ кОм, показывает напряжение $U_0 = 100$ В. Найдите напряжение U источника тока.

Ответ: $U = 340$ В.

Решение. Ток, текущий через вольтметр и добавочное сопротивление, $I = U_0/R$. Напряжение источника тока $U = I \cdot (R + R_д) = (R + R_д) \cdot U_0/R = 340$ В.

22.33. Миллиамперметр с пределом измерения тока $I_0 = 25$ мА необходимо использовать как амперметр с пределом измерения $I = 5$ А.

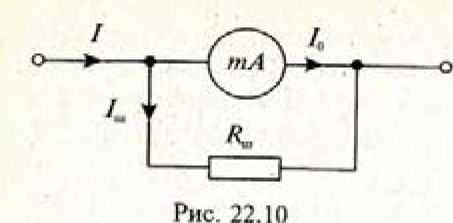
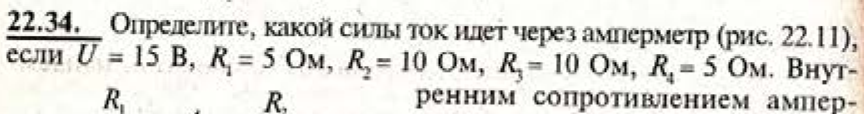


Рис. 22.10

Какое сопротивление $R_ш$ должен иметь шунт? Во сколько раз уменьшится чувствительность прибора? Сопротивление прибора $R = 10$ Ом.

Ответ: $R_ш = 0{,}05$ Ом; $n = 200$.

Решение. При включении параллельно прибору шунта, как показано на рисунке 22.10, $I = I_0 + I_ш$. Напряжения на шунте и на миллиамперметре равны: $I_0 R = I_ш R_ш$; отсюда $R_ш = \frac{I_0 R}{I - I_0} = 0{,}05$ Ом. Чувствительность прибора уменьшается, а цена деления — увеличивается в $n = I/I_0 = 200$ раз.



22.34. Определите, какой силы ток идет через амперметр (рис. 22.11), если $U = 15$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 5$ Ом. Внутренним сопротивлением амперметра пренебречь.

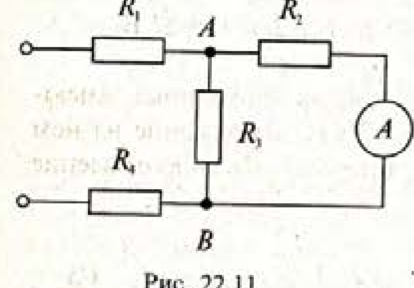


Рис. 22.11

Ответ: $I_A = 0{,}5$ А.

Решение. Общее сопротивление цепи $R_{общ} = R_1 + R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$. Сила тока в цепи $I = U/R_{общ}$. В узле A ток делится поровну, так как $R_2 = R_3$, поэтому сила тока, текущего через амперметр, соединенный последовательно с R_2, будет равна $I_A = \frac{I}{2} = \frac{U}{2(R_1 + R_4) + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 0{,}5$ А.

22.35. Определите показания вольтметров, подключенных к потенциометру сопротивлением $R = 100$ Ом (рис. 22.12а). Напряжение $U = 60 В$. Ползунок потенциометра находится посередине. Сопротивление вольтметров $r_1 = 60$ Ом, $r_2 = 40$ Ом.

Ответ: $U_1 = 33$ В; $U_2 = 27$ В.

Решение. Эквивалентная схема имеет вид, изображенный на рисунке 22.12б. Общее сопротивление цепи $R_{общ} = \frac{(R/2) \cdot r_1}{R/2 + r_1} + \frac{(R/2) \cdot r_2}{R/2 + r_2}$. Сила тока в цепи $I = U/R_{общ}$. В узле A согласно правилу Кирхгофа $I = I_1 + I_1'$, где I_1 — сила тока через первый вольтметр, а I_1' — через $\frac{1}{2}$ потенциометра. Напряжение между точками A и C равно

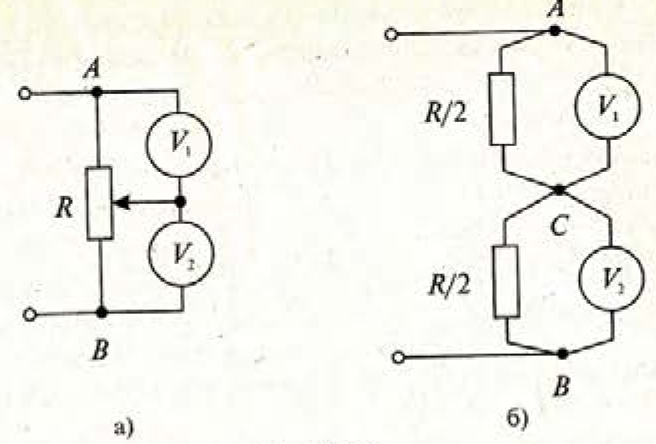


Рис. 22.12

$I_1 r_1 = I_1'(R/2)$. Решив последние два уравнения совместно, найдем I_1, тогда $U_1 = I_1 r_1 = \frac{U r_1 (R + 2r_2)}{R(r_1 + r_2) + 4r_1 r_2} = 33$ В; $U_2 = U - U_1 = 27$ В.

22.36. При включении в электрическую цепь проводника, имеющего диаметр $D = 0{,}5$ мм и длину $l = 47$ мм, напряжение на нем $U = 1{,}2$ В при токе в цепи $I = 1$ А. Найдите удельное сопротивление г материала проводника.

Ответ: $\rho = 5$ мкОм · м.

Решение. Сила тока в цепи $I = \frac{U}{R}$, где $R = \rho \frac{l}{S}$. Тогда $I = \frac{US}{\rho l}$, а $\rho = \frac{US}{Il}$. Учтем, что $S = \frac{\pi D^2}{4}$, получим $\rho = \frac{\pi D^2 U}{4Il} = 5 \cdot 10^{-6}$ Ом · м.

22.37. В цепи известны сопротивления R_1, R_2, R_3 и ток I_3, проходящий по сопротивлению R_3. Определите токи I_1 и I_2 через сопротивления R_1 и R_2. R_2 и R_3 соединены между собой параллельно и подключены к R_1 последовательно. Найдите напряжение, если $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 200$ Ом; $R_3 = 300$ Ом; $I_3 = 0{,}5$ А.

Ответ: $U = 275$ В; $I_1 = 1{,}25$ А; $I_2 = 0{,}75$ А.

Решение. Напряжение на параллельно соединенных сопротивлениях R_2 и R_3 одинаково и равно $I_3 R_3 = I_2 R_2$. Отсюда $I_2 = \frac{I_3 R_3}{R_2} = 0{,}75$ А. Тогда по первому правилу Кирхгофа $I_1 = I_2 + I_3 = 1{,}25$ А. Напряжение в цепи $U = I_1 R_{общ}$, где $R_{общ} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1$. $U = I \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 275$ В.

22.38. Какое количество лампочек, рассчитанных на 6,3 В, надо взять для елочной электрогирлянды, чтобы ее можно было включить в сеть с напряжением 220 В?

Ответ: 35 штук.

Решение. Лампочки соединены между собой последовательно. Их количество $N = U/U_0$, где $U_0 = 6{,}3$ В — падение напряжения на одной лампочке. $N = 35$.

22.39. В сеть с напряжением $U = 24$ В подключили два последовательно соединенных резистора. При этом сила тока стала равной $I_1 = 0{,}60$ А. Когда резисторы подключили параллельно, суммарная сила тока стала равною $I_2 = 3{,}2$ А. Определите сопротивление резисторов.

Ответ: $R_1 = 30$ Ом; $R_2 = 10$ Ом.

Решение. $R_1 + R_2 = \frac{U}{I_1}$; $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{U}{I_2}$; $\frac{R_1R_2I_1}{U} = \frac{U}{I_2}$; $R_1 = \frac{U}{I_1} - R_2$,

тогда $I_1I_2R_2^2 - I_2UR_2 + U^2 = 0$, а $R_{1,2} = \frac{I_2U \pm \sqrt{I_2^2U^2 - 4I_1I_2U^2}}{2I_1I_2}$;

$R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 10$ Ом.

22.40. При последовательном подключении к сети двух проводников сила тока в 6,25 раза меньше, чем при параллельном подключении этих проводников. Во сколько раз отличаются сопротивления проводников?

Ответ: В 4 раза.

Решение. $R_1 + R_2 = \frac{U}{I_1}$; $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{U}{I_2}$; $\frac{(R_1+R_2)^2}{R_1R_2} = \frac{I_2}{I_1} = 6{,}25$;

$\frac{R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2}{R_1R_2} = 6{,}25$; $\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} = 4{,}25$. Обозначим $\frac{R_2}{R_1} = x$, тогда $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{x}$. Получим уравнение $x^2 - 4{,}25x + 1 = 0$. $x = 0{,}25$, тогда $\frac{R_2}{R_1} = 0{,}25$, а $\frac{R_1}{R_2} = 4$.

22.41. Электрическая цепь составлена из трех проводников одинаковой длины и сделанных из одного материала. Проводник сечением $S_1 = 3$ мм² соединен последовательно с параллельно соединенными проводниками сечениями $S_2 = 2$ мм² и $S_3 = 4$ мм². Разность потенциалов на концах цепи $U = 12$ В. Сила тока, текущего через проводник сечением S_1, равна $I_1 = 1$ А. Определите сопротивление каждого проводника, силу тока, текущего через каждый проводник, и падение напряжения на каждом проводнике.

Ответ: $R_1 = 8$ Ом; $I_1 = 1$ А; $U_1 = 8$ В.
$R_2 = 12$ Ом; $I_2 = 1/3$ А; $U_2 = 4$ В.
$R_3 = 6$ Ом; $I_3 = 2/3$ А; $U_3 = 4$ В.

Решение. $R_{общ} = \frac{\rho l}{S_1} + \frac{\rho^2 l^2 S_2S_3}{S_2S_3\rho l(S_2+S_3)} = \frac{\rho l(S_1+S_2+S_3)}{S_1(S_2+S_3)}$. Сила тока в цепи $I = I_1 = \frac{US_1(S_2+S_3)}{\rho l(S_1+S_2+S_3)}$ или $I_1 = \frac{U(S_2+S_3)}{R_1(S_1+S_2+S_3)}$, откуда

$R_1 = \frac{U(S_2+S_3)}{I_1(S_1+S_2+S_3)} = 8$ Ом. $U_2 = U_3 = U - I_1R_1 = 4B$. $I_2 + I_3 = I_1$;

$\frac{I_2}{I_3} = \frac{S_2}{S_3}$. Откуда следует $I_2 = \frac{1}{3}$А; $I_3 = \frac{2}{3}$А. $R_2 = \frac{U_2}{I_2} = 12$ Ом;

$R_3 = \frac{U_3}{I_3} = 6$ Ом.

22.42. Электрическая плитка подключена к сети с напряжением $U_0 = 220$ В с помощью проводов, имеющих сопротивление $r = 5$ Ом, при этом напряжение на плитке равно $U_1 = 210$ В. Чему будет равно напряжение на плитке, если к ней подключить параллельно такую же плитку?

Ответ: $U_2 = 200$ В.

Решение. Сила тока в цепи $I_1 = \frac{U_0 - U_1}{r} = 2$ А. Сопротивление плитки $R_1 = \frac{U_1}{I} = 105$ Ом. Две параллельно соединенные плитки имеют $R_2 = R_1/2 = 52{,}5$ Ом. Сила тока в цепи с двумя плитками $I_2 = \frac{U_0}{R_2 + r}$. Напряжение на плитках $U_2 = \frac{U_0}{R_2 + r} \cdot R_2 = 200$ В.

23. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ ЦЕПИ

23.1. К батарейке с ЭДС $\mathcal{E} = 3$ В подключили резистор сопротивлением $R = 20$ Ом. Падение напряжения на резисторе оказалось $U = 2$ В. Определите ток короткого замыкания.

Ответ: $I_{к.з.} = 0{,}3$ А.

Решение. Из закона Ома для участка и для замкнутой цепи $I = \dfrac{U}{R}$ и $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R + r}$ соответственно. Очевидно, $\dfrac{U}{R} = \dfrac{\mathscr{E}}{R + r}$, откуда $r = \dfrac{\mathscr{E}R - UR}{U}$. $I_{\text{к.з.}} = \dfrac{\mathscr{E}}{r} = 0{,}3$ А.

23.2. Когда к источнику тока подключили резистор сопротивлением $R_1 = 5$ Ом, сила тока стала $I_1 = 1$ А, а когда подключили резистор сопротивлением $R_2 = 15$ Ом, то $I_2 = 0{,}5$ А. Определите ЭДС источника тока и его внутреннее сопротивление.

Ответ: $\mathscr{E} = 10$ В, $r = 5$ Ом.

Решение. $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{R_1 + r}$ и $I_2 = \dfrac{\mathscr{E}}{R_2 + r}$. Решая совместно эти уравнения, получим $\mathscr{E} = \dfrac{I_1 I_2 \cdot (R_2 - R_1)}{I_1 - I_2} = 10$ В и $r = \dfrac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} = 5$ Ом.

23.3. Из условия предыдущей задачи найдите ток короткого замыкания.

Ответ: $I_{\text{к.з.}} = 2$ А.

Решение. См. решение предыдущей задачи. $I_{\text{к.з.}} = \dfrac{\mathscr{E}}{r} = 2$ А.

23.4. Цепь состоит из аккумулятора с внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом и нагрузки $R = 15$ Ом. При подключении к нагрузке некоторого резистора параллельно, а затем последовательно, ток через резистор не меняется (рис. 23.1). Чему равно сопротивление резистора?

Ответ: $R_x = 45$ Ом.

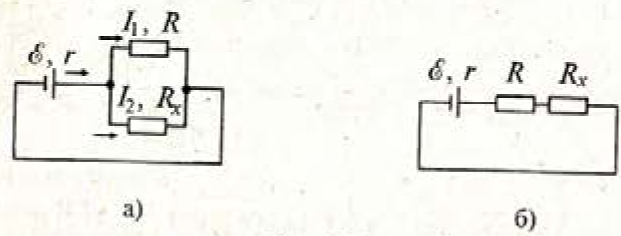


Рис. 23.1

Решение. При параллельном подключении резистора $I = \dfrac{\mathscr{E}}{r + \dfrac{RR_x}{R + R_x}}$, $I_1 R = I_2 R_x$, а $I = I_1 + I_2$. При последовательном соединении —

$I_2 = \dfrac{\mathscr{E}}{R + R_x + r}$. Тогда $\left(\dfrac{\mathscr{E}}{r + \dfrac{RR_x}{R + R_x}} - \dfrac{\mathscr{E}}{R + R_x + r} \right) R = \dfrac{\mathscr{E}}{R + R_x + r} R_x$, откуда $R_x = \dfrac{R^2}{r} = 45$ Ом.

23.5. К генератору подключено $n = 100$ ламп, соединенных параллельно, имеющих сопротивление $R = 1{,}2$ кОм каждая. Напряжение на лампах $U = 220$ В. Внутреннее сопротивление генератора $r = 6$ Ом. Определите ЭДС генератора.

Ответ: $\mathscr{E} = 0{,}33$ кВ.

Решение. $I = \dfrac{\mathscr{E}}{r + \dfrac{R}{n}}$. Напряжение на лампочках $U = I\dfrac{R}{n} = \dfrac{\mathscr{E}}{r + \dfrac{R}{n}} \cdot \dfrac{R}{n}$.

Откуда $\mathscr{E} = U\left(1 + \dfrac{rn}{R}\right) = 0{,}33$ кВ.

23.6. К источнику тока с ЭДС $\mathscr{E} = 200$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом подключены последовательно два резистора с сопротивлениями $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 500$ Ом. К концам резистора R_2 подключен вольтметр (рис. 23.2). Найдите сопротивление R вольтметра, если он показывает напряжение $U = 160$ В.

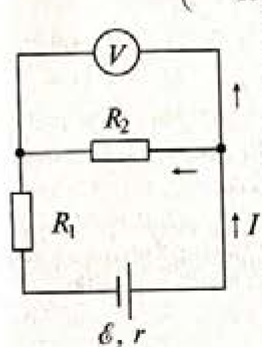


Рис. 23.2

Ответ: $R = 2{,}05$ кОм.

Решение. Падение напряжения на резисторе R_2 (и на вольтметре) $U = IR_0$, где $R_0 = \dfrac{R_2 R_V}{R_2 + R_V}$. Сила тока в цепи $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R_1 + R_0 + r}$.

Решив систему трех уравнений, получим $R = \dfrac{U(R_1 + r)R_2}{\mathscr{E}R_2 - U(R_1 + R_2 + r)} = 2{,}05$ кОм.

23.7. К источнику с напряжением $U = 12$ В подключили электрическую цепь, показанную на рис. 23.3. Каковы показания амперметра, если $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом.

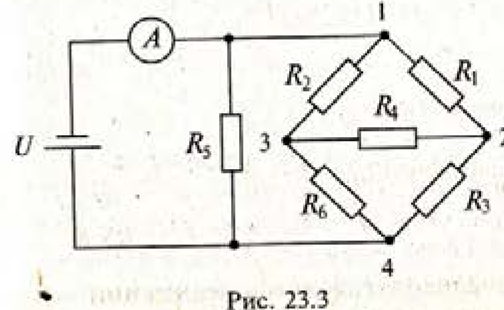


Рис. 23.3

Ответ: $I = 6{,}9$ А.

Решение. Так как $\frac{R_2}{R_6}=\frac{2}{6}$; $\frac{R_1}{R_3}=\frac{1}{3}$, то $U_{23}=0$, т. е. $I_4=0$, поэтому R_4 можно исключить. Сопротивление цепи равно

$$R=\frac{R_5(R_1+R_3)(R_2+R_6)}{R_5(R_1+R_3)+R_5(R_2+R_6)+(R_1+R_3)(R_2+R_6)}=\frac{40}{23}\ \text{Ом}.$$

Показания амперметра $I=\frac{U}{R}=6{,}9$ А.

23.8. Определите падение напряжения на резисторах и источнике тока, а также силы токов через них, если $R_1=6$ Ом, $R_2=12$ Ом, $R_3=5$ Ом, $r=3$ Ом, $\mathcal{E}=12$ В (рис. 23.4).

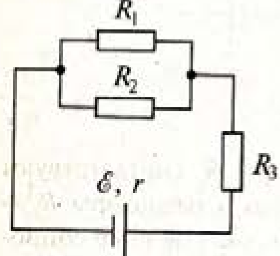


Рис. 23.4

Ответ: $I_r=I_3=1$ А, $I_1=0{,}67$ А, $I_2=0{,}33$ А, $U_3=5$ В, $U_1=U_2=4$ В, $U_\mathcal{E}=9$ В.

Решение. $I_r=I_3=\dfrac{\mathcal{E}}{r+R_3+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}=1$ А;

$U_3=I_3R_3=5$ В;

$U_\mathcal{E}=\mathcal{E}-I_r\cdot r=9$ В; $U_1=U_2=U_\mathcal{E}-U_3=4$ В;

$I_1=U_1/R_1=0{,}67$ А; $I_2=I_3-I_1=0{,}33$ А.

23.9. В цепь, питаемую источником тока с внутренним сопротивлением $r=3$ Ом, входят два резистора с сопротивлениями $R_1=R_2=28$ Ом, включенные параллельно, и резистор с сопротивлением $R_3=40$ Ом, включенный последовательно. Параллельно резистору R_3 подключен конденсатор емкости $C=5$ мкФ, заряд которого $q=4{,}2$ Кл (рис. 23.5). Найдите ЭДС $\mathcal{E}$ источника.

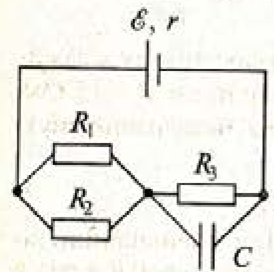


Рис. 23.5

Ответ: $\mathcal{E}=1{,}2$ В.

Решение. Падение напряжения на резисторе R_3: $U=\frac{q}{C}=I_3R_3$, откуда $I_3=\frac{q}{R_3C}$. Так как ток через конденсатор не течет, то $I=I_3$, а $\mathcal{E}=IR=$

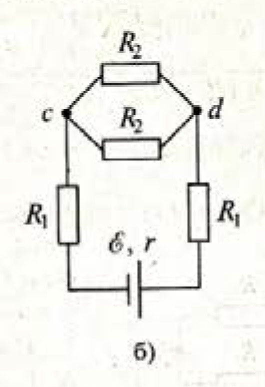
$$=\frac{q}{R_3C}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3+r\right)=1{,}2\ \text{В}.$$

23.10. Проволока из нихрома изогнута в виде кольца радиусом $a=1$ м. В центре кольца помещен гальванический элемент с ЭДС $\mathcal{E}=2$ В и внутренним сопротивлением $r=1{,}5$ Ом. Элемент соединен с точками c и d кольца по диаметру с помощью такой же нихромовой проволочки (рис. 23.6а). Найдите разность потен-

циалов между точками c и d. Удельное сопротивление нихрома $\rho=1{,}1$ мкОм · м, площадь сечения проволоки $S=1$ мм^2.

Ответ: $U_{cd}=0{,}64$ В.

а)



б)

Рис. 23.6

Решение. В эквивалентной схеме резисторы R_1 соответствуют проволокам, соединяющим элемент с кольцом, а резисторы R_2 — двум половинкам кольца (см. рис. 23.6б). Полное внешнее сопротивление цепи $R=2R_1+\frac{R_2}{2}$, где $R_1=\frac{\rho a}{S}$ и $R_2=\frac{\rho\pi a}{S}$. Ток в общей цепи $I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}$. $U_{cd}=\frac{IR_2}{2}=\frac{\mathcal{E}R_2}{4R_1+R_2+2r}=\dfrac{\mathcal{E}\pi}{4+\pi+\dfrac{2rS}{\rho a}}=0{,}64$ В.

23.11. Когда параллельно конденсатору, подключенному к зажимам батареи, подключили резистор сопротивлением $R=15$ Ом, заряд на конденсаторе уменьшился в $n=1{,}2$ раза. Чему равно внутреннее сопротивление батареи?

Ответ: $r=3$ Ом.

Решение. Заряд на конденсаторе $q=C\mathcal{E}$. При уменьшении заряда в n раз, напряжение на конденсаторе уменьшилось в n раз и стало равным $U=\frac{\mathcal{E}}{n}$. Так как $I_c=0$, то $I=I_R=\frac{U}{R}=\frac{\mathcal{E}}{nR}$. Из закона Ома $I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}$. Откуда $r=R(n-1)=3$ Ом.

23.12. Три сопротивления $R_1=R_3=40$ Ом, $R_2=80$ Ом соединены параллельно, последовательно с ними подсоединены сопротивление $R_4=34$ Ом и источник тока с ЭДС $\mathcal{E}=100$ В. Найдите силу тока в сопротивлении R_2 и падение напряжения на нем. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

Ответ: $I_2=0{,}4$ А, $U_2=32$ В.

Решение. Сила тока в цепи $I = \mathscr{E}/R$,

где $R = \dfrac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} + R_4 = 50$ Ом. $U_4 = IR_4$,

$U_2 = \mathscr{E} - U_4 = \mathscr{E} - IR_4 = 32$ В. $I_2 = U_2/R_2 = 0{,}4$ А.

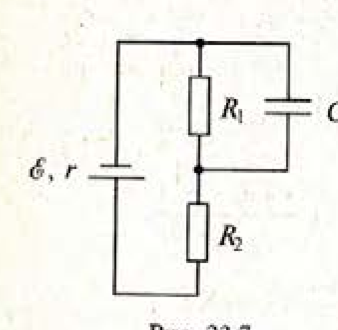


Рис. 23.7

23.13. Какова должна быть ЭДС батареи в схеме, изображенной на рис. 23.7, чтобы напряженность поля в плоском конденсаторе была $E = 2$ кВ/м? Сопротивление $r = R_1 = R_2$. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 5$ мм.

Ответ: $\mathscr{E} = 30$ В.

Решение. Напряжения на параллельно соединенных R_1 и конденсаторе равны. $IR_1 = Ed$, $I = \dfrac{\mathscr{E}}{3R}$. Тогда $\mathscr{E} = 3Ed = 30$ В.

23.14. Источник тока с ЭДС $\mathscr{E} = 15$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом замкнут на резистор с сопротивлением $R = 10$ Ом. К зажимам источника подключен конденсатор емкости $C = 1$ мкФ. Найдите заряд на конденсаторе.

Ответ: $q = 10$ мкКл.

Решение. Заряд на конденсаторе $q = CU = CIR = \dfrac{C\mathscr{E}R}{R + r} = 10$ мкКл.

23.15. Определите заряд на конденсаторе емкостью $C = 1$ мкФ, включенном в цепь, показанную на рис. 23.8. ЭДС источника тока $\mathscr{E} = 6$ В, внутреннее сопротивление $r = 5$ Ом, $R_1 = R_2 = R_3 = 20$ Ом.

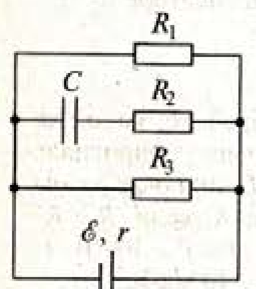


Рис. 23.8

Ответ: $q = 4$ мкКл.

Решение. Через R_2 как и через конденсатор ток не течет. Сила тока в цепи $I = \dfrac{\mathscr{E}}{\frac{R}{2} + r}$. Напряжение на полюсах источника $U = I \cdot \dfrac{R}{2} = \dfrac{\mathscr{E}R}{R + 2r}$. Заряд на конденсаторе $q = CU = 4$ мкКл.

23.16. Определите заряд на конденсаторе $C = 15$ мкФ в схеме, показанной на рис. 23.9. $R_1 = R_3 = R_4 = 12$ Ом, $R_2 = R_5 = 18$ Ом, ЭДС источника тока $\mathscr{E} = 7{,}5$ В, внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом.

Ответ: $q = 21$ мкКл.

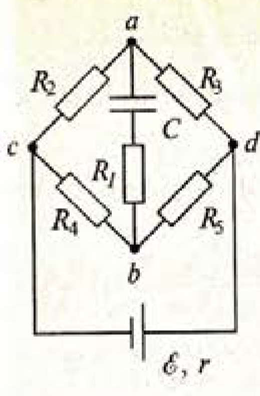


Рис. 23.9

Решение. Через R_1 и C ток не течет.

Сила тока в цепи $I = \dfrac{\mathscr{E}}{\frac{R}{2} + r} = \dfrac{2\mathscr{E}}{R + 2r}$, где

$R = R_2 + R_3 = R_4 + R_5$. То есть $I = \dfrac{2\mathscr{E}}{R_2 + R_3 + 2r}$.

В узле c сила тока делится на две равные части. $\varphi_A = \dfrac{I}{2}R_2$, $\varphi_B = \dfrac{I}{2}R_4 = \dfrac{I}{2}R_3$, тогда

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{I}{2}(R_2 - R_3) = \frac{\mathscr{E}(R_2 - R_3)}{R_2 + R_3 + 2r}.$$

Заряд на конденсаторе $q = \dfrac{C \cdot \mathscr{E}(R_2 - R_3)}{R_2 + R_3 + 2r} = 21$ мкКл.

23.17. Определите заряд на конденсаторе, включенном в цепь, показанную на рис. 23.10, если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 20$ Ом, $\mathscr{E} = 100$ В, $r = 10$ Ом и $C = 10$ мкФ.

Ответ: $q = 0{,}28$ мКл.

Решение. При замкнутом ключе через R_2 и C ток не течет. Сила тока в цепи $I = \dfrac{\mathscr{E}}{\frac{2}{3}R + r} = \dfrac{3\mathscr{E}}{2R + 3r}$. $U_{ab} = I \cdot \dfrac{2}{3}R = \dfrac{2\mathscr{E}R}{2R + 3r}$. Так как

$I = I_1 + I_2$, а $I_1R_1 = I_2(R_2 + R_3)$, то $I_2 = \dfrac{1}{3}I = \dfrac{\mathscr{E}}{2R + 3r}$.

Тогда $\varphi_d = U_{ab} - I_2R = \dfrac{\mathscr{E}R}{2R + 3r}$, а заряд на конденсаторе

$q = \dfrac{\mathscr{E}R}{2R + 3r} \cdot C = 0{,}28 \cdot 10^{-3}$ Кл $= 0{,}28$ мКл.

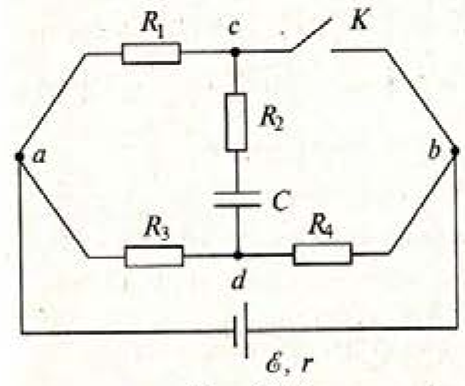


Рис. 23.10

23.18. Определите, какой заряд пройдет через сопротивление R_1 (рис. 23.10) после размыкания ключа K, если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 20$ Ом, $\mathscr{E} = 100$ В, $r = 10$ Ом и $C = 10$ мкФ.

Ответ: $\Delta q = 0{,}12$ мКл.

Решение. См. задачу 23.17. После размыкания ключа ток идет по контуру, состоящему из источника тока и сопротивлений R_3 и R_4. Сила тока в цепи

$I = \frac{\mathcal{E}}{2R+r}$, $\varphi_c' = \frac{\mathcal{E}}{2R+r}\cdot R$, а заряд на конденсаторе $q' = \frac{\mathcal{E}R}{2R+r}\cdot C = 0{,}4\cdot 10^{-3}$ Кл $= 0{,}4$ мКл. Это значит, что через сопротивление R_1 пройдет заряд $\Delta q = |q - q'| = 0{,}12$ мКл.

23.19. Определите разность потенциалов между точками a и b в цепи, изображенной на рис. 23.11.

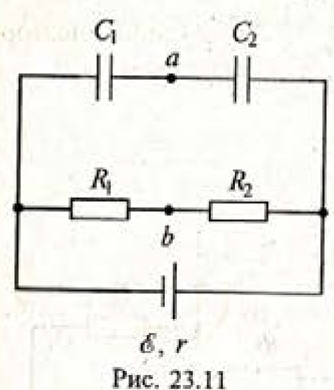


Рис. 23.11

Ответ: $\varphi_a - \varphi_b = \frac{\mathcal{E}(R_2C_2 - R_1C_1)}{(C_1+C_2)(R_1+R_2+r)}$.

Решение. Так как заряд на конденсаторах один и тот же, то $C_1U_1 = C_2U_2$, а напряжение на клеммах источника $U = U_1 + U_2$. Откуда $U_1 = \frac{UC_2}{C_1+C_2}$, где

$$U = I(R_1+R_2) = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2+r}(R_1+R_2).$$

$$\varphi_a = U_1 = \frac{\mathcal{E}(R_1+R_2)C_2}{(C_1+C_2)(R_1+R_2+r)},$$

$\varphi_b = IR_1 = \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1+R+r}$. $\quad \varphi_a - \varphi_b = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2+r}\left(\frac{(R_1+R_2)C_2}{C_1+C_2} - R_1\right) =$

$$= \frac{\mathcal{E}(R_2C_2 - R_1C_1)}{(C_1+C_2)(R_1+R_2+r)}.$$

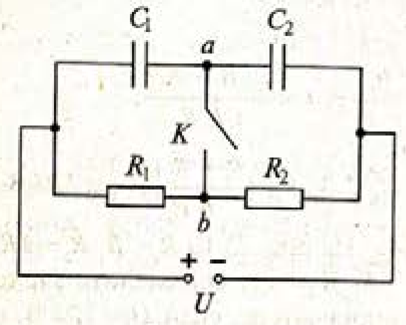


Рис. 23.12

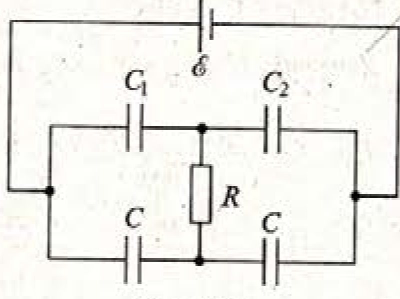


Рис. 23.13

23.20. Найдите разность потенциалов между точками a и b (рис. 23.12) до замыкания ключа.

Ответ: $\varphi_a - \varphi_b = U\left(\frac{R_1}{R_1+R_2} - \frac{C_2}{C_1+C_2}\right)$.

Решение самостоятельное.

23.21. Найдите напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах с емкостями C_1 и C_2 (рис. 23.13).

Ответ: $U_1 = \frac{(C_1+C_2)\mathcal{E}}{C_1+C_2+2C}$, $U_2 = \frac{(C+C_1)\mathcal{E}}{C_1+C_2+2C}$.

Указание. Точки, между которыми включен резистор, можно соединить.

23.22. Найдите напряжения U_1, U_2 и U_3 на каждом конденсаторе (рис. 23.14).

Ответ: $U_1 = 0$, $U_2 = U_3 = \mathcal{E}$.

Решение самостоятельное.

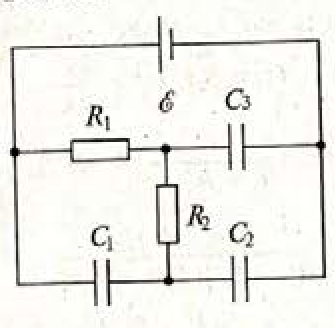


Рис. 23.14

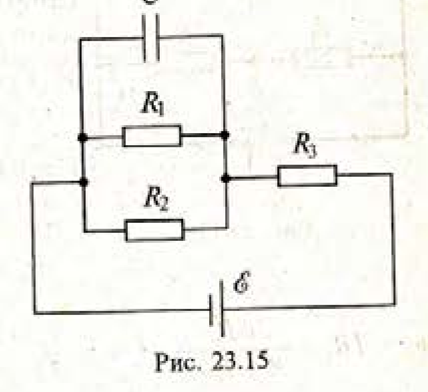


Рис. 23.15

23.23. На рис. 23.15 $R_1 = R_2 = 50$ Ом, $R_3 = 100$ Ом, $C = 50$ пФ. Определите $\mathcal{E}$ источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением. Заряд на конденсаторе $q = 2{,}2$ мкКл.

Ответ: $\mathcal{E} = 220$ В.

Решение. $U = U_C = \frac{q}{C}$, $U = I\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, $I = \frac{q(R_1+R_2)}{CR_1R_2}$,

$$U_3 = IR_3 = \frac{q(R_1+R_2)R_3}{CR_1R_2},\quad \mathcal{E} = U + U_3 = \frac{q}{C}\left(1 + \frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1R_2}\right) = 220 \text{ В}.$$

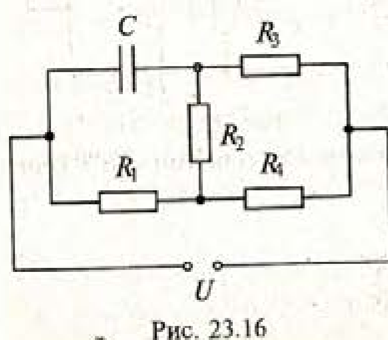


Рис. 23.16

23.24. На рис. 23.16 $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$, $R_4 = 4R$. Определите заряд на конденсаторе, если $U_0 = 220$ В, а $C = 29$ мкФ.

Ответ: $q = 3{,}74$ мКл.

Решение. $I_0 = I_1 + I_2 + I_4$, $I_2 = I_3$;

$R_{23} = R_2 + R_3 = 5R$,

$R_{234} = \frac{R_{23}R_4}{R_{23}+R_4} = \frac{20}{9}R$,

$R_0 = R_1 + R_{234} = \frac{29}{9}R,\quad I_0 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{9U_0}{29R_0},\quad I_2R_{23} = I_4R_4;\ I_4 = \frac{5}{4}I_2,$

$I_2 + I_4 = I_2 + \frac{5}{4}I_2 = \frac{9}{4}I_2 = I_0,\ \frac{9}{4}I_2 = \frac{9}{29}\cdot\frac{U_0}{R},\ I_2 = \frac{4}{29}\cdot\frac{U_0}{R},$

$U_C = I_1R_1 + I_2R_2 = \frac{17}{29}U_0;\ q = CU_C = \frac{17}{29}U_0C = 3{,}74$ мКл.

23.25. Определите разность потенциалов между точками a и b в цепи, изображенной на рис. 23.17. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Ответ: $\varphi_b = \varphi_a = \mathcal{E}/3$.

Решение. См. решение задачи 23.19. $\varphi_b - \varphi_a = \frac{\mathcal{E}(4RC - RC)}{3C\cdot 4R} = \frac{\mathcal{E}}{3}$.

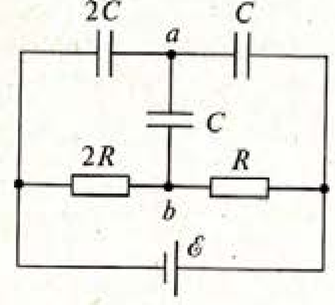


Рис. 23.17

Рис. 23.18.

23.26. Определите разность потенциалов между точками a и b (рис. 23.18). ЭДС источников тока $\mathcal{E}_1 = 1$ В и $\mathcal{E}_2 = 1{,}3$ В, внутренние сопротивления $r_1 = 3$ Ом и $r_2 = 5$ Ом, внешнее сопротивление $R = 7$ Ом.

Ответ: $\varphi_a - \varphi_b = 1{,}2$ В.

Решение. $\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_2 - Ir_2$, где $I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R + r_1 + r_2}$ — сила тока в цепи. $\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_2 - \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)r_2}{R + r_1 + r_2} = 1{,}2$ В.

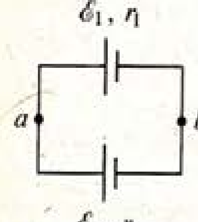


Рис. 23.19

23.27. Какое сопротивление R надо подключить между точками a и b, чтобы ток через батарею с ЭДС $\mathcal{E}_2 = 4$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 3$ Ом был равен нулю (рис. 23.19)? $\mathcal{E}_1 = 6$ В, $r_1 = r_2$.

Ответ: $R = 6$ Ом.

Решение. Ток через $\mathcal{E}_2$ будет равен нулю при условии $\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_2$. Напряжение на искомом сопротивлении $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = IR = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}R$ или $\frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}R = \mathcal{E}_2$. Откуда $R = \frac{r_1\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} = 6$ Ом.

23.28. Два элемента соединены параллельно. $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, внутренние сопротивления их равны. Определите разность потенциалов между зажимами элементов.

Ответ: $U = 3$ В.

Решение. Напряжение на зажимах элементов $U = \mathcal{E}_2 - Ir$ и $U = \mathcal{E}_1 + Ir$. Откуда $U = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/2 = 3$ В.

23.29. Два источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1{,}5$ В и $\mathcal{E}_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}5$ Ом и $r_2 = 1$ Ом соединены параллельно. Определите ЭДС полученного источника тока (напряжения на клеммах источника). Какой силы ток течет через сопротивление $R = 3$ Ом, если его подключить к клеммам источников?

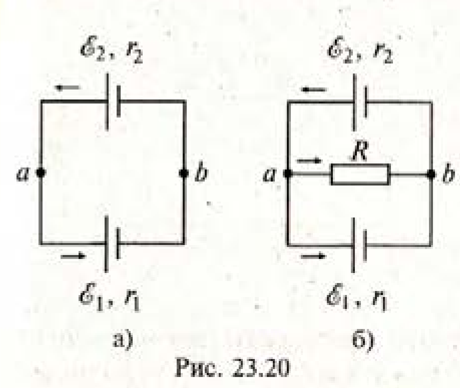


Рис. 23.20

Ответ: $\mathcal{E} = \frac{5}{3}$ В; $I = 0{,}5$ А.

Решение. Так как $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$, то ток будет направлен, как показано на рис. 23.20а и равен $I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{r_1 + r_2}$.

$\mathcal{E} = U_{ab} = \mathcal{E}_1 + Ir_1 = \frac{\mathcal{E}_1r_2 + \mathcal{E}_2r_1}{r_1 + r_2} = \frac{5}{3}$ В. Если к клеммам источников подключить сопротивление R (рис. 23.20б), то, применив правила Кирхгофа, получим систему уравнений: $\begin{cases} I_2 = I + I_1 \\ \mathcal{E}_2 = I_2r_2 + IR. \\ \mathcal{E}_1 = IR - I_1r_1 \end{cases}$

Решив эту систему, получим $I = \frac{\mathcal{E}_2r_1 + \mathcal{E}_1r_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)} = 0{,}5$ А.

23.30. Четыре элемента с внутренним сопротивлением 0,8 Ом и ЭДС 2 В каждый соединены вначале последовательно, а затем параллельно и замкнуты сопротивлением 4,8 Ом. Найдите силу тока в цепи в каждом случае.

Ответ: $I_1 = 1$ А, $I_2 = 0{,}4$ А.

Решение. При последовательном соединении источников $I_1 = \frac{n\mathcal{E}_1}{R + nr_1} = 1$ А. При параллельном $I_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{R + \frac{r_1}{n}} = 0{,}4$ А.

23.31. Определите ЭДС трех параллельно соединенных источников тока. $\mathcal{E}_1 = 1$ В; $\mathcal{E}_2 = 1{,}5$ В; $\mathcal{E}_3 = 2$ В; $r_1 = 1$ Ом; $r_2 = 1{,}5$ Ом; $r_3 = 2$ Ом.

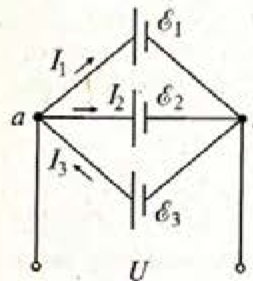


Рис. 23.21

Ответ: $\mathcal{E} = 4/3$ В.

Решение. Так как $\mathcal{E}_3 > \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$, то ток будет течь так, как показано на рис. 23.21. По правилам Кирхгофа: $I_3 = I_1 + I_2$, $\mathcal{E}_1 = U - I_1r_1$, $\mathcal{E}_2 = U - I_2r_2$, $\mathcal{E}_3 = U + I_3r_3$. Очевидно, $I_1 = \frac{U - \mathcal{E}_1}{r_1}$, $I_2 = \frac{U - \mathcal{E}_2}{r_2}$, $I_3 = \frac{\mathcal{E}_3 - U}{r_3}$.

Тогда $\frac{\mathcal{E}_3 - U}{r_3} = \frac{U - \mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{U - \mathcal{E}_2}{r_2}$, откуда $U = \frac{\mathcal{E}_3 r_1 r_2 + \mathcal{E}_1 r_2 r_3 + \mathcal{E}_2 r_1 r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3} = \frac{4}{3}$ В.

23.32. Три одинаковых батареи с внутренним сопротивлением $r = 6$ Ом замкнули, один раз соединив параллельно, а другой раз — последовательно на некоторое сопротивление. При этом сила тока в обоих случаях была одинакова. Определите внешнее сопротивление.

Ответ: $R = r = 6$ Ом.

Решение. При параллельном соединении источников $I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{\frac{r}{n} + R}$, при последовательном соединении источников $I_2 = \frac{n\mathcal{E}_1}{nr + R}$. Так как $I_1 = I_2$, то $\frac{n\mathcal{E}_1}{r + nR} = \frac{n\mathcal{E}_1}{nr + R}$. При $n = 3$ очевидно $R = r = 6$ Ом.

23.33. Два элемента с ЭДС равными 2 В и 1,5 В и внутренними сопротивлениями $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом соединены параллельно. Внешнее сопротивление $R = 2$ Ом также подключено параллельно к этой батарее. Найдите силу тока I_1, I_2 в каждом элементе и во внешней части цепи I. Какова будет сила тока во внешней части цепи I, если второй элемент выключить?

Ответ: $I_1 = 0{,}89$ А; $I_2 = 0{,}11$ А; $I = 0{,}78$ А; $I' = 0{,}8$ А.

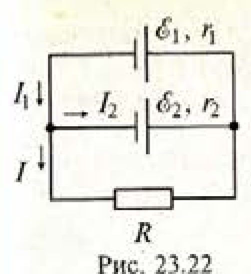


Рис. 23.22

Решение. Направления токов указаны на рис. 23.22. $U = \mathcal{E}_1 - I_1r_1$, $U = \mathcal{E}_2 + I_2r_2$, $U = IR$, $I = I_1 - I_2$, $r_1 = r_2$. $I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{2R + r} = 0{,}78$ А; $I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{r} = 0{,}89$ А; $I_2 = I_1 - I = 0{,}11$ А. Если убрать $\mathcal{E}_2$, сила тока $I' = \frac{\mathcal{E}_1}{R + r} = 0{,}8$ А.

23.34. Несколько одинаковых источников тока соединены последовательно и замкнуты накоротко. Определите напряжение на источнике тока.

Ответ: $U = 0$.

Решение. По закону Ома ток в цепи $I = \frac{n\mathcal{E}}{nr} = \frac{\mathcal{E}}{r}$. Пусть участок между выбранными точками содержит m элементов, тогда $U = m\mathcal{E} - mrI = m\mathcal{E} - mr\frac{\mathcal{E}}{r} = m\mathcal{E} - m\mathcal{E} = 0$.

23.35. Два элемента с $\mathcal{E}_1 = 1{,}5$ В и $\mathcal{E}_2 = 2$ В соединены одинаковыми полюсами. Вольтметр, подключенный к клеммам батареи, показал напряжение $U = 1{,}7$ В. Определите отношение внутренних сопротивлений.

Ответ: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $Ir_1 = U - \mathcal{E}_1$, $Ir_2 = \mathcal{E}_2 - U$. Откуда $\frac{r_1}{r_2} = \frac{U - \mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2 - U} = \frac{2}{3}$.

23.36. Два аккумулятора $\mathcal{E}_1 = 1{,}3$ В, $\mathcal{E}_2 = 2$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0{,}1$ Ом и $r_2 = 0{,}25$ Ом соединены параллельно. Найдите величину тока в цепи и напряжение на ее зажимах.

Ответ: $U = 1{,}5$ В, $I = 2$ А.

Указание. См. решение задач 23.28 и 23.35. Второй способ решения. По закону Ома $I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{r_1 + r_2} = 2$ А. $U = \mathcal{E}_2 - Ir_2 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} = 1{,}5$ В.

23.37. В цепь включены одинаковыми полюсами два гальванических элемента с $\mathcal{E}_1 = 1{,}9$ В и $\mathcal{E}_2 = 1{,}1$ В и с внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}1$ Ом и $r_2 = 0{,}8$ Ом. Элементы замкнуты на внешнее сопротивление $R = 10$ Ом. Чему равны токи I_1 и I_2, проходящие через элементы? Как велико напряжение U на сопротивлении R внешней цепи?

Ответ: $I_1 = 1{,}05$ А, $I_2 = 0{,}87$ А, $U = 1{,}8$ В.

Указание. См. решение задачи 23.28.

23.38. Даны два источника тока с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 4$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 2$ Ом и $\mathscr{E}_2 = 5$ В, $r_2 = 4$ Ом. При каком внешнем сопротивлении ток через это сопротивление не зависит от способа соединения элементов? Какую максимальную силу тока можно получить через резистор сопротивлением $R_1 = 12$ Ом?

Ответ: $R = 3$ Ом, $I_{max} = 0{,}5$ А.

Решение. При последовательном соединении источников $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2}$. При параллельном соединении (см. задачу 23.32) $I_2 = \dfrac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$. Приравняв эти выражения, найдем R. $R = \dfrac{\mathscr{E}_1 r_2^2 + \mathscr{E}_2 r_1^2}{\mathscr{E}_1 r_1 + \mathscr{E}_2 r_2} = 3$ Ом. Максимальная сила тока $I_{max} = \dfrac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{R_1 + r_1 + r_2} = 0{,}5$ А.

23.39. Три источника тока с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 1$ В, $\mathscr{E}_2 = 2$ В и $\mathscr{E}_3 = 3$ В и внутренними сопротивлениями соответственно $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом и $r_3 = 3$ Ом соединены последовательно и замкнуты накоротко. Определите силу тока в цепи и падение напряжения на каждом из источников. Чему равны сила тока и падение напряжения, если все три источника имеют одинаковую ЭДС, равную 2 В?

Ответ: $I = 1$ А, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, $I' = 1$ А, $U_1' = 1$ В, $U_2' = 0$, $U_3' = -1$ В.

Решение. Сила тока в цепи $I = \dfrac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3}{r_1 + r_2 + r_3} = 1$ А; $U_1 = \mathscr{E}_1 - Ir_1 = 0$; $U_2 = \mathscr{E}_2 - Ir_2 = 0$; $U_3 = \mathscr{E}_3 - Ir_3 = 0$. При $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3 = \mathscr{E} = 2$ В имеем: $I' = \dfrac{3\mathscr{E}}{r_1 + r_2 + r_3} = 1$ А; $U_1' = \mathscr{E} - I'r_1 = 1$ В; $U_2' = \mathscr{E} - I'r_2 = 0$; $U_3' = \mathscr{E} - I'r_3 = -1$ В.

23.40. Емкость одного аккумулятора $Q_0 = 50$ А · ч*. Определите емкость четырех таких аккумуляторов, включенных: а) последовательно; б) параллельно.

Ответ: а) 50 А · ч; б) 200 А · ч.

Решение. а) При последовательном соединении через все аккумуляторы течет один и тот же ток, поэтому все они разрядятся в течение одного и того же времени. Емкость батареи будет равна емкости каждого аккумулятора $Q_1 = Q_0 = 50$ А · ч.

б) При параллельном соединении n аккумуляторов через каждый из них течет $1/n$ часть общего тока, поэтому при том же разрядном токе в общей цепи батарея будет разряжаться в n раз дольше, чем один аккумулятор, т. е. емкость в n раз больше емкости одного аккумулятора $Q_2 = nQ_0 = 200$ А · ч.

* Емкостью аккумулятора называется заряд Q, который проходит по цепи при разрядке через нее заряженного аккумулятора, $Q = It$ и выражается в ампер-часах (А · ч).

23.41. Найдите емкость батареи аккумуляторов, включенных по схеме, изображенной на рис. 23.23. Емкость каждого аккумулятора $Q_0 = 64$ А · ч.

Рис. 23.23

Ответ: 192 А · ч.

Решение. Каждая группа из пяти аккумуляторов, включенных последовательно, имеет емкость $Q_1 = Q_0 = 64$ А · ч (см. предыдущую задачу). Три параллельно подключенные группы дают общую емкость батареи $Q_2 = 3Q_0 = 192$ А · ч.

23.42. Батарея из $n = 55$ аккумуляторов, соединенных последовательно, заряжается от динамомашины, дающей напряжение $U = 140$ В. Какое добавочное сопротивление нужно ввести в цепь, если внутреннее сопротивление каждого аккумулятора равно $r = 0{,}02$ Ом, $\mathscr{E} = 2{,}1$ В и заряжать их нужно током $I = 10$ А?

Ответ: $R_{доб} = 1{,}35$ Ом.

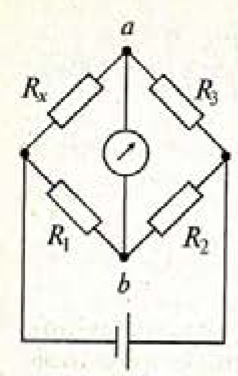
Указание. Приложенное напряжение должно равняться сумме $\mathscr{E}$ батареи (в данном случае — это противо-$\mathscr{E}$) и падения напряжения на сопротивлении всей цепи. $U = \mathscr{E}_п + I(r_п + R_{доб})$,

$$R_{доб} = \frac{U - \mathscr{E}_п}{I} - r_п = 1{,}35 \text{ Ом}.$$

23.43. Динамомашина дает $\mathscr{E}_1 = 12$ В. Ее внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}2$ Ом. Она заряжает аккумуляторную батарею с $\mathscr{E}_2 = 10$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0{,}6$ Ом. Параллельно батарее включена лампочка с сопротивлением $r_3 = 3$ Ом. Определите силу тока в батарее, в лампочке и в генераторе.

Ответ: $I_1 = 5{,}24$ А, $I_2 = 1{,}59$ А, $I_3 = 3{,}65$ А.

Указание. См. решение задачи 23.42. Напряжения на зажимах динамомашины, аккумулятора и лампочки равны между собой. $\mathscr{E}_1 - I_1 r_1 = \mathscr{E}_2 + I_2 r_2 = I_3 r_3$, где I_1, I_2, I_3 — токи в динамомашине, аккумуляторе и лампочке соответственно. Кроме того, $I_1 = I_2 + I_3$. Решив полученную систему уравнений, найдем $I_1 = 5{,}24$ А, $I_2 = 1{,}59$ А, $I_3 = 3{,}65$ А.



23.44. В цепи, представленной на рис. 23.24, гальванометр показывает отсутствие тока. Выразите R_x через R_1, R_2 и R_3.

Ответ: $R_x = \frac{R_1R_3}{R_2}$.

Решение. $I_г = 0$, следовательно, $\varphi_a = \varphi_b$. Гальванометр исключается из цепи. $U_x = U_1$, $U_2 = U_3$. Поскольку $\frac{U_x}{U_3} = \frac{R_x}{R_3}$, а $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$, получим

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2}, \text{ а } R_x = \frac{R_1R_3}{R_2}.$$

Рис. 23.24

23.45. На рис. 23.25 показана схема мостика Уитстона для измерения сопротивлений. R_0 — эталон сопротивления, R_x — неизвестное. Скользящий контакт D, соединенный с гальванометром, перемещается по проводу AB, имеющему большое сопротивление. Покажите, что при условии $\frac{R_x}{R_0} = \frac{l_1}{l_2}$ ток через гальванометр не течет. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

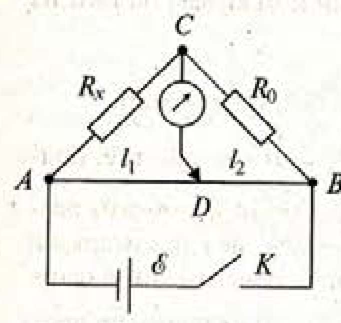


Рис. 23.25

Указание. См. решение задачи 23.44.

23.46. Мост для измерения сопротивлений сбалансирован так, что ток через гальванометр не течет (рис. 23.24). Ток в правой ветви $I_1 = 0,2$ А. Найдите напряжение на зажимах источника тока. $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 1$ Ом.

Ответ: $U = 0,5$ В.

Решение. См. решение задачи 23.44. $R_x = \frac{R_1R_3}{R_2}$. Тогда $U = U_1 + U_x$, где $U_1 = I_1R_1$, $U_x = I_1R_x$, $U = I_1(R_1 + R_x) = I_1\left(R_1 + \frac{R_1R_3}{R_2}\right) = I_1R_1\left(\frac{R_2 + R_3}{R_2}\right) = 0,5$ В.

23.47. Найдите силу тока I_1 через резистор с сопротивлением R_1 (рис. 23.26). $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 7$ Ом, $R = 2$ Ом, $\mathcal{E} = 30$ В, $r = 2$ Ом.

Ответ: $I_1 = 2$ А.

Указание. Резисторы составляют сбалансированный мост, что дает возможность исключить резистор R.

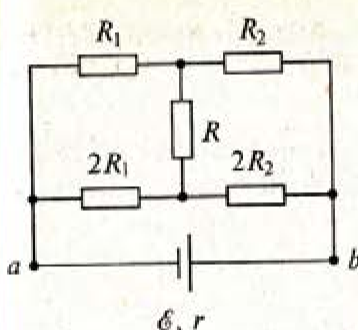


Рис. 23.26

$$R_{общ} = \frac{(R_1 + R_2)(2R_1 + 2R_2)}{R_1 + R_2 + 2R_1 + 2R_2} = \frac{2}{3}(R_1 + R_2);$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\frac{2}{3}(R_1 + R_2) + r};$$

$$U_{ab} = IR_{общ};\quad I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1 + R_2} = 2 \text{ А}.$$

23.48. Цепь из трех одинаковых последовательно соединенных элементов $\mathcal{E}$, с внутренним сопротивлением r замкнута накоротко (рис. 23.27). Какое напряжение покажет вольтметр, подключенный к зажимам одного из элементов?

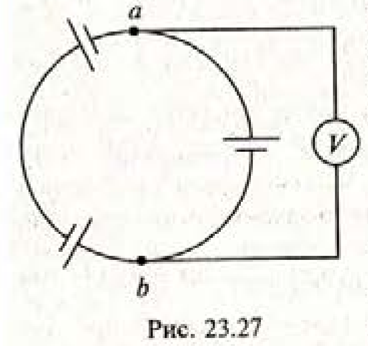


Рис. 23.27

Ответ: $U_{ab} = 0$.

Решение. Уберем вольтметр.

$I = \frac{3\mathcal{E}}{3r} = \frac{\mathcal{E}}{r}$. $U_{ab} = -Ir + \mathcal{E} = 0$, т. е. подключение вольтметра к точкам, разность потенциалов между которыми равна нулю, ничего не изменит в цепи.

23.49. Два элемента с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ включены в цепь последовательно. Внешнее сопротивление цепи $R = 5$ Ом. Отношение напряжения на зажимах первого элемента к напряжению на зажимах второго элемента равно 2/3. Найдите внутренние сопротивления элементов r_1 и r_2, если $r_1 = 2r_2$.

Ответ: $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 1$ Ом.

Решение. Напряжение на зажимах батареи аккумуляторов $U = IR$ или $U = U_1 + U_2 = \frac{5}{3}U_2$; $I = \frac{2\mathcal{E}}{R + 3r_2}$, $U_2 = \mathcal{E} - Ir_2$. Тогда $IR = \frac{5}{3}U_2$ или $\frac{2\mathcal{E}}{R+3r_2}\cdot R = \frac{5}{3}\left(\mathcal{E} - \frac{2\mathcal{E}}{R+3r_2}\cdot r_2\right)$, откуда $r_2 = R/5 = 1$ Ом, $r_1 = 2r_2 = 2$ Ом.

Рис. 23.28

23.50. Два элемента с $\mathcal{E}_1 = 4$ В и $\mathcal{E}_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0,25$ Ом и $r_2 = 0,75$ Ом

включены в схему, изображенную на рис. 23.28. $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $C = 2$ мкФ. Найдите заряд на конденсаторе.

Ответ: $q = 7$ мкКл.

Решение. Сопротивление R закорочено, ток через него не течет. Напряжение на конденсаторе $U = \mathcal{E}_1 - I(R_1 + r_1)$ или $U = \mathcal{E}_2 + I(R_2 + r_2)$.

Откуда $U = \dfrac{\mathcal{E}_1(R_2 + r_2) + \mathcal{E}_2(R_1 + r_1)}{r_1 + r_2 + R_1 + R_2}$, тогда

$$q = CU = C\frac{\mathcal{E}_1(R_2 + r_2) + \mathcal{E}_2(R_1 + r_1)}{r_1 + r_2 + R_1 + R_2} = 7 \text{ мкКл}.$$

23.51. Электрическая цепь состоит из батарей с ЭДС $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_x$ и резисторов с сопротивлениями R_1, R_2, R_3 (рис. 23.29). К участку цепи подключен вольтметр с большим внутренним сопротивлением. Найдите $\mathcal{E}_x$, при которой показания вольтметра не изменятся, если будет замкнут ключ. Внутренними сопротивлениями батареи пренебречь.

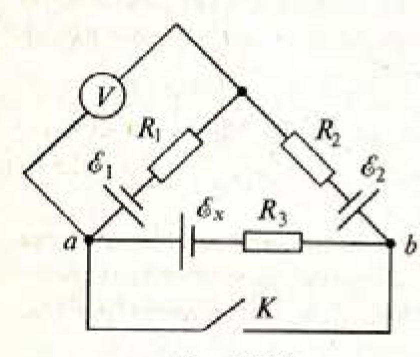


Рис. 23.29

Ответ: $\mathcal{E}_x = \dfrac{R_3(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}{R_1 + R_2}$.

Решение. Показание вольтметра не изменится, если при разомкнутом ключе напряжение на участке цепи ab, содержащем батарею $\mathcal{E}_x$, равно нулю $\mathcal{E}_x = \dfrac{\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3 = 0$, откуда $\mathcal{E}_x = \dfrac{R_3(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}{R_1 + R_2}$.

23.52. В схеме (рис. 23.30) $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 2{,}4$ В, $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 10$ Ом и $R_3 = 15$ Ом. Найдите силу тока для каждого участка цепи. Сопротивлением источников пренебречь.

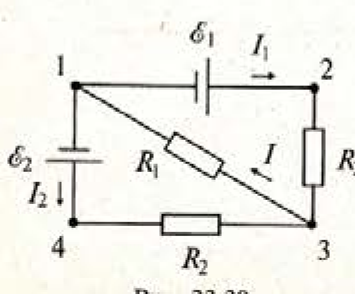


Рис. 23.30

Ответ: $I = 0{,}04$ А; $I_1 = 0$; $I_2 = 0{,}04$ А.

Решение. Запишем второе правило Кирхгофа для контуров

1—2—3—1: $\mathcal{E}_1 = I_1R_3 + IR_1$;

1—3—4—1: $\mathcal{E}_2 = I_2R_2 + IR_1$. Для узла 1 запишем первое правило Кирхгофа $I = I_1 + I_2$. Решив полученную систему из трех уравнений с тремя неизвестными, находим $I = \dfrac{\mathcal{E}_2R_3 + \mathcal{E}_1R_2}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} = 0{,}04$ А, $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}_1 - IR_1}{R_3} = 0$, $I_2 = I - I_1 = 0{,}04$ А.

23.53. Определите силы токов на всех участках мостика Уитстона, если $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 6$ Ом, $R_г = 2$ Ом, $\mathcal{E} = 2$ В, $r = 1$ Ом (рис. 23.31).

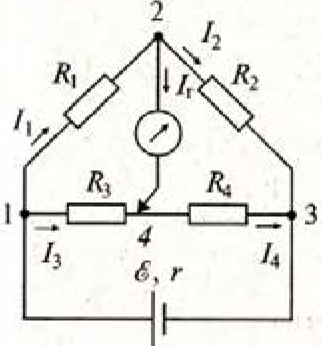


Рис. 23.31

Ответ: $I_1 = I_2 = 1{,}2$ А, $I_3 = I_4 = 0{,}4$ А, $I = 1{,}6$ А, $I_г = 0$.

Решение. Применим правила Кирхгофа для данной разветвленной цепи, выбрав направления токов.

Для узлов: Для контуров:

1: $I = I_1 + I_3$; 1—2—4—1: $I_1R_1 + I_гR_г - I_3R_3 = 0$;

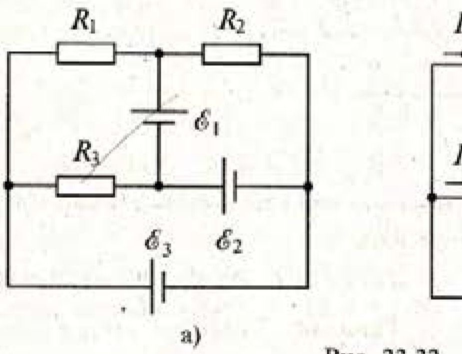
2: $I_1 = I_г + I_2$; 2—3—4—2: $I_2R_2 - I_4R_4 - I_гR_г = 0$;

4: $I_4 = I_3 + I_г$. 1—2—3—$\mathcal{E}$—1: $I_1R_1 - I_2R_2 + Ir = \mathcal{E}$.

Решив полученную систему шести уравнений с шестью неизвестными, найдем $I_1 = 1{,}2$ А, $I_2 = 1{,}2$ А, $I_3 = 0{,}4$ А, $I_4 = 0{,}4$ А, $I = 1{,}6$ А, $I_г = 0$.

23.54. На рис. 23.32а $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $\mathcal{E}_2 = 20$ В, $\mathcal{E}_3 = 40$ В, сопротивления $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом. Определить силу токов, протекающих через сопротивления (I) и через источники ЭДС (I'). Внутреннее сопротивление источников не учитывать.

Ответ: $I_1 = 1$ А, $I_2 = 3$ А, $I_3 = 2$ А, $I_1' = 2$ А, $I_2' = 0$, $I_3' = 3$ А.



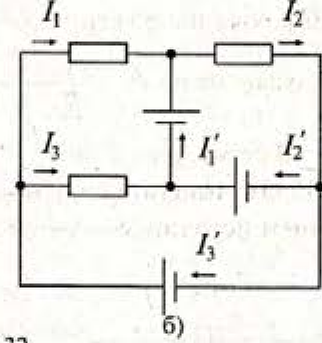


Рис. 23.32

Решение. Выберем направления токов (рис. 23.32б).

$$\begin{cases} I_3' = I_1 + I_3 \\ I_1 + I_1' = I_2 \\ I_3 + I_2' = I_1' \\ I_2 = I_2' + I_3' \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1R_3 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 \\ I_1R_1 + I_2R_2 = \mathcal{E}_3 \\ I_2R_2 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 \end{cases}$$

Решив систему уравнений, найдем $I_3 = 2$ А, $I_2 = 3$ А, $I_1 = 1$ А; $I_3' = 3$ А, $I_2' = 0$, $I_1' = -2$ А. I_1' направлен в сторону, противоположную первоначально выбранной.

23.55. На рис. 23.33а) $\mathscr{E} = 2$ В, $R_1 = 60$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = R_4 = 20$ Ом и $R_г = 100$ Ом. Определите силу тока через гальванометр.

Ответ: $I_г = 1{,}49$ мА.

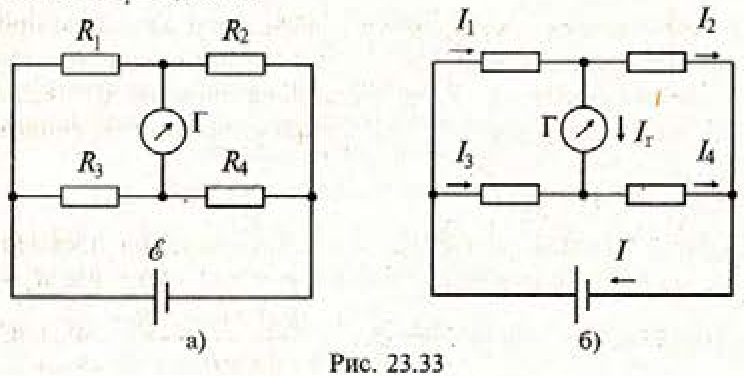


Рис. 23.33

Решение. Выберем направление токов (рис. 23.33б).

$$\begin{cases} I = I_1 + I_3 \\ I_1 = I_2 + I_г \\ I_2 + I_4 = I \\ I_3 + I_г = I_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1R_1 + I_2R_2 = \mathscr{E} \\ I_3R_3 + I_4R_4 = \mathscr{E} \\ I_1R_1 + I_гR_г + I_4R_4 = \mathscr{E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6I_1 + 4I_2 = 0{,}2 \\ 2I_3 + 2I_4 = 0{,}2 \\ 6I_1 + 10I_г + 2I_4 = 0{,}2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6I_1 + 4(I_1 - I_г) = 0{,}2 \\ 2(I_4 - I_г) + 2I_4 = 0{,}2 \\ 6I_1 + 10I_г + 2I_4 = 0{,}2 \end{cases}$$

$$10I_1 - 4I_г = 0{,}2 \rightarrow I_1 = \frac{0{,}2 + 4I_г}{10},\ \ 4I_4 - 2I_г = 0{,}2 \rightarrow I_4 = \frac{0{,}2 + 2I_г}{4},$$

$$6I_1 + 10I_г + 2I_4 = 0{,}2,\quad 6\left(\frac{0{,}2 + 4I_г}{10}\right) + 10I_г + 2\left(\frac{0{,}2 + 2I_{\mathscr{E}}}{4}\right) = 0{,}2,$$

$1{,}2 + 24I_г + 100I_г + 1 + 10I_г = 2$; $I_г = -1{,}49 \cdot 10^{-3}$ А. Ток направлен в сторону, противоположную первоначально выбранной.

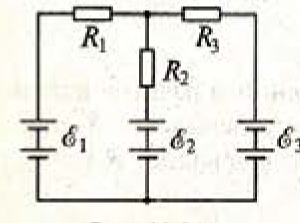


Рис. 23.34

23.56. На рис. 23.34 $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3$, $R_1 = 48$ Ом, $R_2 = 24$ Ом, падение напряжения на сопротивлении R_2 равно 12 В. Пренебрегая внутренним сопротивлением элементов, определите: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) сопротивление R_3.

Ответ: 1) $I_1 = 0{,}25$ А, $I_2 = 0{,}5$ А, $I_3 = 0{,}75$ А; 2) $R_3 = 16$ Ом.

Решение самостоятельное.

23.57. На рис 23.35а $\mathscr{E}_1 = 5$ В, $r_1 = 0{,}3$ Ом, $\mathscr{E}_2 = 4$ В, $r_2 = 0{,}2$ Ом. Определите сопротивление резистора R_1, при котором второй элемент будет скомпенсирован.

Ответ: $R_1 = 1{,}2$ Ом.

Решение. Для участка $1\mathscr{E}_12$: $I_1r_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_1$. С учетом того, что $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathscr{E}_2$, находим $I_1 = \dfrac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)}{r_1}$. Применим второй закон Кирхгофа для замкнутого контура $1\mathscr{E}_121$. При условии $I_1 = I_3$, получим $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}_1}{R_1 + r_1}$. Тогда $\dfrac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{r_1} = \dfrac{\mathscr{E}_1}{R_1 + r_1}$. Откуда $R_1 = \dfrac{\mathscr{E}_2 r_1}{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2} = 1{,}2$ Ом.

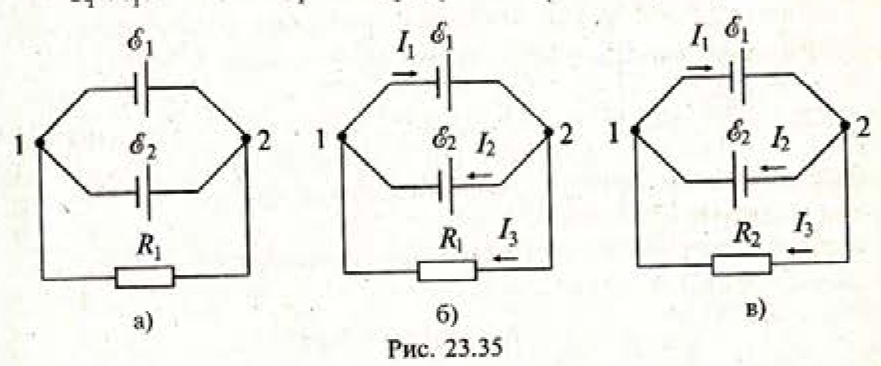


Рис. 23.35

23.58. В условии предыдущей задачи найдите: 1) силу токов в цепи при $R_2 = 1{,}88$ Ом; 2) силы токов в цепи при $R = R_2$, после того, как второй элемент будет скоммутирован*, согласно рис. 23.35в.

Ответ: 1) $I_1 = 2{,}9$ А; $I_2 = 0{,}7$ А; $I_3 = 2{,}2$ А.
2) $I_1 = 17{,}9$ А; $I_2 = 18{,}1$ А; $I_3 = 0{,}2$ А.

Решение. 1) Запишем первое правило Кирхгофа для узла 1, второе правило Кирхгофа — для контуров $1\mathscr{E}_12R1$ и $1\mathscr{E}_22R1$ при направлении обхода по часовой стрелке (рис. 23.35б). $I_1 = I_2 + I_3$, $I_1r_1 + I_3R = \mathscr{E}_1$, $-I_2r_2 + I_3R = \mathscr{E}_2$. Решив систему уравнений с учетом $R = R_2$, найдем $I_3 = \dfrac{\mathscr{E}_1r_2 + \mathscr{E}_2r_1}{r_1r_2 + R_2(r_1 + r_2)} = 2{,}2$ А, $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}_1 - I_3R_2}{r_1} = 2{,}9$ А,

$$I_2 = \frac{I_3R_2 - \mathscr{E}_2}{r_2} = 0{,}7 \text{ А.}$$

* Коммутирование — переключение полюсов.

2) Правила Кирхгофа, примененные к узлу 1 и контурам $1\mathscr{E}_1 2R1$ и $1\mathscr{E}_2 2R1$ (рис. 23.35в), дадут $I_1 = I_2 + I_3$, $I_1 r_1 + I_3 R = \mathscr{E}_1$, $-I_2 r_2 + I_3 R = -\mathscr{E}_2$.

Решив систему уравнений, найдем $I_3 = \dfrac{\mathscr{E}_1 r_2 - \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_3(r_1 + r_2)} = -0{,}2$ А,

$I_1 = \dfrac{\mathscr{E}_1 - I_3 R_3}{r_1} = 17{,}9$ А, $I_2 = \dfrac{I_3 R_3 + \mathscr{E}_2}{r_2} = 18{,}1$ А. Знак «–» в I_3 показывает, что I_3 направлен в сторону, противоположную первоначально выбранной.

23.59. К разноименным полюсам батареи $\mathscr{E} = 120$ В, $r = 10$ Ом подключены два провода с одинаковыми сопротивлениями $R = 20$ Ом. Свободные концы проводов и их середины соединены друг с другом через две лампочки сопротивлением $R_1 = 200$ Ом каждая. Найдите силу тока, идущего через батарею, и силы токов, проходящих через лампочки (рис. 23.36).

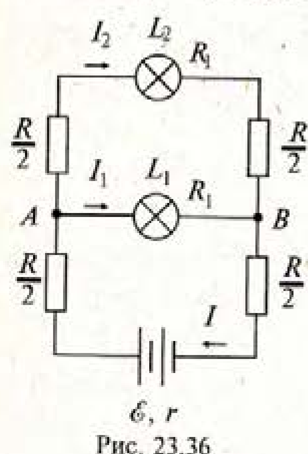


Рис. 23.36

Ответ: $I = 0{,}89$ А; $I_1 = 0{,}47$ А; $I_2 = 0{,}42$ А.

Решение. Обозначим направления токов I, I_1 и I_2. Обходя контуры $AL_1B\mathscr{E}A$ и AL_2BL_1A по часовой стрелке, по второму правилу Кирхгофа получим:

$$Ir + I\frac{R}{2} + I_1R_1 + I\frac{R}{2} = \mathscr{E},$$

$I_2R_1 + I_2\dfrac{R}{2} - I_1R_1 + I_2\dfrac{R}{2} = 0$. Для узла A по первому правилу Кирхгофа: $I - I_1 - I_2 = 0$. Тогда $\begin{cases} I(R+r) + I_1R_1 = \mathscr{E} \\ I_2(R_1 + R) = I_1R_1 \\ I - I_1 - I_2 = 0 \end{cases}$. Решив систему уравнений, получим $I = 0{,}89$ А, $I_1 = 0{,}47$ А, $I_2 = 0{,}42$ А.

23.60. В схеме, изображенной на рис. 23.37, положение движка потенциометра подобрано так, что ток $I_2 = 0$. Чему равен при этом ток I_1?

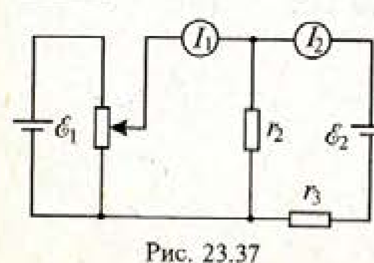


Рис. 23.37

Ответ: $I_1 = \mathscr{E}_2 / r_2$.

Решение. Так как ток $I_2 = 0$, то напряжение на сопротивлении r_2 равно $\mathscr{E}_2$. Ток через это сопротивление, а также ток I_1 (снова используем условие $I_2 = 0$) равны $\mathscr{E}_2 / r_2$.

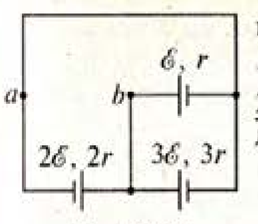


Рис. 23.38

23.61. Определите разность потенциалов между точками a и b (рис. 23.38).

Ответ: $U_{ab} = \dfrac{18}{11}\mathscr{E}$.

Решение самостоятельное.

23.62. Определите разность потенциалов на конденсаторе C (рис. 23.39). Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь. Какой знак будет иметь заряд на обкладке конденсатора, соединенной с резисторами?

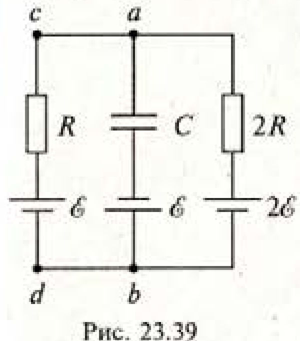


Рис. 23.39

Решение. Разность потенциалов между точками a и b равна падению напряжения на участке cd (рис. 23.39). $U_{ab} = \mathscr{E} - IR = \dfrac{4}{3}\mathscr{E}$. Очевидно, что $U_{ab} = U_c - \mathscr{E}$, где U_c — искомая разность потенциалов. $U_c = U_{ab} + \mathscr{E} = \dfrac{7}{3}\mathscr{E} > 0$. Следовательно, потенциал обкладки конденсатора, соединенной с резисторами, выше, чем потенциал обкладки, соединенной с батареей, т. е. эта обкладка заряжена положительно.

24. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА

24.1. За время $t = 10$ с через проводник, падение напряжения на котором $U = 12$ В, прошел заряд $q = 24$ Кл. Определите работу, совершенную током, мощность тока, сопротивление проводника.

Ответ: $A = 0{,}29$ кДж; $P = 29$ Вт; $R = 5$ Ом.

Решение. Заряд, прошедший по проводнику $q = It = \dfrac{U}{R}t$, откуда $R = \dfrac{Ut}{q} = 5$ Ом. Произведенная при этом работа $A = IUt = \dfrac{U^2}{R}t = 288$ Дж.

Мощность тока $P = \dfrac{A}{t} = \dfrac{U^2}{R} = 29$ Вт.

24.2. В медном проводнике длиной 2 м и площадью поперечного сечения 0,4 мм² идет ток. При этом ежесекундно выделяется 0,35 Дж теплоты. Сколько электронов проходит за 1 с через поперечное сечение этого проводника?

Ответ: $N = 1{,}27 \cdot 10^{19}$.

Решение. По закону Джоуля-Ленца, выделяемое в проводнике количество теплоты $Q = I^2Rt$. $I = \frac{q}{t}$, $R = \rho\frac{l}{S}$; $q = Ne$. Тогда

$Q = \frac{N^2e^2\rho \cdot l}{St}$, откуда $N = \sqrt{\frac{Q \cdot St}{e^2\rho l}} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{QSt}{\rho l}} = 1,27 \cdot 10^{19}$.

24.3. Построить графики зависимостей мощности, выделяемой на сопротивлении: а) от напряжения при постоянном сопротивлении; б) от сопротивления при постоянном напряжении. Как надо изменять сопротивление, чтобы зависимость мощности от напряжения была линейной?

Ответ: Так, чтобы ток был постоянный.

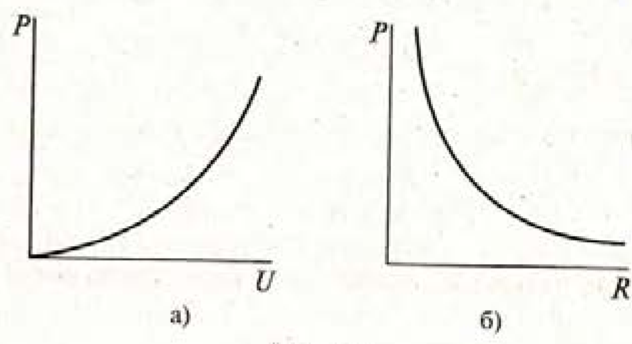


Рис. 24.1

Решение. $P = \frac{U^2}{R}$. а) При $R = \text{const}$ P пропорционально U^2. График зависимости мощности от напряжения приведен на рис. 24.1а.

б) При $U = \text{const}$ P пропорционально $\frac{1}{R}$. График зависимости мощности от сопротивления приведен на рис. 24.1б.

Чтобы зависимость мощности от напряжения была линейной, необходимо, чтобы ток был постоянным.

24.4. Два проводника одинакового сопротивления R подключаются к сети с напряжением U сначала параллельно, а затем последовательно. В каком случае потребляется большая мощность от сети?

Ответ: $P_1 = 4P_2$.

Решение. $P_1 = \frac{2U^2}{R}$; $P_2 = \frac{U^2}{2R}$; $\frac{P_1}{P_2} = 4$.

24.5. Железная и медная проволоки одинаковых длин и сечений соединены последовательно и включены в сеть. Найдите отношение количеств теплоты, выделившихся в каждой проволоке.

Ответ: $\frac{Q_1}{Q_2} = 7,06$.

Решение. При последовательном соединении проволок $I = \text{const}$. За время t в проволоках выделяются количество теплоты $Q_1 = I^2R_1t$ и $Q_2 = I^2R_2t$, где $R_1 = \rho_1\frac{l}{S}$ и $R_2 = \rho_2\frac{l}{S}$ — сопротивления железной и медной проволок. $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 7,06$.

24.6. Решить задачу 24.5 для случая параллельного соединения проволок.

Ответ: $\frac{Q_2}{Q_1} = 0,14$.

Решение. При параллельном соединении проволок $U = \text{const}$. $Q_1 = \frac{U^2t}{R_1}$, $Q_2 = \frac{U^2t}{R_2}$; $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,14$.

24.7. Две лампы имеют одинаковые мощности. Одна из них рассчитана на напряжение $U_1 = 120$ В, другая — на напряжение $U_2 = 220$ В. Во сколько раз отличаются сопротивления ламп?

Ответ: $\frac{R_2}{R_1} = 3,4$.

Решение. Используя закон Джоуля-Ленца, находим $P = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{U_2^2}{R_2}$.

Тогда $\frac{R_2}{R_1} = \frac{U_2^2}{U_1^2} = 3,4$.

24.8. Какое сопротивление имеют 40- и 75-ваттные лампы, рассчитанные на включение в сеть с напряжением $U = 120$ В? Какой ток течет через каждую лампу?

Ответ: $R_1 = 360$ Ом; $R_2 = 192$ Ом; $I_1 = 0,33$ А; $I_2 = 0,63$ А.

Решение. Мощность лампы $P = IU = \frac{U^2}{R}$, где I — ток, текущий через лампу, R — ее сопротивление. Отсюда для первой и второй ламп имеем $R_1 = \frac{U^2}{P_1} = 360$ Ом, $I_1 = \frac{P_1}{U} = 0,33$ А; $R_2 = \frac{U^2}{P_2} = 192$ Ом, $I_2 = \frac{P_2}{U} = 0,63$ А.

24.9. Какую мощность будет потреблять 25-ваттная лампочка, рассчитанная на напряжение $U_1 = 120$ В, если ее включить в сеть с напряжением $U_2 = 220$ В?

Ответ: $P_2 = 84$ Вт.

Решение. $P_2 = \frac{U_2^2 P_1}{U_1^2} = 84$ Вт.

24.10. Найдите сопротивление 100-ваттной лампы при комнатной температуре $t_1 = 20$ °С, если при напряжении сети $U = 220$ В температура нити $t_2 = 2800$ °С. Температурный коэффициент материала нити $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Ответ: $R_1 = 42{,}8$ Ом.

Решение. Зависимость сопротивления металлического проводника от температуры $R_t = R_0(1 + \alpha t)$. Для t_1 и t_2 $R_1 = R_0(1 + \alpha t_1)$, $R_2 = R_0(1 + \alpha t_2)$. Но $R_2 = \frac{U^2}{P}$, тогда $\frac{U^2}{P} = \frac{R_1(1 + \alpha t_2)}{(1 + \alpha t_1)}$, а

$$R_1 = \frac{U^2(1 + \alpha t_1)}{P(1 + \alpha t_2)} = 42{,}8 \text{ Ом}.$$

24.11. Две лампочки сопротивлениями $R_1 = 180$ Ом и $R_2 = 360$ Ом подключили параллельно к сети с напряжением $U = 120$ В. Какая мощность выделяется в каждой из лампочек? Какая будет выделяться мощность, если лампочки подключить последовательно?

Ответ: $P_1 = 80$ Вт; $P_2 = 40$ Вт; $P_1' = 8{,}9$ Вт; $P_2 = 17{,}8$ Вт.

Решение. $P_1 = \frac{U^2}{R_1} = 80$ Вт, $P_2 = \frac{U^2}{R_2} = 40$ Вт,

$$P_1' = I^2 R_1 = \left(\frac{U}{R_1 + R_2}\right)^2 R_1 = 8{,}9 \text{ Вт},$$

$$P_2' = I^2 R_2 = \left(\frac{U}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2 = 17{,}8 \text{ Вт}.$$

24.12. Перегоревшую спираль электрического утюга мощностью 300 Вт укоротили на 1/4. Какой стала при этом его мощность?

Ответ: 400 Вт.

Решение. $P_1 = \frac{U^2}{R}$, $P_2 = \frac{U^2}{\frac{3}{4}R} = \frac{4U^2}{3R}$. Откуда $P_2 = \frac{4}{3}P_1 = 400$ Вт.

24.13. Какое дополнительное сопротивление надо поставить к лампе мощностью $P = 300$ Вт, рассчитанной на напряжение $U = 110$ В,

чтобы при напряжении в сети $U_1 = 127$ В лампа работала в нормальном режиме?

Ответ: $R = 6{,}23$ Ом.

Решение. Сила тока $I = \frac{P}{U}$, дополнительное сопротивление

$$R = \frac{U_1 - U}{I} = \frac{(U_1 - U)U}{I} = 6{,}23 \text{ Ом}.$$

24.14. Какое напряжение надо поддерживать в сети, и какая мощность должна потребляться, чтобы питать током $n = 30$ ламп мощностью по $P_1 = 60$ Вт, соединенных параллельно, при напряжении $U_1 = 120$ В, если сопротивление проводов, подводящих ток к лампам, $r = 4$ Ом? Каков коэффициент полезного действия электросети?

Ответ: $U = 180$ В; $P = 2{,}7$ кВт; $\eta = 67$ %.

Решение. Напряжение в сети $U = I(R_л + r) = I\left(\frac{R_1}{n} + r\right)$, где $R_л$ — сопротивление всех ламп, соединенных параллельно. Сила тока в сети $I = nI_1$, где I_1 — сила тока через одну лампочку. $I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{P_1}{U_1}$.

$U = n\frac{P_1}{U_1}\left(\frac{U_1^2}{nP_1} + r\right) = 180$ В. Потребляемая мощность $P = IU = nI_1U = n\frac{P_1}{U_1}U = 2{,}7$ кВт, $\eta = \frac{nP_1}{P} \cdot 100\,\% = 67\,\%$.

24.15. Электроплитка, рассчитанная на потребление от сети мощности $P = 0{,}8$ кВт, присоединена к сети с напряжением $U = 120$ В проводами, сопротивление которых равно $r = 4$ Ом. Какое сопротивление должна иметь плитка?

Ответ: $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 2$ Ом.

Решение. Потребляемая плиткой мощность $P = IU_1$, где $I = \frac{U}{R + r}$,

$U_1 = U - Ir = U - \frac{U}{R + r}r$ — напряжение на плитке.

$P = \frac{U}{R + r}\left(U - \frac{U \cdot r}{R + r}\right) = \frac{U^2 R}{(R + r)^2}$. Решив это выражение относительно R, найдем $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 2$ Ом.

24.16. Источник тока имеет $\mathcal{E} = 2$ В и $r = 1$ Ом. Определите силу тока, если внешняя цепь потребляет мощность $P = 0{,}75$ Вт.

Ответ: $I_1 = 1{,}5$ А, $I_2 = 0{,}5$ А.

Решение. Мощность, выделяемая во внешней цепи, равна разности мощностей, выделяемых во всей цепи и во внутренней ее части. $P = \mathcal{E}I - I^2r$, где I — сила тока в цепи. Тогда $I^2r - \mathcal{E}I + P = 0$. $I_1 = 1{,}5$ А, $I_2 = 0{,}5$ А.

24.17. Источник с ЭДС, равной $\mathcal{E}$, и внутренним сопротивлением r замкнут на реостат. Выразите мощность тока P во внешней цепи как функцию силы тока. Постройте график этой функции. При каком токе мощность будет наибольшей?

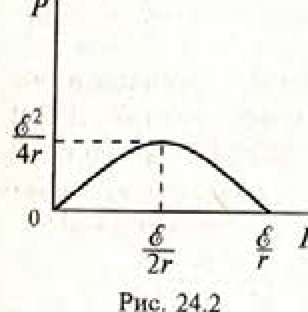


Рис. 24.2

Решение. Мощность, выделяемая во внешней цепи, $P = \mathcal{E}I - I^2r$.

Откуда $I^2r - \mathcal{E}I + P = 0$,

а $I_{1,2} = \dfrac{\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4Pr}}{2r}$. При $P = 0$: $I_1 = 0$; $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$. Максимальную мощность находим из условия $\mathcal{E}^2 - 4Pr \geq 0$, $P_{max} = \dfrac{\mathcal{E}^2}{4r}$, при этом $I = \dfrac{\mathcal{E}}{2r}$. График зависимости P от I — (парабола с максимумом) приведен на рис. 24.2. Из графика видно, что каждому значению мощности (кроме максимального) соответствует два значения силы тока.

24.18. Исходя из условия предыдущей задачи, найдите КПД цепи и постройте график зависимости η от I.

О т в е т: $\eta = 50\,\%$.

Решение. Коэффициент полезного действия цепи

$$\eta = \frac{\mathcal{E}I - I^2r}{\mathcal{E}I} = 1 - \frac{Ir}{\mathcal{E}}.$$ При $I_1 = 0$: $\eta = 1$; $\eta = 0$ при $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$. График η от I — прямая линия (рис. 24.3).

Рис. 24.3

24.19. Напряжение в сети без нагрузки $U = 120$ В. При включении в сеть плитки номинальной мощности $P_{ном} = 300$ Вт фактически выделяемая мощность равна $P = 250$ Вт. Какая мощность будет выделяться в двух таких плитках, одновременно включенных параллельно в эту сеть? Плитки рассчитаны на $U = 120$ В.

О т в е т: $P' = 422$ Вт.

Решение. Сопротивление рассчитывается по номинальной мощности $R = \dfrac{U^2}{P_{ном}} = 48$ Ом. Сопротивление подводящих проводов найдем исходя из выделяемой плиткой мощности $P = I^2R = \left(\dfrac{U}{R+r}\right)^2 R$. Решив это уравнение, найдем $r = 4{,}6$ Ом. При параллельном соединении $R' = \dfrac{R}{2}$, тогда $\left(\dfrac{U}{R'+r}\right)^2 R' = P' = 422$ Вт.

24.20. Электроплитка мощностью $P = 1$ кВт, рассчитанная на напряжение $U = 120$ В, подключена в сеть с напряжением $U_1 = 127$ В. Сопротивление подводящих проводов $r = 4$ Ом. Какая мощность выделяется плиткой? Параллельно к плитке подключили вторую такую же. Какая мощность стала выделяться двумя плитками?

О т в е т: $P_1 = 0{,}69$ кВт; $P_2 = 0{,}93$ кВт.

Решение. Сопротивление плитки $R = \dfrac{U^2}{P}$, сила тока $I = \dfrac{U_1}{R+r}$.

Выделяемая плиткой мощность $P_1 = I^2R = \left(\dfrac{U_1}{R+r}\right)^2 \cdot R = \left(\dfrac{U_1}{\dfrac{U^2}{P}+r}\right)^2 \dfrac{U^2}{P} =$

$= \dfrac{U_1^2PU^2}{(U^2+Pr)^2} = 0{,}69$ кВт. При параллельном подключении такой же плитки сопротивление на плитках будет равно $R' = \dfrac{U^2}{2P}$.

$$P_2 = \left(\frac{U_1}{\dfrac{U^2}{2P}+r}\right)^2 \cdot \frac{U^2}{2P} = 0{,}93 \text{ кВт}.$$

24.21. В сеть с напряжением $U = 220$ В с помощью проводов сопротивлением $r = 5$ Ом подключен реостат. При какой силе тока на реостате выделяется такая же мощность, как и при силе тока $I_1 = 2$ А? Какая часть расходуемой энергии выделяется в реостате в том и другом случаях?

О т в е т: $I_2 = 42$ А; $n_1 = 95\,\%$; $n_2 = 5\,\%$.

Решение. При двух различных положениях ползунка реостата, т. е. различных внешних сопротивлениях R_1 и R_2, при двух раз-

личных токах I_1 и I_2 на R_1 и R_2 выделится одинаковая мощность $P_1 = P_2$, т. е. $UI_1 - I_1^2 r = UI_2 - I_2^2 r$.

Откуда следует $I_2^2 r - UI_2 + (UI - I_1 r)I_1 = 0$, $I_2 = 42$ А.

Доля выделяемой на реостате энергии $n_1 = 1 - \frac{I_1 r}{U} = 0,95 = 95\%$ и $n_2 = 1 - \frac{I_2 r}{U} = 0,05 \approx 5\%$.

24.22. Мощность, выделяемая на резисторе, подключенном к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом, равна $P = 8$ Вт. Определите силу тока и сопротивления во внешней цепи.

Ответ: $I_1 = 2$ А; $R_1 = 2$ Ом; $I_2 = 4$ А; $R_2 = 0,5$ Ом.

Решение. Мощность, выделяемая на резисторе, $P = \frac{U^2}{R}$, где U — напряжение на резисторе, равное $U = \mathcal{E} - Ir$. Сила тока в цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$. Тогда $P = \frac{\left(\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{r+R}\right)^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$. Решив это уравнение относительно R, получим $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 0,5$ Ом, тогда $I_1 = 2$ А, а $I_2 = 4$ А.

24.23. Источник тока с ЭДС замкнут на реостат. При силе тока $I_1 = 0,2$ А и $I_2 = 2,4$ А на реостате выделяется одинаковая мощность. При какой силе тока на реостате выделяется максимальная мощность? Чему равна сила тока короткого замыкания?

Ответ: $I = 1,3$ А; $I_{к.з.} = 2,6$ А.

Решение. Условие задачи можно записать так: $P_1 = P_2$; $I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2$. Откуда $\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2^2}{I_1^2}$. С другой стороны, на основании закона Ома для всей цепи $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}$ и $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}$, откуда $\frac{R_1}{R_2} = \frac{(\mathcal{E} - I_1 r) I_2}{(\mathcal{E} - I_2 r) I_1}$. Приравняв отношения сопротивлений, можно найти $\frac{\mathcal{E}}{r} = I_1 + I_2 = I_{к.з.} = 2,6$ А. Сила тока, соответствующая максимальной мощности (см. задачу 24.17), $I = \frac{\mathcal{E}}{2r} = \frac{I_{к.з.}}{2} = 1,3$ А.

24.24. Определите силу тока короткого замыкания батареи, если при силе тока $I_1 = 2$ А во внешней цепи выделяется мощность $P_1 = 24$ Вт,

а при силе тока $I_2 = 5$ А — мощность $P_2 = 30$ Вт. Найдите также максимальную мощность, которая может выделяться во внешней цепи.

Ответ: $I_{к.з.} = 8$ А, $P_{max} = 32$ Вт.

Решение. $P_1 = \mathcal{E} I_1 - I_1^2 r$, $P_2 = \mathcal{E} I_2 - I_2^2 r$. Решив систему этих уравнений, найдем $r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = 2$ Ом, $\mathcal{E} = \frac{P_1 + I_1^2 r}{I_1} = 16$ В. $I_{к.з.} = \frac{\mathcal{E}}{r} = 8$ А. Максимальная мощность $P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 32$ Вт.

24.25. Максимальная мощность во внешней цепи равна $P_{max} = 12$ Вт при силе тока $I = 2$ А. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

Ответ: $\mathcal{E} = 12$ В; $r = 3$ Ом.

Решение. Максимальная мощность $P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$, ей соответствует сила тока $I = \frac{\mathcal{E}}{2r}$ (см. задачу 24.17). Откуда $\mathcal{E} = \frac{2P_{max}}{I} = 12$ В; $r = \frac{\mathcal{E}}{2I} = 3$ Ом.

24.26. К источнику тока с $\mathcal{E} = 8$ В подключена нагрузка. Напряжение на зажимах источника $U = 6,4$ В. Найдите КПД схемы.

Ответ: $\eta = 80\%$.

Решение. $\eta = \frac{P_1}{P_2} = \frac{IU}{I\mathcal{E}} = \frac{U}{\mathcal{E}} = 80\%$.

24.27. Найдите ток в цепи аккумулятора с $\mathcal{E} = 2,2$ В, если сопротивление внешней цепи $R = 0,5$ Ом и КПД схемы $\eta = 65\%$.

Ответ: $I = 2,86$ А.

Решение. $\eta = \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{IR}{\mathcal{E}}$, отсюда $I = \frac{\eta \mathcal{E}}{R} = 2,86$ А.

24.28. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора r, если при замене внешнего сопротивления $R_1 = 10,5$ Ом на $R_2 = 3$ Ом КПД схемы уменьшится в два раза.

Ответ: $r = 7$ Ом.

Решение. Коэффициент полезного действия $\eta_1 = \frac{U_1}{\mathcal{E}} = \frac{R_1}{R_1 + r}$, $\eta_2 = \frac{\eta_1}{2} = \frac{R_2}{R_2 + r}$, тогда $\frac{R_1}{R_1 + r} = 2\frac{R_2}{R_2 + r}$, откуда $r = \frac{R_1 R_2}{R_1 - 2R_2} = 7$ Ом.

24.29. При подключении к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 15 В сопротивления R = 15 Ом КПД источника η = 75 %. Какую максимальную мощность во внешней цепи может выделять данный источник?

Ответ: P_{max} = 11 Вт.

Решение. Максимальная мощность, выделяемая во внешней цепи $P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$ (см. задачу 24.17), КПД $\eta = \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R+r}$, отсюда $r = \frac{R(1-\eta)}{R}$. Тогда $P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2\eta}{4R(1-\eta)} = 11$ Вт.

24.30. При изменении внешнего сопротивления с R_1 = 6 Ом до R_2 = 21 Ом КПД схемы увеличился вдвое. Чему равно внутреннее сопротивление источника тока?

Ответ: r = 14 Ом.

Решение. См. решение задачи 24.28.

24.31. При каком сопротивлении мощность, выделяемая во внешней цепи, такая же, как и при сопротивлении R_1 = 10 Ом? Чему равен КПД в каждом случае? Внутреннее сопротивление источника тока r = 2,5 Ом.

Ответ: R_2 = 0,62 Ом; η_1 = 80 %; η_2 = 20 %.

Решение. Выделяемая на внешнем сопротивлении R_1 мощность $P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1+r)^2}$, на $R_2 - P_2 = \frac{\mathcal{E}^2 R_2}{(R_2+r)^2}$, $P_1 = P_2$, следовательно $\frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 R_2}{(R_2+r)^2}$, откуда находим $R_2 = \frac{(R_1^2+r^2) - \sqrt{(R_1^2+r^2)^2 - 4R_1^2 r^2}}{2R_1} =$ $= 0,62$ Ом; $\eta_1 = \frac{R_1}{R_1+r} = 80\%$; $\eta_2 = \frac{R_2}{R_2+r} = 20\%$.

24.32. Когда во внешней цепи выделяется мощность P_1 = 18 Вт, КПД источника тока η_1 = 64 %. При изменении внешнего сопротивления КПД источника стал η_2 = 36 %. Какая мощность выделяется при этом внутри источника тока?

Ответ: $P_{внутр}$ = 32 Вт.

Решение. Мощность, выделяемая во внешнюю цепь, в первом и втором случаях одинакова. Это видно из сравнения КПД. $\eta_2 = \frac{P_1}{P_1 + P_{внутр}}$; $P_{внутр} = \frac{P_1(1-\eta_2)}{\eta_2} = 32$ Вт.

24.33. При замыкании аккумулятора сначала на резистор сопротивлением R_1 = 4 Ом, а затем на R_2 = 9 Ом мощность, выделяемая на этих резисторах, в обоих случаях оказалась одинаковой. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

Ответ: r = 6 Ом.

Указание. На основании закона Ома $\mathcal{E} = I_1(r + R_1)$. Очевидно, $\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$ и $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r+R_2}{r+R_1}$. Прировняв эти выражения, решив уравнение относительно r, найдем $r = \sqrt{R_1 R_2} = 6$ Ом.

24.34. Два сопротивления по R = 10 Ом подключаются к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 3 В сначала последовательно, а затем параллельно. В обоих случаях тепловая мощность, выделяемая каждым сопротивлением, оказалась одинаковой. Чему равна сила тока в каждом случае?

Ответ: I_1 = 0,1 А; I_2 = 0,2 А.

Решение. $I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2$ или $I_1^2 2R = I_2^2 0,5R$, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}$.

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1+r} = \frac{\mathcal{E}}{2R+r}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2+r} = \frac{\mathcal{E}}{0,5R+r}; \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{0,5R+r}{2R+r} = \frac{1}{2},$$

откуда следует $r = R$. $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{3R} = 0,1$ А; $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{1,5R} = 0,2$ А.

24.35. Батарея состоит из n = 3 последовательно соединенных источников тока с ЭДС $\mathcal{E}_2$ = 2 В и внутренним сопротивлением r = 3 Ом каждый. Чему равна максимальная мощность, выделяемая во внешней цепи такой батареи? Какую максимальную мощность во внешней цепи можно получить, соединив элементы параллельно?

Ответ: $P_{посл} = P_{пар}$ = 1 Вт.

Решение. $P_{вн}$ максимальна при $R = r$. В случае последовательного соединения источников $I_1 = \frac{n\mathcal{E}}{R+nr} = \frac{n\mathcal{E}}{2nr}$, $P_1 = \left(\frac{n\mathcal{E}}{2nr}\right)^2 nr = \frac{n\mathcal{E}^2}{4r}$.

В случае параллельного соединения источников $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R+\frac{r}{n}} = \frac{n\mathcal{E}}{2r}$,

$$P_2 = \left(\frac{n\mathcal{E}}{2r}\right)^2 \cdot \frac{r}{n} = \frac{n\mathcal{E}^2}{4r}; \quad P_1 = P_2 = \frac{n\mathcal{E}^2}{4r} = 1 \text{ Вт}.$$

24.36. N одинаковых элементов с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r каждый соединены последовательно и замкнуты накоротко. Какое количество теплоты выделяется в единицу времени?

Ответ: $Q/c = \frac{N\mathcal{E}^2}{r}$.

Решение. Ток короткого замыкания $I_{к.з.} = \frac{N\mathscr{E}}{Nr} = \frac{\mathscr{E}}{r}$. Количество теплоты, выделяемое в единицу времени $Q/c = I^2 \cdot Nr = \frac{N\mathscr{E}^2}{r}$.

24.37. Батарея элементов, замкнутая на сопротивление $R_1 = 2$ Ом, дает ток $I_1 = 1{,}6$ А. Та же батарея, замкнутая на сопротивление $R_2 = 1$ Ом, дает ток $I_2 = 2$ А. Найдите мощность батареи, теряемую внутри батареи во втором случае.

Ответ: $P = 12$ Вт.

Решение. Потери мощности внутри батареи $P = I_2^2 r$.

$\mathscr{E} = I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r)$; отсюда $r = \frac{I_2R_2 - I_1R_1}{I_1 - I_2}$,

$$P = I_2^2 \frac{(I_2R_2 - I_1R_1)}{I_1 - I_2} = 12 \text{ Вт}.$$

24.38. Аккумулятор с ЭДС $\mathscr{E} = 8$ В и внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом заряжается от подзарядного устройства напряжением $U = 12$ В. Какая мощность расходуется внутри на выделение теплоты? Какую мощность аккумулятор потребляет от сети?

Ответ: $P_{тепл} = 1{,}6$ Вт; $P_{потр} = 4{,}8$ Вт.

Решение. $P_{тепл} = I^2 r = \left(\frac{U - \mathscr{E}}{r}\right)^2 r = \frac{(U - \mathscr{E})^2}{r} = 1{,}6$ Вт.

$P_{потр} = IU = \frac{(U - \mathscr{E})}{r} U = 4{,}8$ Вт.

24.39. Два аккумулятора с ЭДС, равными $\mathscr{E}_1 = 8$ В и $\mathscr{E}_2 = 3$ В, соединили параллельно. При этом получилось, что один аккумулятор подзаряжает другой и мощность, расходуемая на подзарядку, $P = 1{,}5$ Вт. Какой силы ток течет через аккумуляторы?

Ответ: $I = 0{,}5$ А.

Решение. Источник с $\mathscr{E}_1 = 8$ В вырабатывает мощность $P_0 = \mathscr{E}_1 I$. Во внешнюю цепь он отдает $P_1 = (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)I$, а на подзарядку второго источника $P = P_0 - P_1 = \mathscr{E}_1 I - (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)$. Откуда $I = P/\mathscr{E}_2 = 0{,}5$ А.

24.40. В сеть постоянного тока с напряжением $U = 110$ В включен электромотор. Сопротивление обмотки электромотора $R = 2$ Ом. Мотор потребляет ток силой $I = 8$ А. Определите мощность, потребляемую мотором, механическую мощность и КПД мотора.

Ответ: $P_{потр} = 0{,}88$ кВт; $P_{мех} = 0{,}75$ кВт; $\eta = 85$ %.

Решение. $P_{потр} = IU = 0{,}88$ кВт. $P_{мех} = P_{потр} - I^2R = 0{,}75$ кВт. $\eta = \frac{P_{мех}}{P_{потр}} = 85$ %.

24.41. Через электромотор, подключенный к сети с напряжением $U = 24$ В, течет ток силой $I = 8$ А. Определите мощность на валу мотора, если при полном торможении якоря по цепи течет ток силой $I_0 = 16$ А.

Ответ: $P = 96$ Вт.

Решение. Мощность тока, идущего по обмотке работающего мотора $P = P_{мех} + P_{тепл}$; $P_{мех} = P - P_{тепл} = IU - I^2R = I(U - IR)$. При полном затормаживании мотора $U = I_0R$, $R = \frac{U}{I_0}$.

$$P_{мех} = I\left(U - I\frac{U}{I_0}\right) = IU\left(1 - \frac{I}{I_0}\right) = 96 \text{ Вт}.$$

24.42. Мотор, подключенный к сети с напряжением $U = 220$ В, развивает мощность $P = 3$ кВт. Сопротивление обмотки мотора $R = 4$ Ом. Определите силу тока, потребляемую мотором.

Ответ: $I_1 = 25$ А; $I_2 = 30$ А.

Указание. Воспользоваться формулой $P = UI - I^2R$.

24.43. При силе тока $I_1 = 10$ А электромотор развивает мощность $P_1 - 0{,}5$ кВт, при $I_2 - 20$ А — мощность $P_2 - 0{,}8$ кВт. Определите КПД мотора при данных значениях тока. Какой силы ток течет через обмотку якоря, если электромотор заклинит?

Ответ: $\eta_1 = 83$ %; $\eta_2 = 67$ %; $I_0 = 60$ А.

Решение. Развиваемая электромотором мощность $P_1 = \mathscr{E}I_1 - I_1^2 r$, $P_2 = \mathscr{E}I_2 - I_2^2 r$. Откуда $r = \frac{P_1I_2 - P_2I_1}{I_1I_2(I_2 - I_1)}$; $\eta_1 = \frac{P_1}{P_1 + I_1^2 r} = \frac{P_1I_2(I_2 - I_1)}{P_1I_2^2 - P_2I_1^2} = 83$ %. Аналогично $\eta_2 = \frac{P_2}{P_2 + I_2^2 r} = 67\%$. $\mathscr{E} = \frac{P_1 + I_1^2 r}{I_1} = \frac{P_1I_2^2 - P_2I_1^2}{I_1I_2(I_2 - I_1)}$;

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{r} = \frac{P_1I_2^2 - P_2I_1^2}{P_1I_2 - P_2I_1} = 60 \text{ А}.$$

24.44. За время $\tau_1 = 40$ с в цепи из трех одинаковых проводников, соединенных параллельно и включенных в сеть, выделилось некоторое количество теплоты. За какое время τ_2 выделится такое же количество теплоты, если проводники соединить последовательно?

Ответ: $\tau_2 = 6$ мин.

Решение. Так как $Q = \frac{3U^2}{R}\tau_1 = \frac{U^2}{3R}\tau_2$, то $\tau_2 = 9\tau_1 = 6$ мин.

24.45. Через какое время закипит 200 г воды, если через кипятильник течет ток силой 0,5 А при напряжении в сети 220 В? Начальная температура воды 20 °С.

Ответ: 10 мин.

Решение. Работа электрического тока идет на нагрев воды до 100 °С, $IU\tau = mc\Delta t$; $\tau = \frac{mc\Delta t}{IU} = 600$ с $= 10$ мин.

24.46. В сосуд, содержащий массу воды $m = 480$ г, помещен электронагреватель мощности $P = 40$ Вт. Насколько изменилась температура воды в сосуде, если ток через нагреватель проходил в течение времени $\tau = 21$ мин? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К), теплоемкость сосуда вместе с нагревателем $C_c = 100$ Дж/К.

Ответ: $\Delta T = 24$ К.

Решение. Полученное количество теплоты идет на нагревание воды и сосуда с нагревателем, поэтому $P\tau = cm(t_2 - t_1) + C_c(t_2 - t_1)$, где t_1 и t_2 — начальная и конечная температуры воды. Изменение температуры воды $\Delta T = \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{P\tau}{cm + C_c} = 24$ К.

24.47. Сколько времени надо нагревать на электроплитке мощностью $P = 600$ Вт при КПД $\eta = 75\ \%$ массу льда $m_л = 2$ кг, взятого при температуре $t_1 = -16$ °С, чтобы обратить его в воду, а воду нагреть до температуры $t_2 = 100$ °С? Удельная теплоемкость льда $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К).

Ответ: $\tau = 3480$ с.

Решение. $\eta P\tau = mc_1(t - t_1) + m\lambda + mc_2(t_2 - t)$, где t — 0 °С.

$$\tau = \frac{mc_1(t - t_1) + m\lambda + mc_2(t_2 - t)}{\eta P} = 3480 \text{ с.}$$

24.48. Определите мощность нагревателя, если на нем можно вскипятить за время $\tau = 10$ мин воду объемом $V = 2$ л. Начальная температура воды $t = 20$ °С. КПД нагревателя $\eta = 75\ \%$.

Ответ: $P = 1{,}5$ кВт.

Решение. $\eta P\tau = \rho Vc(t_п - t)$, где $t_п$ — температура парообразования воды. $P = \frac{\rho Vc(t_п - t)}{\eta\tau} = 1{,}5$ кВт.

24.49. С помощью нагревательной спирали сопротивлением $R = 2$ Ом, подключенной к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E} = 36$ В, нагревают воду массой $m = 500$ г. За время $\tau = 10$ мин вода нагрелась на $\Delta t = 29$ °С. Определить внутреннее сопротивление аккумулятора.

Ответ: $r = 3$ Ом.

Решение. $I^2R\tau = mc\Delta t$, где $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$. Тогда $\left(\frac{\mathcal{E}}{R + r}\right)^2 R\tau = mc\Delta t$,

$$r = \mathcal{E}\sqrt{\frac{R\tau}{mc\Delta t}} - R = 3 \text{ Ом.}$$

24.50. Электрический чайник имеет две нагревательные спирали. При включении одной из них вода в чайнике закипает через $t_1 = 8$ мин, при включении другой — через $t_2 = 24$ мин. Через какое время будет закипать в чайнике вода, если спирали соединить: а) последовательно; б) параллельно?

Ответ: а) $t = 32$ мин; б) $t = 6$ мин.

Решение. $\frac{U^2}{r_1}t_1 = \frac{U^2}{r_2}t_2 = \frac{U^2}{r_1 + r_2}t_{посл} = \frac{U^2}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}t_{парал}$, где r_1 и r_2 — сопротивления спиралей, U — напряжение в сети. Из этих равенств следует, $t_{посл} = t_1 + t_2 = 32$ мин, $t_{парал} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 6$ мин.

24.51. К концам свинцовой проволоки длиной $l = 1$ м приложена разность потенциалов $U = 10$ В. Сколько времени пройдет с начала пропускания тока до момента, когда свинец начнет плавиться? Начальная температура свинца $t_0 = 20$ °С. Потерей теплоты в окружающее пространство пренебречь.

Ответ: $\tau = 1$ с.

Решение. $\frac{U^2}{R}\tau = mc(t_{пл} - t_0)$, где $R = \rho\frac{l}{S}$ — сопротивление проволоки, $m = VD = SlD$ — масса проволоки, D — плотность свинца.

$\frac{U^2 S\tau}{\rho l} = cSlD(t_{пл} - t_0)$. Откуда $\tau = \frac{\rho l^2 D\Delta t \cdot c}{U^2} = 1$ с.

24.52. На сколько нагреется медный стержень за время $\tau = 50$ с, если по нему течет ток плотностью $j = 4$ А/мм²? Потерей теплоты в окружающее пространство пренебречь.

Ответ: $\Delta T = 4K$.

Решение. Плотность тока $j = \frac{I}{S}$, откуда $I = jS$. $I^2R\tau = mc\Delta T$,

$j^2S^2\frac{\rho l\tau}{S} = lSDc\Delta T$, $\Delta T = \frac{j^2\rho\tau}{Dc} = 4$ К.

24.53. Какое количество нефти сжигается на электростанции, чтобы по телевизору мощностью 250 Вт посмотреть 1,5-часовой фильм? Считать КПД электростанции 35 %.

Ответ: $m = 84$ г.

Решение. $\eta mq = P\tau$, где q — удельная теплота сгорания нефти. $m = \frac{P\tau}{\eta q} = 84$ г.

24.54. Трамвай массой $m = 22,5$ т движется со скоростью $\upsilon = 36$ км/ч по горизонтальному пути. Коэффициент трения $\mu = 0,01$, напряжение в линии $U = 500$ В, КПД двигателя и передачи $\eta = 75\%$. Определите силу тока, проходящего через двигатель. С какой скоростью будет двигаться трамвай вверх по горе с уклоном 0,03, расходуя ту же мощность?

Ответ: $I = 59$ А; $\upsilon_1 = 2,5$ м/с, где $\sin\alpha$ — уклон.

Решение. При движении по горизонтальному пути $\eta IU = \mu mg\upsilon$, $I = \frac{\mu mg\upsilon}{\eta U} = 59$ А. При движении вверх по горе $\eta IU = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\upsilon_1$, $\upsilon_1 = \frac{\mu\upsilon}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = 2,5$ м/с.

24.55. Электровоз массой $m = 300$ т движется вниз по горе со скоростью $\upsilon = 72$ км/ч. Уклон горы составляет 1 м на каждые 100 м пути. Коэффициент сопротивления движению $\mu = 0,02$, напряжение в линии $U = 3$ кВ, КПД электровоза $\eta = 80\%$. Определите силу тока, проходящего через мотор электровоза.

Ответ: $I = 0,24$ кА, где $\sin\alpha$ — уклон.

Указание. См. предыдущую задачу,

$$I = \frac{mg\upsilon(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{U\cdot\eta} = 0,24 \text{ кА}.$$

24.56. Электровоз массой $m = 300$ т движется вниз по горе со скоростью $\upsilon = 36$ км/ч. Уклон горы $\sin\alpha = 0,01$, сила сопротивления электровозу составляет 3 % от действующей на него силы тяжести. Какой ток протекает через мотор электровоза, если напряжение в сети $U = 3$ кВ и КПД электровоза $\eta = 80$ %?

Ответ: $I = 245$ А.

Решение. Составляющая силы тяжести в направлении движения $F = mg\sin\alpha \approx mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0,01mg$ меньше силы сопротивления $F_c = 0,03mg$. Поэтому мотор совершает работу против равнодействующей этих сил. За время τ эта работа $A = (F_c - F)\upsilon t = \eta IU\tau$, где I — ток, текущий через мотор, отсюда $I = \frac{0,02mg\upsilon}{\eta U} = 245$ А.

24.57. Электродвигатель подъемного крана работает под напряжением $U = 380$ В и потребляет ток силой $I = 20$ А. Определите сопротивление обмотки мотора, если груз массой $m = 1$ т кран поднимает на высоту $h = 19$ м за время $t = 50$ с.

Ответ: $R = 9,7$ Ом.

Решение. Согласно закону сохранения энергия, потребляемая из сети электродвигателем, расходуется на нагревание обмотки мотора и на подъем груза $IUt = I^2Rt + mgh$, $R = \frac{IUt - mgh}{I^2R} = 9,7$ Ом.

25. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

25.1. Как изменится количество вещества, выделяемого на электродах при электролизе, если: а) увеличить напряжение; б) сблизить электроды; в) увеличить погруженную часть электродов?

Ответ: Во всех случаях увеличится.

Решение. а) При увеличения напряжения увеличится и сила тока (закон Ома), что приведет к увеличению массы вещества, выделяемой на катоде (закон Фарадея), а следовательно, и к увеличению количества вещества ($\nu \sim m$).

б) При сближении электродов уменьшается длина пробега ионов, увеличивается масса и количество вещества, выделяемого на электродах.

в) При увеличении погруженной части электродов увеличивается общее число ионов, следовательно, увеличивается количество вещества, выделяемого на электродах.

25.2. Электрический ток пропускают через электролитическую ванну, наполненную раствором медного купороса. Угольные электроды погружены на половину своей длины. Как изменится масса меди, выделяемой на катоде за тот же самый промежуток времени, если: а) заменить угольный анод медным той же самой формы и объема; б) заменить угольный катод медным?

Ответ: а), б) Не изменится.

Решение. Масса меди, выделяемой на катоде, не изменится, так как она не зависит от материала, из которого сделаны электроды.

25.3. Исходя из условия предыдущей задачи, найти, как изменится масса меди, выделяемой на катоде, если: а) увеличить концентрацию раствора; б) нагреть раствор электролита?

Ответ: а), б) Увеличится.

Решение. а) При увеличении концентрации раствора увеличивается сила тока, а значит, и масса меди ($m \sim I$).

б) При увеличении температуры увеличится скорость движения ионов, т. е. увеличится сила тока через электролит, а следовательно, и масса меди ($m \sim I$).

25.4. На что затрачивается больше электричества: на выделение 1 моля никеля из раствора $NiSO_4$ или на выделение 1 моля железа из раствора $FeCl_2$?

Ответ: Одинаково.

Решение. По закону Фарадея $m = \frac{M}{Fn}q$. С учетом $m = M\nu$, $q = \nu Fn$. По условию $\nu_1 = \nu_2$. Валентность никеля и железа в данных растворах одинакова и равна $n_1 = n_2 = 2$, поэтому $q_1 = q_2$.

25.5. При никелировании изделий в течение времени $\tau = 2$ ч отложился слой никеля толщиной $h = 0,03$ мм. Найдите плотность тока при электролизе.

Ответ: $j = 124$ А/м^2.

Решение. По закону Фарадея $m = \frac{M}{Fn}q$. Так как $m = \rho V = \rho hS$, а $q = It = jS\tau$, то $\rho hS = MjS\tau/Fn$, что дает $j = \rho hFn/M\tau = 124$ А/м^2.

25.6. Сколько времени потребуется для покрытия изделия слоем золота толщиной $h = 5$ мкм, если плотность тока в растворе хлористого золота $AuCl_3$ равна $j = 20$ А/м^2?

Ответ: $t = 1$ ч 58 мин.

Решение. По закону Фарадея $m = \frac{M}{Fn}q$. Учитывая, что $m = \rho V = \rho hS$, а $q = It = jSt$, получим $t = \rho hFn/Mj = 1$ ч 58 мин.

25.7. Какой толщины слой серебра образовался на изделии за время $t = 3$ мин, если плотность тока в растворе азотнокислого серебра $AgNO_3$ равна $j = 2,6$ кА/м^2?

Ответ: $h = 50$ мкм.

Указание. См. предыдущую задачу. $h = Mjt/\rho hF = 50$ мкм.

25.8. Сколько окиси алюминия Al_2O_3 разлагает ток силой $I = 3$ А в течение времени $t = 1$ ч?

Ответ: $m = 1,9$ г.

Указание. См. решение задачи 25.6. $m = MIt/nF = 1,9$ г.

25.9. Какой силы ток должен проходить через электролит, чтобы хлористую медь $CuCl_2$ массой $m = 100$ г разложить за время $t = 10$ ч?

Ответ: $I = 4$ А.

Решение. По закону Фарадея $m = \frac{M}{Fn}q = \frac{M}{Fn}It$.

Откуда $I = mFn/Mt = 4$ А.

25.10. При электролизе сернистого цинка $ZnSO_4$ в течение времени $t = 4$ ч выделилось $m = 24$ г цинка. Определите сопротивление электролита, если на электроды подано напряжение $U = 10$ В.

Ответ: $R = 2$ Ом.

Решение. $m = \frac{M}{Fn}q = \frac{M}{Fn}It = \frac{M}{Fn}\frac{U}{R}t$.

Откуда $R = MUt/mFn = 2$ Ом.

25.11. Какой заряд нужно пропустить через электролитическую ванну с подкисленной водой, чтобы получить $V = 1$ дм^3 гремучего газа при температуре $t = 27$ °C и давлении $p = 10^5$ Па?

Ответ: $q = 5,2 \cdot 10^3$ Кл.

Решение. Количество гремучего газа (в молях) $\nu = pV/RT$. При электролизе воды (H_2O) атомов водорода выделяется вдвое больше, чем атомов кислорода. Количество водорода $\nu_1 = 2\nu/3 = 2pV/3RT$. Учитывая, что молекула газообразного водорода состоит из двух атомов, с помощью закона Фарадея получим искомый заряд $q = Fn \cdot 2\nu_1 = 4FnpV/3RT = 5,2 \cdot 10^3$ Кл.

25.12. При электролизе воды течет ток силой $I = 59$ А. Какой объем гремучего газа (при нормальных условиях) получился за время $t = 1$ мин?

Ответ: $V = 62,4 \cdot 10^{-5}$ м^3.

Указание. Исходя из решения предыдущей задачи, имеем $V = 3ItRT/4Fnp = 62,4 \cdot 10^{-5}$ м^3.

25.13. В процессе электролиза на катоде выделилось 503 мг металла. Процесс протекал 5 мин при силе тока 1,5 А. Какой это металл и какова его валентность?

Ответ: Серебро, $n = 1$.

Решение. По закону Фарадея $m = kq$, где k — электрохимический эквивалент вещества. $k = m/q = 11,18 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл, что соответствует серебру. $k = m/Fn$, откуда $n = M/kF = 1$.

25.14. Серебрение пластинок производится при плотности тока $j = 0,6$ А/дм^2, при этом за время $t = 4$ с выделяется масса $m = 5$ кг серебра. Найдите площадь пластинок.

Ответ: $S = \dfrac{m}{kjt} = 1,55$ м^2.

Указание. См. решение предыдущей задачи.

25.15. Медь выделяется из раствора $CuSO_4$ при напряжении $U = 8$ В. Найдите расход энергии на выделение $m = 1$ кг меди?

Ответ: $W/m = 24$ МДж/кг.

Решение. По закону Фарадея $m = \dfrac{M}{Fn}q = \dfrac{M}{Fn}It$ или $mU = \dfrac{M}{Fn}IUt$, где $IUt = W$. Тогда $W/m = UFn/M = 24 \cdot 10^6$ Дж/кг.

25.16. При электролитическом способе получения никеля на единицу массы расходуется $W/m = 10$ кВт·ч/кг электроэнергии. Электрохимический эквивалент никеля $k = 1,08 \cdot 10^{-3}$ кг/А·ч. При каком напряжении производится электролиз?

Ответ: $U = 10,8$ В.

Указание. См. решение задачи 25.15. $U = (W/m)\cdot\dfrac{m}{q} = (W/m)\cdot k = 10,8$ В.

25.17. При электролизе раствора азотнокислого серебра в течение часа выделилось $m = 9,4$ г серебра. Определить ЭДС поляризации, если напряжение на зажимах ванны $U = 4,2$ В, а сопротивление раствора $R = 1,5$ Ом.

Ответ: $\mathcal{E}_п = 0,7$ В.

Решение. При электролизе раствора азотнокислого серебра электроды поляризуются (нарушается симметрия электродов из одинакового материала). Возникает ЭДС поляризации. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС поляризации, $I = (U - \mathcal{E}_п)/R$ или $\mathcal{E}_п = U - IR$. Так как $I = q/t$, по закону Фарадея $q = mFn/M$, то $\mathcal{E}_п = U - mFnR/Mt = 0,7$ В.

25.18. При электролизе раствора сульфата никеля за 40 минут на катоде выделилось 2,19 г никеля. Определите ЭДС поляризации, если напряжение на зажимах ванны было 5 В, а сопротивление раствора 1,4 Ом.

Ответ: $\mathcal{E}_п = 0,8$ В.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $\mathcal{E}_п = U - IR$.

25.19. Каков расход электроэнергии W на получение $m = 1$ кг алюминия, если электролиз ведется при напряжении $U = 10$ В, а КПД установки $\eta = 0,8$.

Ответ: $W = 130$ МДж $= 37$ кВт·ч.

Решение. КПД установки $\eta = IUt/W = Uq/W$, откуда $W = Uq/\eta$. По закону Фарадея $m = \dfrac{M}{Fn}q$. Тогда $W = \dfrac{UmFn}{\eta M} = 130$ МДж.

25.20. Найдите массу выделившейся меди, если для ее получения электролитическим способом затрачено $W = 5$ кВт·ч электроэнергии. Электролиз проводится при напряжении $U = 10$ В, КПД установки $\eta = 75\%$. Электрохимический эквивалент меди $k = 3,3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

Ответ: $m = 0,445$ кг.

Решение. По аналогии с предыдущей задачей получаем $m = k\eta W/U = 0,445$ кг.

25.21. В растворе медного купороса анодом служит пластина из меди, содержащая 12% примесей. При электролизе медь растворяется и в чистом виде выделяется на катоде. Сколько стоит очистка $m = 1$ кг такой меди, если напряжение на ванне поддерживается равным $U = 6$ В, а стоимость 1 кВт·ч энергии 15,6 коп.

Ответ: $x = 70,2$ коп.

Решение. Масса чистой меди, выделяющейся на катоде, $m_1 = m - 0,12m = 0,88m$. По закону Фарадея $m_1 = Mq/Fn$, откуда $q = m_1Fn/M = 0,88mFn/M$. Энергия, затраченная при электролизе, равна $W = qU = 0,88mFnU/M = 4,5$ кВт·ч. Тогда стоимость 1 кг такой меди $x = 70,2$ коп.

25.22. Неразведенную серную кислоту хранят в железной таре, а разведенную — в стеклянной. Почему?

Ответ: Неразведенная серная кислота не является электролитом, а разведенная — электролит, при хранении которого в железной таре будет происходить электролиз.

25.23. Найдите плотность тока насыщения в газоразрядной трубке, расстояние между электродами которой $l = 10$ см, если под действием космического излучения в 1 см^3 трубки возникает ежесекундно 10 пар одновалентных ионов.

Ответ: $j_н = 3,2 \cdot 10^{-13}$ А/м^2.

Решение. Плотность тока насыщения $j_н = I_н/S$. $I_н = q/t$, $q = enV$, где $n = 2n_п$ — концентрация ионов ($n_п$ — число пар ионов), $V = lS$ — объем трубки, e — заряд электрона. Тогда $j_н = 2en_п lS/tS = 2en_п l/t$ или $j_н = 2en_{п1}l$, где $n_{п1} = n_п/t$ — число пар ионов, образующихся в 1 м^3 трубки за 1 с.

25.24. Пары ртути в ртутной лампе ионизируются рентгеновскими лучами. При увеличении напряжения между электродами лампы

достигается сила тока насыщения $I_н = 0{,}8$ нА. Какое количество пар ионов создают рентгеновские лучи за время $t = 1$ с?

Ответ: $N = 2{,}5 \cdot 10^9$.

Решение. Ток насыщения $I_н = q/t = eN_1/t = e2N/t$, где $N_1 = 2N$ (N — число пар ионов). $N = I_н t/2e = 2{,}5 \cdot 10^9$.

25.25. Найдите энергию ионизации атома гелия, если его потенциал ионизации 24,5 В.

Ответ: $W_i = 39{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Решение. По определению, энергия ионизации равна $W_i = eU_i = 39{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 24{,}5$ эВ, где e — заряд электрона.

25.26. Какой наименьшей скоростью должен обладать электрон, чтобы ионизировать атом гелия? Энергия ионизации атома гелия $W_i = 24{,}5$ эВ?

Ответ: $v = 2{,}94 \cdot 10^6$ м/с.

Решение. Для того чтобы ионизировать атом гелия, электрон должен обладать энергией, равной энергии ионизации $W_k = W_i$ или $\frac{mv^2}{2} = W_i$, откуда $v = \sqrt{\frac{2W_i}{m}} = 2{,}94 \cdot 10^6$ м/с.

25.27. Найдите среднюю скорость направленного движения одновалентных ионов в ионизационной камере, если их концентрация $n = 10^3$ см$^{-3}$, а плотность тока насыщения $j_н = 10^{-12}$ А/м^2.

Ответ: $\bar{v} = 6{,}2 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Решение. Средняя скорость $\bar{v} = l/t$, где l — длина камеры. На основании решения задачи 25.23. $j_н = 2en_н l = en_t l$, где n_t — число ионов, возникающих в 1 м^3 за 1 с. $l = j_н/en_t$, но $n_t = n/t$, тогда $l = j_н t/en$, а $\bar{v} = j_н/en = 6{,}2 \cdot 10^{-3}$ м/с.

25.28. При какой напряженности поля начнется самостоятельный разряд в воздухе, если энергия ионизации молекул $W_i = 2{,}4 \cdot 10^{-18}$ Дж, а средняя длина свободного пробега $\bar{l} = 5$ мкм? Какова скорость электронов при ударе о молекулы?

Ответ: $E = 3{,}1$ МВ/м; $v = 2340$ км/с.

Решение. Для начала процесса ионизации необходимо, чтобы кинетическая энергия, приобретенная за счет электрического поля, была равна энергии, ионизации молекулы $eU = W_i$, $U = El$, $E = W_i/el = 3{,}1$ МВ/м, $W_i = mv^2/2$; $v = \sqrt{2W_i/m} = 2340$ км/с.

25.29. Электрический пробой воздуха наступает при напряженности поля $E = 3$ МВ/м. Определите потенциал ионизации воздуха

и скорость электронов перед ударом о молекулы, если длина свободного пробега электронов $l = 5$ мкм.

Ответ: $U = 15$ В; $v = 2{,}3 \cdot 10^6$ м/с.

Решение. $U = El = 15$ В, $eEl = mv^2/2$, $v = \sqrt{2eEl/m} = 2{,}3 \cdot 10^6$ м/с.

25.30. Мощность тока в электронно-лучевой трубке $P = 0{,}5$ Вт. Энергия электронов в луче $W = 8 \cdot 10^{-16}$ Дж. Определите силу анодного тока.

Ответ: $I = 0{,}1$ мА.

Решение. Энергия ионизации $W = eU$, сила анодного тока $I = P/U = Pe/W = 0{,}1$ мА.

25.31. При какой температуре T в воздухе будет полностью ионизированная плазма? Энергия ионизации молекул азота $W = 2{,}5 \cdot 10^{-18}$ Дж. Энергия ионизации кислорода меньше.

Ответ: $T = 1{,}2 \cdot 10^5$ К.

Решение. Воздух будет полностью ионизирован, когда кинетическая энергия молекул будет равна энергии ионизации. Кинетическая энергия поступательного движения молекул $E_k = \frac{3}{2}kT$, тогда $\frac{3}{2}kT = W$. Откуда $T = 2W/3k = 1{,}2 \cdot 10^5$ К.

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Уровень II

1. Параллельно расположенные квадратные пластины присоединены к источнику постоянного тока напряжением 600 В. Определить величину тока в цепи, если одна из пластин сдвигается относительно другой со скоростью 6 см/с. Стороны пластин равны 10 см; расстояние между пластинами 1 мм.

Ответ: $I = 3{,}18 \cdot 10^{-8}$ А.

Решение. Величина тока зависит от изменения во времени электрического заряда на пластинах $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, где Δq — изменение заряда за время Δt. При перемещении одной пластины относительно другой изменяется емкость конденсатора, а изменение заряда при постоянной разности потенциалов пропорционально изменению

емкости, т. е. $\Delta q = U\Delta C = U\frac{\varepsilon\varepsilon_0 \Delta S}{d}$, где $\varepsilon_0 = 8,85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная. Таким образом, $I = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t}$, где $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ — изменение во времени площади пластин, находящихся друг над другом. $\frac{\Delta S}{\Delta t} = b\cdot v$, где b — сторона пластин, v — скорость их равномерного движения. $I = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d}\cdot bv = 3,18\cdot 10^{-8}$ А.

2. Цепь составлена из бесконечного числа ячеек (рис. 1а). Определите сопротивление этой цепи.

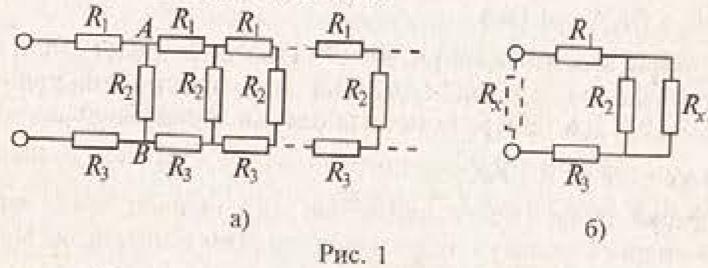


Рис. 1

Решение. Данная цепь бесконечна, поэтому уменьшение ее на один элемент не будет влиять на сопротивление оставшейся части. Поэтому вся цепь, находящаяся правее AB, также имеет сопротивление R_x. Эквивалентная схема показана на рис. 1б. Для этой схемы: $R_x = R_1 + R_3 + \frac{R_2 R_x}{R_2 + R_x}$, тогда $R_x^2 - (R_1 + R_3)R_x - (R_1 + R_3)R_2 = 0$,

$$R_x = \frac{R_1 + R_3}{2} + \sqrt{\frac{(R_1 + R_3)^2}{4} + R_2(R_1 + R_3)}.$$

Знак минус перед корнем опускаем, т. к. в этом случае сопротивление цепи будет отрицательным, что не имеет физического смысла. Если $R_1 = R_2 = R_3 = R$, то $R_x = R(1+\sqrt{3})$.

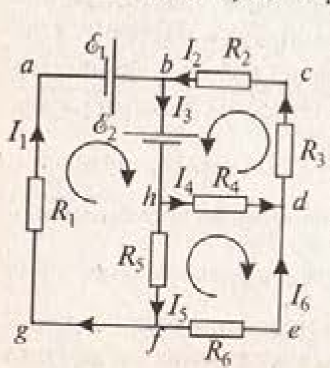


Рис. 2

3. Найдите токи, текущие в каждой ветви цепи, изображенной на рис. 2. ЭДС источников тока $\mathcal{E}_1 = 6,5 B$, $\mathcal{E}_2 = 3,9$ В. Сопротивления резисторов $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R = 10$ Ом.

Ответ: $I_1 = 0,19$ А; $I_2 = -0,17$ А; $I_3 = 0,02$ А; $I_4 = -0,05$ А; $I_5 = 0,07$ А; $I_6 = -0,12$ А.

Решение. Первый закон Кирхгофа для узла b: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$;

для узла h: $I_3 - I_4 - I_5 = 0$; для узла f: $I_5 - I_1 - I_6 = 0$.

Второй закон Кирхгофа с учетом направления обхода контуров, указанных на рисунке: для контура $abfga$ $I_1R_1 + I_5R_5 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$; для контура $bcdhb$: $I_2(R_2 + R_3) + I_4R_4 = -\mathcal{E}_2$;

для контура $hdefh$: $I_4R_4 - I_6R_6 - I_5R_5 = 0$.

Решая полученную систему и учитывая, что все сопротивления одинаковы и равны $R = 10$ Ом, получаем:

$$I_1 = \frac{8\mathcal{E}_1 - 7\mathcal{E}_2}{13R} = 0,19 \text{ А}; \quad I_2 = -\frac{\mathcal{E}_1 + 4\mathcal{E}_2}{13R} = -0,17 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{7\mathcal{E}_1 - 11\mathcal{E}_2}{13R} = 0,02 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{2\mathcal{E}_1 - 5\mathcal{E}_2}{13R} = -0,05 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{5\mathcal{E}_1 - 6\mathcal{E}_2}{13R} = 0,07 \text{ А}; \quad I_6 = \frac{\mathcal{E}_2 - 3\mathcal{E}_1}{13R} = -0,12 \text{ А}.$$

Знаки «–» при величинах токов I_2, I_4, I_6 означают, что направление токов противоположны указанным на рисунке.

4. Определите зависимость от сопротивления внешней цепи R силы тока; напряжения на сопротивлении R; мощности P_1, выделяемой во внешней цепи; мощности P_2, выделяемой внутри источника тока; полной мощности P, развиваемой источником, а также $КПД$ источника тока.

Постройте графики $I(R); U(R); P_1(R); P_2(R); P(R); \eta(R)$.

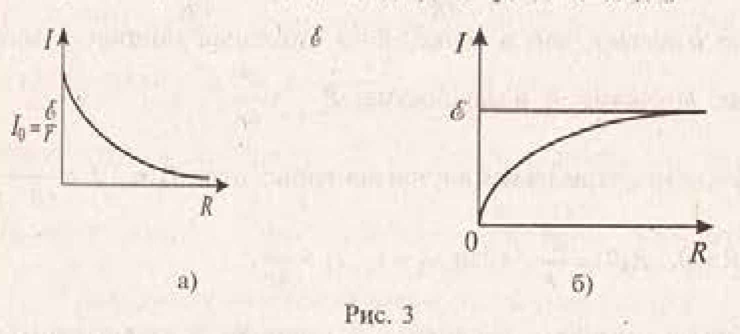
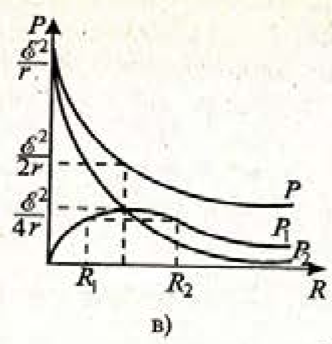


Рис. 3

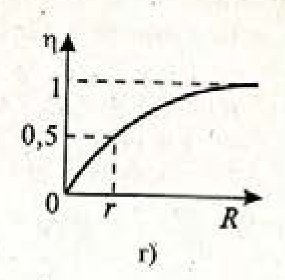
Решение. Согласно закону Ома для полной цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$.

При $R = 0$ $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r}$. Ток изменяется обратно пропорционально величине внешнего сопротивления (рис. 3а). Для напряжения на внешнем сопротивлении получаем: $U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{R + r}$.

При $R = 0$, $U = 0$, когда $R \to \infty$, $U \to \mathcal{E}$. Полная мощность, выделяющаяся в цепи, $P = P_1 + P_2$. $I\mathcal{E} = I^2R + I^2r$.



в)



г)

Рис. 4

Мощность, выделяемая во внешней цепи: $P_1 = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2R}{(R+r)^2}$.

Определим, при каком внешнем сопротивлении выделяется наибольшая полезная мощность. В этом случае $\frac{dP_1}{dR} = 0$.

$$\frac{dP_1}{dR} = \frac{d}{dR}\left(\frac{\mathcal{E}^2R}{(R+r)^2}\right) = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} - \frac{2\mathcal{E}^2R(R+r)}{(R+r)^4} = \frac{\mathcal{E}^2(R+r-2R)}{(R+r)^3} = 0.$$

Поскольку: $\mathcal{E} \neq 0$, $R = r$.

Исследуем знак производной для точек, соответствующих $R < r$ и $R > r$. В первом случае $\frac{dP_1}{dR} > 0$, во втором $\frac{dP_1}{dR} < 0$.

Это означает, что в точке $R = r$ полезная мощность максимальна. Значение P_1 в максимуме: $P_{1_{max}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$.

Мощность, выделяемая внутри источника тока: $P_2 = I^2r = \frac{\mathcal{E}^2r}{(R+r)^2}$;

при $R = 0$, $P_2(0) = \frac{\mathcal{E}^2}{r}$, если $R = r$, $P_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$.

Полная мощность $P = I \cdot \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}$ при $R = 0$, совпадает со значением P_2 и равна $\frac{\mathcal{E}^2}{r}$. Это случай короткого замыкания, когда вся мощность выделяется на внутреннем сопротивлении источника тока.

Если $R = r$ то $P = \frac{\mathcal{E}^2}{2r}$, вдвое больше, чем P_2, то есть половина полной мощности расходуется внутри самого источника тока, а половина выделяется на внешнем сопротивлении R.

С увеличением R полная мощность P и P_2 монотонно спадают (рис. 3в) при этом быстрее уменьшается мощность P_2, выделяемая внутри источника, что ведет к увеличению КПД с ростом R (рис. 3г).

Из графика (рис. 3в) для P_1 видно, что одна и та же полезная мощность может быть получена при двух значениях R, одно из которых (R_1) меньше, а другое (R_2) больше r.

Коэффициент полезного действия $\eta = \frac{P_1}{P} = \frac{I^2R}{I\mathcal{E}} = \frac{R}{R+r}$.

Когда $R = r$, $\eta = 0,5$, мы получаем максимальную полезную мощность.

5. При электролизе раствора нитрата серебра на катоде за 2 ч выделилось 18 г серебра. Напряжение на зажимах ванны 5 В, сопротивление раствора 2 Ом. ЭДС поляризации 0,5 В. Определите валентность серебра n и число атомов серебра N, выделившихся на катоде.

О т в е т: $n = 1$; $N = 10{,}12 \cdot 10^{22}$.

Решение. Используя объединенный закон Фарадея: $m = \frac{M}{Fn} I \cdot t$, находим валентность серебра: $n = \frac{M \cdot I \cdot t}{mF}$. Учитывая, что в цепи действует ЭДС поляризации, определим силу тока из закона Ома для участка цепи с ЭДС: $I = \frac{U - \mathcal{E}}{R}$, тогда $n = \frac{M(U-\mathcal{E})t}{mFR} = 1$.

Число атомов серебра $N = \frac{q}{e}$ (e — заряд електрона). Так как $q = It$, получаем: $N = \frac{(U-\mathcal{E})t}{R \cdot e}$; $N = \frac{(5-0,5)\cdot 7200}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 10{,}12 \cdot 10^{22}$.

6. В электролитической ванне с раствором сульфата цинка ($ZnSO_4$) сила тока изменяется по линейному закону $I = (2 + 0,04t)$. Сколько цинка выделилось на катоде за 5 минут после начала изменение силы тока?

О т в е т: $m = 5{,}1 \cdot 10^{-4}$ кг.

Решение. Воспользуемся первым законом Фарадея $m = kq$. Для определения количества электричества q, прошедшего через электролит, построим график изменения силы тока со временем.

Рис. 5

Учтем, что при $t = 0$, $I_0 = 2$ А. Для $t = 300$ с, $I = (2 + 0,2 \cdot 300)$ А $= 8$ А. График зависимости силы тока от времени дан на рис. 4. Количество электричества, прошедшее через электролит, равно площади заштрихованной фигуры $q = \frac{I_0 + I}{2} t$.

Масса цинка $m = k\frac{(I_0 + I)}{2} t = 5{,}1 \cdot 10^{-4}$ кг.

7. Определите массу меди, выделившейся на катоде за 10 с при протекании через раствор медного купороса тока, сила которого равномерно возрастает от 0 до 4 А.

Ответ: $m = 6{,}65 \cdot 10^{-6}$ кг.

Решение. По закону Фарадея $m = \frac{M}{Fn} q$, где $q = \int_0^{t_2} I dt$. По условию задачи $I = kt$, где k — коэффициент пропорциональности, равный $k = (I_2 - I_1)/(t_2 - t_1)$. Так как $I_1 = 0$, $t_1 = 0$, то $k = \frac{I_2}{t_2}$, $t_2 = 10$ с тогда $I = \frac{I_2}{t_2} t$, а $q = \int_0^{t_2} \frac{I_2}{t_2} t dt = \frac{I_2}{t_2} \int_0^{t_2} t dt = \frac{I_2}{t_2} \frac{t_2^2}{2} = \frac{I_2 t_2}{2}$.

Масса $m = \frac{M I_2 t_2}{2Fn} = 6{,}65 \cdot 10^{-6}$ кг.

8. Какой электрический заряд проходит через раствор нитрата серебра за 20 с, если за это время сила тока возрастает от 1 до 4 А? Сколько при этом серебра выделяется на катоде?

Ответ: $q = 50$ Кл; $m = 56$ мг.

Решение. Закон изменения силы тока $I = I_0 + kt$, где $k = (I - I_0)/t_2$; заряд $q = \int_0^{t_2} I dt = \int_0^{t_2} (I_0 + kt) dt = \int_0^{t_2} I_0 dt + \int_0^{t_2} \frac{(I - I_0)}{t_2} t dt = I_0 t_2 + \frac{(I - I_0)}{2} t_2 = 50$ Кл. Масса выделившегося на электроде серебра $m = Mq/Fn = 56$ мг.

9. Какая масса меди выделилась из раствора $CuSO_4$ за время $t = 100$ с, если ток, протекающий через электролит, менялся по закону $I = (5 - 0{,}02t)$ А.

Ответ: $m = 132$ мг.

Решение. По закону Фарадея $m = \frac{M}{Fn} q$,

где $q = \int_0^t I dt = \int_0^t (5 - 0{,}02t) dt = 5t - \frac{0{,}02t^2}{2}$;

масса $m = \frac{M}{Fn}(5t - 0{,}01t^2) = 13{,}2 \cdot 10^{-2}$ г $= 132$ мг.

10. Две лампочки с сопротивлениями при полном накале R_1 и R_2 (причем $R_2 > R_1$) последовательно включают в осветительную сеть. Которая из лампочек светит ярче? В обеих лампочках вольфрамовые нити.

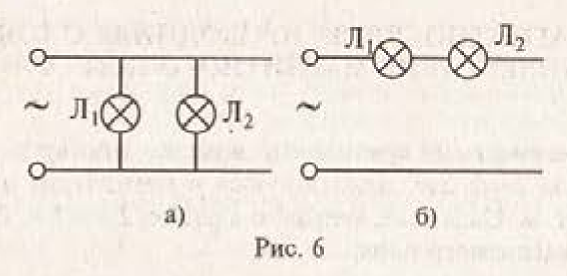


Рис. 6

Решение. Если включить лампочки, как обычно, т.е. параллельно (рис. 5а), то ярче будет светить лампочка с меньшим сопротивлением (Л$_1$). При параллельном включении напряжения на лампочках одинаковы, а следовательно, мощность, выделяемая на нити лампочки (от которой и зависит ее яркость), будет обратно пропорциональна сопротивлению: $Q_1 = \frac{U^2}{R_1}$, $Q_2 = \frac{U^2}{R_2}$, т. е. $Q_1 > Q_2$. Если же включить лампочки последовательно (рис. 5б), то теперь напряжения на них разные, а ток в лампочках один и тот же. Поэтому $Q_1 = I^2 R_1$, $Q_2 = I^2 R_2$, $Q_1 < Q_2$, т. е. ярче будет светить лампочка с большим сопротивлением.

11. Как на мосте Уитстона измерить сопротивление гальванометра $R_г$, который обычно включают в диагональ моста (рис. 6), не пользуясь вторым гальванометром?

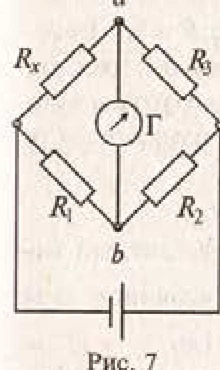


Рис. 7

Решение. Следует включить гальванометр в то плечо, в которое обычно включают искомое сопротивление R_x а в диагональ моста вместо гальванометра поставить ключ. Сопротивления R_1 и R_2 следует подобрать так, чтобы гальванометр давал одно и то же отклонение, как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе. Это будет означать, что тока в диагонали моста нет, и следовательно, соблюдено известное соотношение $R_г/R_3 = R_1/R_2$, откуда $R_г = \frac{R_3 R_1}{R_2}$.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Уровень I

26. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С ТОКОМ

26.1. Максимальный вращающий момент, действующий на рамку площадью $S = 2$ см², находящуюся в магнитном поле, равен $M_{max} = 4$ мкН · м. Сила тока, текущего в рамке, $I = 0,5$ А. Определите индукцию магнитного поля.

Ответ: $B = 0,04$ Тл.

Решение. Модуль вектора индукции магнитного поля

$B = \frac{M_{max}}{IS} = 0,04$ Тл.

26.2. Плоская прямоугольная катушка, состоящая из $N = 400$ витков, со сторонами $a = 8$ см и $b = 4$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,04$ Тл. Какой максимальный вращающий момент может действовать на катушку, если сила тока в ней $I = 1$ А?

Ответ: $M_{max} = 0,05$ Н · м.

Решение. Максимальный вращающий момент, действующий на катушку в магнитном поле $M_{max} = N \cdot IBS$, где $S = ab$.

Тогда $M_{max} = N \cdot IB \cdot ab = 0,05$ Н · м.

26.3. В однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл помещена квадратная рамка площадью $S = 25$ см². Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = 60°$. Определите вращающий момент, действующий на рамку, если по ней течет ток $I = 1$ А.

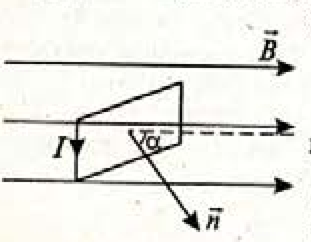


Рис. 26.1

Ответ: $M = 217$ мкН · м.

Решение. Вращающий магнитный момент $\vec{M} = [\vec{p}_m; \vec{B}]$ или в скалярном виде $M = p_m B \sin\alpha$ (рис. 26.1), где $p_m = IS$ — магнитный момент контура с током. $M = ISB\sin\alpha = 217$ мкН · м.

26.4. В условии предыдущей задачи найдите максимальный вращающий момент.

Ответ: $M = 250$ мкН · м.

Решение. Вращающий момент, действующий на рамку с током, максимальный, если угол между нормалью $\vec{n}$ и полем $\vec{B}$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\vec{n} \perp \vec{B}$. Тогда $M = ISB = 250$ мкН · м.

26.5. Рамка площадью $S = 400$ см² помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл так, что нормаль к рамке составляет с линиями индукции угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$. При какой силе тока на рамку действует вращающий момент $M = 20$ мН · м?

Ответ: $I = 5$ А.

Решение. Если $\vec{n} \perp \vec{B}$, вращающий момент максимальный. $B = \frac{M_{max}}{IS}$, откуда $I = \frac{M_{max}}{BS} = 5$ А.

26.6. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл находится прямоугольная рамка длиной $a = 8$ см и шириной $b = 5$ см, содержащая $N = 100$ витков тонкой проволоки. Ток в рамке 1 А, а плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции. Определите: 1) магнитный момент рамки; 2) вращающий момент, действующий на рамку.

Ответ: $p_m = 0,4$ А · м²; $M = 0,2$ Н · м.

Решение. Магнитный момент рамки $p_m = NIS = 0,4$ А · м², а вращающий момент $M_{max} = p_m B = 0,2$ Н · м (так как $\vec{n} \perp \vec{B}$).

26.7. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам, находящимся на расстоянии $R = 10$ см друг от друга в вакууме, текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А одинакового направления. Определите магнитную индукцию B поля, создаваемого токами в точках, лежащих на прямой, соединяющей оба провода, если: 1) точка C лежит на расстоянии $r_1 = 2$ см левее левого провода; 2) точка D лежит на расстоянии $r_2 = 3$ см правее правого

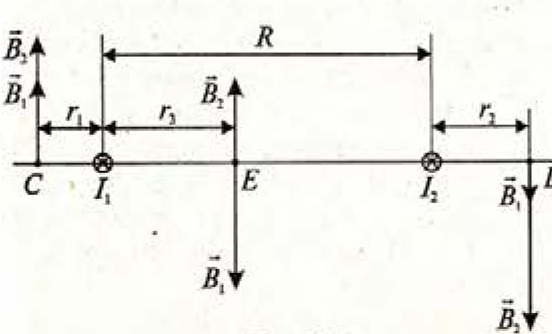


Рис. 26.2

провода; 3) точка E лежит на расстоянии $r_3 = 4$ см правее левого провода.

Ответ: 1) $B_1' = 0{,}25$ мТл; 2) $B_2' = 0{,}23$ мТл; 3) $B_3' = 0$.

Решение. Согласно принципу суперпозиции полей $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ (рис. 26.2). Индукция магнитного поля тока I, текущего по бесконечно длинному проводнику на расстоянии r от него $B = \dfrac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$.

При $\mu = 1$ (вакуум) $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

1) $B_1' = B_1 + B_2 = \mu_0 I_1/2\pi r_1 + \mu_0 I_2/2\pi(R + r_1) = 0{,}25$ мТл;

2) $B_2' = B_1 + B_2 = \mu_0 I_1/2\pi(R + r_2) + \mu_0 I_2/2\pi r_2 = 0{,}23$ мТл;

3) $B_3' = B_1 - B_2 = \mu_0 I_1/2\pi r_3 - \mu_0 I_2/2\pi(R - r_3) = 0$.

26.8. По двум длинным параллельным проводам, расстояние между которыми $d = 16$ см, текут в противоположных направлениях токи по $I = 30$ А. Определите индукцию магнитного поля в точке, расстояние от которой до обоих проводов одинаково и равно $r = 10$ см.

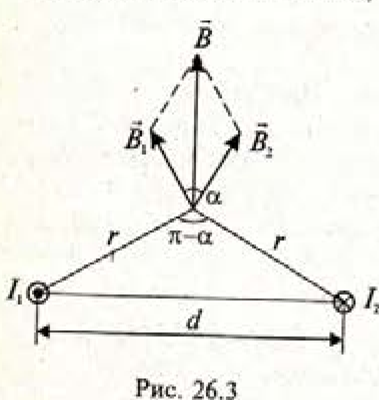


Рис. 26.3

Ответ: $B = 96$ мкТл.

Решение. По принципу суперпозиции $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ (рис. 26.3). Модуль вектора $\vec{B}$ находится по теореме косинусов $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}$, где

$B_1 = B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $\cos\alpha = \dfrac{d^2 - 2r^2}{2r^2} = 0{,}28$.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sqrt{2 + 0{,}56} = 1{,}6 \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot I}{2\pi r} = 96 \text{ мкТл}.$$

26.9. Два параллельных бесконечно длинных провода A и C, по которым текут в одном направлении токи, силой $I = 62$ А каждый, расположены на расстоянии $d = 0{,}11$ м друг от друга. Определите индукцию и напряженность магнитного поля в точке M, отстоящей от одного проводника на расстояние $r_1 = 0{,}055$ м и от другого на расстояние $r_2 = 0{,}12$ м (рис. 26.4).

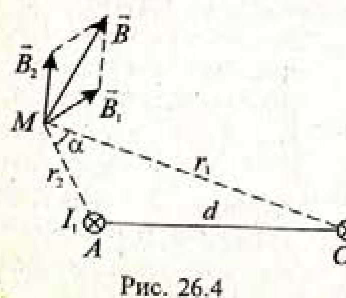


Рис. 26.4

Ответ: $B = 2{,}8 \cdot 10^{-4}$ Тл;
$H = 2{,}2 \cdot 10^2$ А/м.

Решение. По аналогии с предыдущей задачей индукция в точке

$$M: B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha} = 2{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}, \; \cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2} = 0{,}403.$$

Напряженность магнитного поля в точке M: $H = \dfrac{B}{\mu_0} = 2{,}2 \cdot 10^2$ А/м.

26.10. По трем длинным прямым проводам, расположенным в одной плоскости, параллельно на расстоянии $r = 3$ см друг от друга, текут в одном направлении токи $I_1 = I_2$ и $I_3 = 2I_1$. Определите положение точки на прямой, соединяющей все провода, в которой индукция магнитного поля, создаваемого токами, равна нулю.

Рис. 26.5

Ответ: $x_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ м правее тока I_2;
$x_2 = -1{,}9 \cdot 10^{-2}$ м левее тока I_2.

Решение. Согласно условию задачи $B_1 + B_2 = B_3$. $B_1 = \mu_0 I_1/2\pi(r + x)$,

$B_2 = \mu_0 I_2/2\pi x$, $B_3 = \mu_0 I_3/2\pi(r - x)$.

Учтя, что $I_1 = I_2 = I$, а $I_3 = 2I$,

имеем $1/(r + x) + 1/x = 2/(r - x)$, откуда

$x_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ м, $x_2 = -1{,}92 \cdot 10^{-2}$ м, т. е. точка с $B = 0$ может располагаться слева от тока I_2 ($x_2 = -1{,}92 \cdot 10^{-2}$ м) или справа от него ($x_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ м) (рис. 26.5).

26.11. Три длинных параллельных проводника с током силой по $I = 5$ А в каждом пересекают перпендикулярно к ним плоскость в точках, являющихся вершинами правильного треугольника со стороной $a = 0{,}1$ м. Определите индукцию магнитного поля в центре треугольника, если: а) токи в проводниках имеют одинаковое

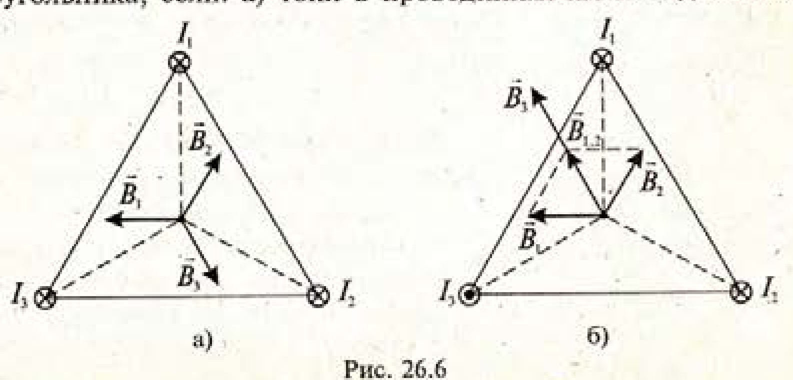


Рис. 26.6

направление; б) направление тока в одном из проводников противоположно направлению токов в двух других.

Ответ: а) $B = 0$; б) $B = 34{,}6$ мкТл.

Решение. а) Векторы $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ расположены по отношению друг к другу под углом 120°, их результирующий вектор $\vec{B} = 0$, его модуль $B = 0$ (рис. 26.6а).

б) Индукция магнитного поля $B = 2B_3$ (рис. 26.6б), т. к. вектор $\vec{B}_{12}$ — результирующий векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ (равных по модулю) совпадает с $\vec{B}_3$ по направлению, и модули их также равны. $B = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где $r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Тогда $B = 2\frac{4\pi\cdot 10^{-7} I\cdot 3}{2\pi a\sqrt{3}} = 34{,}6\,\text{мкТл}$.

26.12. Определите магнитную индукцию в центре кругового проволочного витка радиусом $R = 10$ см, по которому течет ток $I = 1$ А.

Ответ: $B = 6{,}28$ мкТл.

Решение. Магнитная индукция в центре кругового проводника с током $B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7} I}{2R} = 6{,}28\,\text{мкТл}$.

26.13. По двум одинаковым круговым виткам радиусом $R = 5$ см, плоскости которых взаимно перпендикулярны, а центры совпадают, текут одинаковые токи $I = 2$ А. Найдите индукцию магнитного поля в центре витков.

Ответ: $B = 35{,}4$ мкТл.

Решение. Согласно принципу суперпозиции $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$; направления векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ находятся по правилу буравчика. Так как $B_1 = B_2$, вектор $\vec{B}_1$ составляет с плоскостями обоих витков углы по 45°. $B = \sqrt{2}B_1 = \sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{2R} = 35{,}4\,\text{мкТл}$.

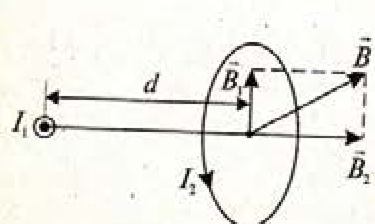


Рис. 26.7

26.14. Круговой виток радиусом $R = 15$ см расположен относительно бесконечно длинного провода так, что его плоскость параллельна проводу. Перпендикуляр, восставленный на провод из центра витка, является нормалью к плоскости витка. Сила тока в проводе $I_1 = 1$ А, сила тока в

витке $I_2 = 5$ А. Расстояние от центра витка до провода $d = 20$ см. Определить магнитную индукцию в центре витка.

Ответ: $B = 21{,}2$ мкТл.

Решение. Магнитная индукция в центре витка $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$; (рис. 26.7), где $B_1 = \mu_0\frac{I_1}{2\pi d}$, $B_2 = \mu_0\frac{I_2}{2R}$.

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \mu_0\sqrt{\frac{I_1^2}{(2\pi d)^2} + \frac{I_2^2}{(2R)^2}} = 21{,}2\,\text{мкТл}.$$

26.15. Почему два параллельных проводника, по которым идут токи в одном направлении, притягиваются, а два параллельных катодных пучка — отталкиваются?

Решение. В проводниках объемный электрический заряд равен нулю, поэтому проявляются только магнитные силы — силы взаимодействия между движущимися зарядами. В катодных пучках преобладают силы отталкивания между одноименными зарядами.

26.16. Проводник с током помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 20$ мТл. Определите силу, действующую на этот проводник, если его длина $l = 0{,}1$ м, ток $I = 3$ А, а угол между направлением тока и вектором $\vec{B}$ $\alpha = 45°$.

Ответ: $F = 4{,}2$ мН.

Решение. На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера $F_A = BIl\sin\alpha$, где α — угол между направлением проводника l и полем $\vec{B}$. $F_A = BIl\sin 45° = 4{,}2\,\text{мН}$.

26.17. В горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл подвешен на двух легких нитях горизонтальный проводник длиной $l = 10$ см, перпендикулярный магнитному полю. Как изменится сила натяжения каждой из нитей, если по проводнику пропустить ток силой $I = 10$ А?

Ответ: $\Delta T = 10$ мН.

Решение. Первоначально силы натяжения нитей уравновешивались силой тяжести проводника. После пропускания по проводнику тока, сила натяжения каждой из нитей изменится на величину, равную силе Ампера. $\Delta T = BIl = 10\,\text{мН}$.

26.18. По горизонтальному проводнику длиной $l = 20$ см и массой $m = 2{,}0$ г течет ток силой $I = 5$ А. Определите магнитную индукцию B

магнитного поля, в которое нужно поместить проводник, чтобы он висел не падая.

Ответ: $B = 19{,}6$ мТл.

Решение. Чтобы проводник висел не падая, необходимо, чтобы сила тяжести проводника была уравновешена силой Ампера, т. е. $mg = BIl$. Откуда $B = \frac{mg}{Il} = 19{,}6$ мТл.

26.19. Проводник длиной l и массой m подвешен на тонких проволочках. При прохождении по нему тока силой I он отклонился в однородном вертикальном магнитном поле так, что проволочки образовали угол α с вертикалью. Какова индукция магнитного поля?

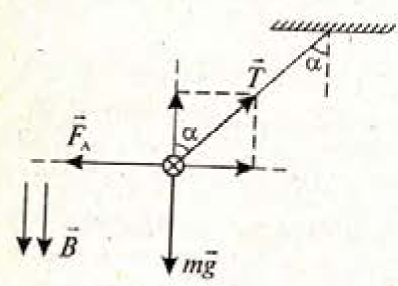


Рис. 26.8

Ответ: $B = \frac{mg \cdot \text{tg}\alpha}{Il}$.

Решение. На проводник действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, силы натяжения нити двух проволочек $\vec{T}$ и сила Ампера $\vec{F}_A = [\vec{B}; \vec{Il}]$ со стороны магнитного поля (рис. 26.8). При равновесии проводника суммы проекций сил (с учетом знаков) на вертикальное и горизонтальное направления равны нулю: $mg - T\cos\alpha = 0$, $F - T\sin\alpha = 0$; отсюда $\text{tg}\alpha = \frac{F}{mg} = \frac{BIl}{mg}$, а $B = \frac{mg \cdot \text{tg}\alpha}{Il}$.

26.20. В однородном магнитном поле, индукция которого равна 2*Тл* и направлена под углом 30° к вертикали, вертикально вверх движется прямой проводник массой 2 кг, по которому течет ток 4 А. Через 3 с после начала движения проводник имеет скорость 10 м/с. Определите длину проводника.

Ответ: $l = 6{,}57$ м.

Решение. Уравнение движения стержня $ma = F_A - mg$, $m\frac{v}{t} = BIl\sin\alpha - mg$, откуда $l = \frac{m\frac{v}{t} + mg}{BI\sin\alpha} = 6{,}57$ м.

26.21. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 4 \cdot 10^{-2}$ Тл, вектор $\vec{B}$ направлен под углом $\beta = 30°$ к вертикали. По вертикальным проводам без трения движется вверх прямой проводник массой

10 г, по которому течет ток 3 А. Через 5 с после начала движения проводник имеет скорость 20 м/с. Определить длину проводника.

Ответ: $l = 2{,}33$ м.

Указание. См. решение предыдущей задачи.

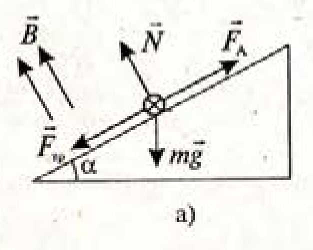
26.22. На горизонтальных рельсах, расстояние между которыми $l = 60$ см, лежит перпендикулярно им стержень. Определите силу тока, который надо пропустить по стержню, чтобы он начал двигаться. Рельсы и стержень находятся в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 60$ мТл. Масса стержня $m = 0{,}5$ кг, коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0{,}1$.

Ответ: $I = 13{,}6$ А.

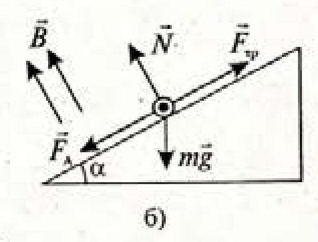
Решение. Чтобы стержень двигался равномерно, необходимо, чтобы $F_{тр} = F_A$, $F_{тр} = \mu mg$, $F_A = BIl$. $\mu mg = BIl$, откуда $I = \frac{\mu mg}{Bl} = 13{,}6$ А.

26.23. Стержень лежит перпендикулярно рельсам, расстояние между которыми $l = 50$ см. Рельсы составляют с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Какой должна быть индукция магнитного поля, перпендикулярного плоскости рельсов, чтобы стержень начал двигаться, если по нему пропускать ток силой $I = 40$ А? Коэффициент трения скольжения $\mu = 0{,}6$. Масса стержня $M = 1$ кг.

Ответ: $B_1 = 0{,}5$ Тл; $B_2 = 9{,}6$ мТл.



а)



б)

Рис. 26.9

Решение. На стержень действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила Ампера $\vec{F}_A$. В зависимости от направления тока сила Ампера будет направлена вверх (ток направлен за плоскость чертежа, от нас, рис. 26.9а), тогда $\vec{F}_{тр}$ направлена вниз по наклонной плоскости; или вниз (ток направлен к нам, рис. 26.9б), тогда $\vec{F}_{тр}$ направлена вверх по наклонной плоскости. $F_A = F_{тр} \pm \mu mg\cos\alpha$; $BIl = \mu mg\cos\alpha \pm mg\sin\alpha$;

$$B_1 = \frac{Mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{Il} = 0{,}5 \text{ Тл}; \quad B_2 = \frac{Mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{Il} = 9{,}6 \text{ мТл}.$$

26.24. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 5 \cdot 10^{-4}$ Тл перпендикулярно силовым линиям со скоростью $\upsilon = 10^6$ м/с. По какой траектории будет двигаться электрон? Чему равна работа силы, действующей на электрон?

Ответ: Окружность радиуса $R = 11$ мм; $A = 0$.

Решение. На движущийся в магнитном поле электрон действует сила Лоренца $F_Л = e\upsilon B$, которая сообщает электрону центростремительное ускорение. $e\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{R}$, откуда $R = \frac{m\upsilon}{eB} = 0{,}011\text{ м} = 11\text{ мм}$. Сила, действующая на электрон, перпендикулярна его скорости и не совершает работы.

26.25. Протон описал окружность радиусом $R = 5$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 20$ мТл. Определите скорость протона.

Ответ: $\upsilon = 96$ км/с.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $\upsilon = \frac{eBR}{m} = 9{,}6$ км/с.

26.26. Электрон и протон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, попадают в однородное магнитное поле. Сравните радиусы кривизны траекторий электрона и протона.

Ответ: $R_2 = 43R_1$.

Решение. Для электрона $eU = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2}$ и $e\upsilon_1 B = \frac{m_1\upsilon_1^2}{R_1}$, тогда $R_1^2 = \frac{2m_1U}{eB^2}$. Аналогично для протона $R_2^2 = \frac{2m_2U}{eB^2}$. $\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{m_2}{m_1}$, а $R_2 = R_1\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = 43R_1$. Радиус кривизны траектории протона в 43 раза больше радиуса кривизны траектории электрона.

26.27. Движущийся электрический заряд можно рассматривать как электрический ток. Определите магнитный момент кругового тока, образованного электроном, влетевшим под прямым углом со скоростью $\upsilon = 10M$ м/с в однородное магнитное поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-4}$ Тл.

Ответ: $p_m = 0{,}23\pi\text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Решение. Магнитный момент $p_m = IS = \frac{q}{T}S = \frac{q\upsilon}{2\pi R}\pi R^2 = \frac{q\upsilon R}{2}$.

Сила Лоренца, действующая на заряженную частицу, $Bq\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{R}$.

Откуда следует $q\upsilon R = \frac{m\upsilon^2}{B}$. Тогда $p_m = \frac{m\upsilon^2}{2B} = 0{,}23\pi\text{ А} \cdot \text{м}^2$.

26.28. Электрон, прошедший ускоряющуюся разность потенциалов $U = 1$ кВ, влетает в вакууме в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Определите радиус окружности, описываемой электроном в поле.

Ответ: $R = 0{,}01$ м.

Решение. Сила Лоренца, действующая на электрон, движущийся в магнитном поле, сообщает ему центростремительное ускорение $a_ц = \frac{\upsilon^2}{R}$. Тогда $e\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{R}$. Пролетев ускоряющуюся разность потенциалов U, электрон приобрел энергию $\frac{m\upsilon^2}{2} = eU$. Решив совместно два уравнения, получим $R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{m}{e}2U} = 0{,}01\text{м}$.

26.29. Протон влетает в однородное магнитное поле $B = 30$ мТл со скоростью $\upsilon = 2$ Мм/с под углом $\alpha = 30°$ к линиям магнитной индукции. Траектория частицы представляет собой винтовую линию. Определите радиус и шаг этой винтовой линии.

Ответ: $R = 0{,}7$ м; $h = 2{,}06$ мм.

Решение. На заряженную частицу, влетевшую в магнитное поле, действует сила Лоренца $\vec{F}_Л$, перпендикулярная векторам магнитной индукции $\vec{B}$ и скорости частицы $\vec{\upsilon}$. Модуль силы Лоренца $F = q\upsilon B\sin\alpha$, где $q = |e|$ — заряд протона. Протон, влетевший в магнитное поле, будет двигаться по окружности, в плоскости? перпендикулярной линиям индукции, со скоростью $\upsilon_y = \upsilon\sin\alpha$. Одновременно он будет двигаться вдоль поля со скоростью $\upsilon_x = \upsilon\cos\alpha$. В результате одновременного участия в движениях

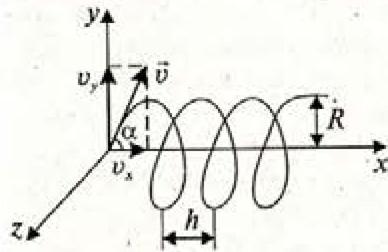


Рис. 26.10

по окружности и прямой электрон будет двигаться по винтовой линий (рис. 26.10). Сила Лоренца сообщает протону центростремительное ускорение $e\upsilon_y B = \frac{m\upsilon_y^2}{R}$, откуда $R = \frac{m\upsilon_y}{eB} = \frac{m\upsilon\sin\alpha}{eB} = 0{,}7\text{ м}$.

Шаг винтовой линии $h = v_x T$, где T — период вращения протона.
$h = \frac{2\pi R v_x}{v_y} = \frac{2\pi R v\cos\alpha}{v\sin\alpha} = 2\pi R\operatorname{ctg}\alpha = 2,06$ мм.

26.30. Объясните действие «фильтра скоростей», показанного на рис. 26.11. Внутри устройства созданы однородные поля: магнитное с индукцией $\vec{B}$ и электрическое с напряженностью $\vec{E}$. Поля направлены перпендикулярно одно к другому и к начальной скорости частиц.

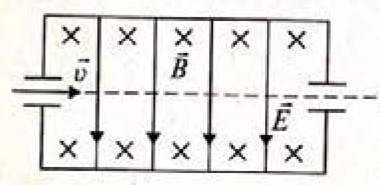


Рис. 26.11

Решение. Сила Лоренца $\vec{F}_Л$ и кулоновская сила $\vec{F}_К$ направлены в противоположные стороны. Если эти силы не уравновешивают одна другую, частица отклоняется вверх или вниз и не попадет в выходное отверстие. Таким образом, условие прохождения частицы через устройство имеет вид $\vec{F}_К = -\vec{F}_Л$, откуда $qBv = qE$, а $v = \frac{E}{B}$. Заметим, что это условие одинаково для всех заряженных частиц, независимо от их зарядов и масс.

26.31. Пучок однозарядных ионов проходит «фильтр скоростей» (см. предыдущую задачу), в котором $E = 500$ В/м и $B = 0,1$ Тл, и попадает затем в область однородного магнитного поля с индукцией $B_1 = 60$ мТл (рис. 26.12). Ионы влетают в поле под прямым углом к направлению вектора $\vec{B}_1$. На каком расстоянии x один от другого окажутся ионы двух разных изотопов неона с относительной атомной массой 20 и 22, пройдя половину окружности?

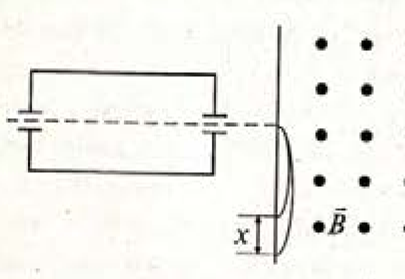


Рис. 26.12

Ответ: $x = 3,5 \cdot 10^{-3}$ м.

Решение. Скорости всех ионов (см. предыдущую задачу) $v = \frac{E}{B}$. Массы ионов $m_1 = A_1 m_0$, $m_2 = A_2 m_0$, где $m_0 = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг — атомная единица массы. Учтем, что заряд одновалентного иона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. В магнитном поле на ионы действуют силы Лоренца: $F_{Л_1} = evB_1$, $F_{Л_2} = evB_1$. Эти силы сообщают ионам центростремительное ускорение, вследствие чего ионы движутся по окружностям радиусами R_1 и R_2. Согласно второму

закону Ньютона: $evB_1 = \frac{m_1 v^2}{R_1}$; $evB_1 = \frac{m_2 v^2}{R_2}$; $R_1 = \frac{m_1 v}{eB_1} = \frac{m_0 A_1 E}{eB_1 B}$; $R_2 = \frac{m_0 A_2 E}{eB_1 B}$. Так как $A_2 > A_1$, то $R_2 > R_1$ (см. рис. 26.12). Расстояние между пучками равно разности диаметров полуокружностей, т. е. $x = 2(R_2 - R_1) = \frac{2m_0 E(A_2 - A_1)}{eB_1 B} = 3,5 \cdot 10^{-3}$ м.

26.32. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 300$ В, движется параллельно прямолинейному проводнику на расстоянии $d = 4$ мм от него. Какая сила будет действовать на электрон, если по проводнику пустить ток $I = 5$ А?

Ответ: $F = 4,1 \cdot 10^{-16}$ Н.

Решение. Электрон движется в магнитном поле с индукцией $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$, создаваемом проводником с током. Ускоренный разностью потенциалов U, электрон приобрел скорость v. $eU = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Действующая на электрон сила Лоренца $F_Л = evB = e\sqrt{\frac{2eU}{m}} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = 4,1 \cdot 10^{-16}$ Н.

26.33. Заряженная частица влетает под углом α к направленным параллельно электрическому и магнитному полям. Как будет двигаться частица?

Ответ: Заряженная частица будет двигаться по спирали с увеличивающимся шагом (расстояние между витками). Ось спирали параллельна векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Указание. Электрическое поле сообщает заряженной частице ускорение, параллельное направлению вектора $\vec{E}$, а магнитное — изменяет направление скорости в плоскости, перпендикулярной $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

26.34. Однородные магнитное и электрическое поля расположены взаимно перпендикулярно. Напряженность электрического поля $E = 0,5$ кВ/м, а индукция магнитного поля $B = 1$ мТл. Определите, с какой скоростью и в каком направлении должен лететь электрон, чтобы двигаться прямолинейно.

Ответ: $v = 0,5$ Мм/с.

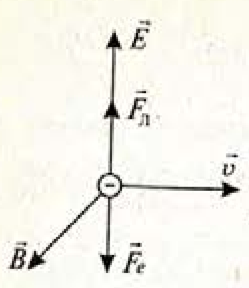


Рис. 26.13

Решение. На электрон со стороны электрического поля действует сила $\vec{F}_e = q\vec{E} = -|e|\vec{E}$, которая направлена противоположно линиям напряженности электрического поля. В магнитном поле на электрон, движущийся со скоростью $\vec{v}$, действует сила Лоренца

$$F_л = |q|vB\sin\alpha = evB.$$

Чтобы электрон двигался прямолинейно, эти силы должны быть одинаковы по модулю и противоположны по направлению, а скорость электрона $\vec{v}$ должна быть перпендикулярна как вектору $\vec{E}$, так и вектору $\vec{B}$ (см. рис. 26.13). Тогда $|\vec{F}_л| = |\vec{F}_e|$, $eE = evB$, $v = \frac{E}{B} = 0{,}5$ Мм/с.

26.35. Циклотрон предназначен для ускорения протонов до энергии $W = 5$ МэВ. Определите наибольший радиус орбиты, по которой движется протон, если индукция магнитного поля равна $B = 1$ Тл.

Ответ: $R = 0{,}32$ *м*.

Решение. Скорость движения протона v определяется энергией $\frac{mv^2}{2} = W$, откуда $v = \sqrt{\frac{2W}{m}}$. Сила Лоренца $F_л = evB$ сообщает протону центростремительное ускорение $a_ц = \frac{v^2}{R}$. $evB = \frac{mv^2}{R}$, тогда $R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{eB}\sqrt{2mW} = 0{,}32$ м.

26.36. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}6$ Тл, движется равномерно проводник длиной $l = 20$ *см*. По проводнику течет ток силой $I = 4$ А. Скорость движения проводника $v = 0{,}2$ м/с направлена перпендикулярно к силовым линиям индукции магнитного поля. Определите работу перемещения проводника за $t = 10$ с движения и мощность, необходимую для осуществления этого движения.

Ответ: $A = 0{,}96$ Дж; $P = 0{,}96$ Вт.

Решение. На проводник с током в магнитном поле действует сила $F = IBl\sin\alpha$. По условию задачи $\alpha = 90°$, $\sin\alpha = 1$. Работа перемещения проводника $A = FS$, где S — путь, пройденный проводником. Учитывая, что $S = vt$, получим $A = IBl \cdot vt = 0{,}96$ Дж, $P = \frac{A}{t} = Fv = IBlv = 0{,}96$ Вт.

27. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. САМОИНДУКЦИЯ

27.1. Индукция однородного магнитного поля $B = 0{,}5$ Тл. Найдите магнитный поток через площадку $S = 25$ см² расположенную перпендикулярно к линиям индукции. Чему будет равен магнитный поток, если площадку повернуть на угол $\varphi = 60°$ от первоначального положения?

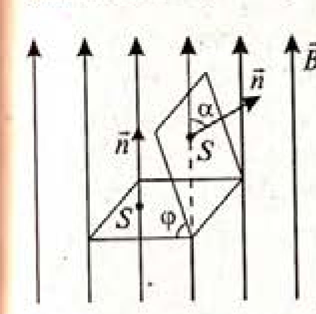


Рис. 27.1

Ответ: $\Phi_1 = 1{,}25$ мВб; $\Phi_2 = 625$ мкВб.

Решение. На рис. 27.1 показано направление магнитной индукции и положение площадки в обоих случаях. По определению магнитный поток $\Phi = BS\cos\alpha$, где α — угол между нормалью $\vec{n}$ к площадке и направлением магнитной индукции $\vec{B}$. В первом случае $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ и $\Phi = BS = 1{,}25$ мВб; во втором случае $\alpha = \varphi$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами) и $\Phi = BS\cos\varphi = 625$ мкВб.

27.2. Определите поток вектора магнитной индукции, пронизывающий плоскую поверхность площадью $S = 100$ см² при индукции $B = 0{,}2$ Тл, если поверхность: а) перпендикулярна вектору магнитной индукции; б) параллельна; в) расположена под углом $\beta_1 = 45°$ к вектору магнитной индукции; г) расположена под углом $\beta_2 = 30°$ к вектору магнитной индукции.

Ответ: а) $\Phi = 2$ мВб; б) $\Phi = 0$; в) $\Phi = 1{,}4$ мВб; г) $\Phi = 1$ мВб.

Решение. Величина магнитного потока $\Phi = BS\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{n}$ (нормаль к поверхности S).

а) $\Phi = BS = 2$ мВб.

б) $\Phi = BS\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

в) $\Phi = BS\cos(90° - \beta_1) = BS\cos45° = 1{,}4$ мВб.

г) $\Phi = BS\cos(90° - \beta_2) = BS\cos60° = 1$ мВб.

27.3. Какие явления происходят в кольце, если в него вдвигают магнит? Рассмотрите случаи, когда кольцо сделано из: а) проводника; б) диэлектрика; в) сверхпроводника.

Решение. При движении магнита происходит изменение потока индукции магнитного поля через кольцо, что приводит к появлению вихревого электрического поля. В проводящем кольце электрическое поле приводит к возникновению индукционного тока,

который после исчезновения вихревого поля гаснет; в диэлектрическом кольце оно приводит к поляризации диэлектрика; в кольце из сверхпроводника индуцируемый ток течет неограниченно долго (если, конечно, внешнее магнитное поле постоянно).

27.4. Какие явления происходят в стержне, если он передвигается в постоянном магнитном поле под углом к силовым линиям? Рассмотрите случаи, когда стержень сделан из: а) проводника; б) диэлектрика.

Указание. См. решение предыдущей задачи. а) В проводнике происходит разделение зарядов. б) Диэлектрик поляризуется.

27.5. Прямой магнит падает сквозь замкнутый соленоид. Будет ли такое падение свободным?

Ответ: Нет.

Решение. Сила взаимодействия с наведенными в витках соленоида токами по правилу Ленца тормозит падение магнита.

27.6. Магнит падает вниз по длинной медной трубке. Опишите характер падения. Магнит с трубкой не соприкасается, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Магнит будет падать так, как если бы он двигался в вязкой жидкости. При движении магнита в трубке возникает ЭДС индукции тем большая, чем больше скорость падения магнита. При этом возникает магнитное поле, противодействующие движению магнита. Ускорение магнита постепенно уменьшается и в конце концов (если трубка достаточно длинная) движение магнита станет практически равномерным.

27.7. Прямоугольная проволочная рамка равномерно вращается вокруг неподвижной оси. Параллельно этой оси расположен проводник, по которому течет ток (рис. 27.2). При каких положениях рамки в ней возникает минимальная ЭДС индукции? Максимальная?

Рис. 27.2

Ответ: Минимальная (равна нулю) — когда рамка находится в плоскости, которая проходит через ось вращения и провод; максимальная — когда плоскость рамки перпендикулярна к первоначальной плоскости.

Решение. ЭДС индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока через рамку. Эта скорость равна нулю, когда рамка и провод лежат в одной плоскости; при этом боковые стороны рамки не пересекают линий магнитной индукции, а «скользят» вдоль их.

27.8. Соленоид, содержащий $N = 10^3$ витков провода, находится в однородном магнитном поле, индукция которого изменяется со скоростью $\Delta B/\Delta t = 20$ мТл/с. Ось соленоида составляет с вектором индукции магнитного поля угол $\alpha = 60°$. Радиус соленоида $r = 2$ см. Определить ЭДС индукции, возникающей в соленоиде.

Ответ: $|\mathcal{E}| = 12{,}5$ мВ.

Решение. Согласно основному закону электромагнитной индукции $|\mathcal{E}| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} N = \frac{\Delta B}{\Delta t} S \cos\alpha \cdot N = 12{,}5$ мВ.

27.9. Рамка в виде равностороннего треугольника помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}08$ Тл. Нормаль к плоскости рамки составляет с линиями индукции магнитного поля угол $\alpha = 30°$. Найдите длину стороны рамки a, если в рамке при выключении поля в течение $\Delta t = 0{,}03$ с индуцируется ЭДС $\mathcal{E} = 10$ мВ.

Ответ: $a = 0{,}1$ м.

Решение. Согласно основному закону электромагнитной индукции $\mathcal{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$.

Изменение магнитного потока $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -BS\cos\alpha$, т. к. $\Phi_2 = 0$. $S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ — площадь рамки. $\mathcal{E} = \frac{BS\cos\alpha}{\Delta t} = \frac{Ba^2\sqrt{3}}{4\Delta t}\cos\alpha.$

Отсюда $a = 2\left(\frac{\mathcal{E}\Delta t}{\sqrt{3}B\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}1$ м.

27.10. Плоский виток площадью $S = 10$ см² помещен в однородное магнитное поле перпендикулярно к линиям магнитной индукции. Сопротивление витка $R = 1$ Ом. Какой ток I протечет по витку, если магнитная индукция поля будет убывать со скоростью $\Delta B/\Delta t = 0{,}01$ Тл/с?

Ответ: $I = 10$ мкА.

Решение. Исходя из основного закона электромагнитной индукции $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$ и используя закон Ома $I = \mathcal{E}/R$, получаем: $|I| = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t}$. $\Delta\Phi = \Delta B \cdot S$, $|I| = \frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot\frac{S}{R} = 10$ мкА.

27.11. Виток медного провода помещен в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Диаметр витка $D = 20$ см, диаметр провода $d = 2$ мм. С какой скоростью изменяется индукция магнитного поля, если по кольцу течет ток силой $I = 5$ А?

Ответ: $\Delta B/\Delta t = 0,54$ Тл/с.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{IR}{S}$, где $R = \frac{\rho l}{S_1} = \frac{\rho \pi D \cdot 4}{\pi d^2}$, $S = \frac{\pi D^2}{4}$, $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{16 \rho I}{\pi D d^2} = 0,54$ Тл/с.

27.12. Катушка сопротивлением 100 Ом, площадью сечения 5 см², состоящая из 1000 витков, внесена в однородное внешнее магнитное поле. В течение некоторого времени индукция магнитного поля уменьшилась от 0,8 до 0,3 Тл. Какой заряд индуцирован в проводнике за это время?

Ответ: $q = 2,5 \cdot 10^{-4}$ Кл.

Решение. Используем основной закон электромагнитной индукции и закон Ома. $|\mathscr{E}| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \cdot N$; $\Delta \Phi = |\Delta B| \cdot S$, $\mathscr{E} = IR$, $\frac{N|\Delta B|S}{\Delta t} = IR$, откуда $q = I\Delta t = \frac{N|\Delta B|S}{R} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ Кл.

27.13. В короткозамкнутую катушку один раз быстро, другой — медленно вдвигают магнит. Определить: а) одинаковое ли количество электричества проходит через катушку в первый и во второй раз; б) одинаковую ли работу против электромагнитных сил совершает сила руки, вдвигающая магнит?

Ответ: а) Одинаковое; б) в первом случае больше.

Решение. Индуцируемое количество электричества $q = It = \frac{\mathscr{E}}{R} t = \frac{\Delta \Phi}{R}$, где R — сопротивление катушки. В обоих случаях q одинаково. Совершаемая работа равна $A = q\mathscr{E}$. При быстром вдвигании магнита ЭДС индукции больше, а следовательно, больше и работа.

27.14. В средине витка радиусом $r = 5$ см магнитный поток изменяется на $\Delta \Phi = 18,6$ мВб за $\Delta t = 5,9$ мс. Найдите напряженность вихревого электрического поля в витке.

Ответ: $E = 10$ В/м.

Решение. Напряженность электрического поля в витке $E = \frac{|\mathscr{E}|}{l}$, где $l = 2\pi r$ — длина витка. $|\mathscr{E}| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$; $E = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t \cdot 2\pi r} = 10$ В/м.

27.15. В магнитное поле индукцией $B = 0,1$ Тл помещен виток медного провода $R = 3,4$ см. Площадь поперечного сечения провода $S = 1$ мм², удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Нормаль к плоскости витка совпадает с линиями индукции поля. Какой заряд пройдет через поперечное сечение проводника при исчезновении поля?

Ответ: $q = 0,1$ Кл.

Решение. $q = I \cdot \Delta t$; $I = \frac{\mathscr{E}}{R}$, где $\mathscr{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$; $\Delta \Phi = \Delta B \cdot S_1 = (B_2 - B_1) S_1 = -B_1 S_1$ ($B_2 = 0$ — поле исчезло), $S_1 = \pi r^2$ — площадь, охватываемая контуром. Сопротивление проводника $R = \rho \frac{l}{S}$, $l = 2\pi r$. Величина заряда прошедшего через контур $q = I \cdot \Delta t = \frac{\mathscr{E}}{R} \Delta t = \frac{B_1 \pi r^2 \cdot S \Delta t}{\Delta t \cdot \rho 2\pi r} = \frac{BrS}{2\rho} = 0,1$ Кл.

27.16. Виток провода площадью $S = 50$ см² замкнут на конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ. Плоскость витка перпендикулярна однородному магнитному полю. Определите скорость изменения магнитного поля, если заряд на конденсаторе равен $q = 1$ нКл.

Ответ: $\Delta B/\Delta t = 10$ мТл/с.

Решение. Из основного закона электромагнитной индукции $|\mathscr{E}| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta B}{\Delta t} S$ следует $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{|\mathscr{E}|}{S}$. Емкость $C = \frac{q}{\mathscr{E}}$, тогда $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{q}{CS} = 10$ мТл/с.

27.17. Определите ЭДС индукции в проводнике длиной $l = 20$ см, движущемся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл со скоростью $\upsilon = 1$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к вектору магнитной индукции.

Ответ: $\mathscr{E} = 1$ мВ.

Решение. Площадь, «заметаемая» проводником за время Δt, равна $\Delta S = lv\sin\alpha \cdot \Delta t$. Магнитный поток через эту площадь $\Delta\Phi = B\Delta S$.

ЭДС индукции $|\mathcal{E}| = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv\sin\alpha = 1$ мВ.

27.18. Реактивный самолет летит горизонтально со скоростью $v = 900$ км/ч. Определите разность потенциалов между концами его крыльев, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $B_0 = 50$ мкТл, размах крыльев $l = 24$ м. Можно ли на самолете измерить эту разность потенциалов?

Ответ: $\Delta\varphi = 0,3$ В.

Решение. За время Δt крылья самолета «заметают» площадь $\Delta S = lv\Delta t$. Магнитный поток через эту площадь $\Delta\Phi = B\cos\alpha\Delta S = B_0\Delta S$, где B_0 — вертикальная составляющая магнитного поля Земли. Разность потенциалов $\Delta\varphi$ между концами крыльев равна ЭДС индуцируемой в металлических крыльях и корпусе самолета при его движении в магнитном поле Земли $\Delta\varphi = \mathcal{E} = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B_0lv = 0,3$ В.

27.19. Какой ток идет через гальванометр, присоединенный к железнодорожным рельсам, при приближении к нему поезда со скоростью $v = 60$ км/ч? Вертикальная составляющая индукции земного магнитного поля $B_0 = 50$ мкТл. Сопротивление гальванометра $R = 100$ Ом. Расстояние между рельсами $l = 1,2$ м. Рельсы считать изолированными друг от друга и от земли.

Ответ: $I = 10$ мкА.

Указание. Из предыдущей задачи $\mathcal{E} = B_0lv$. С другой стороны, $\mathcal{E} = IR$. Тогда $I = \dfrac{B_0lv}{R} = 10$ мкА.

27.20. Проводник длиной $l = 1$ м равномерно вращается в горизонтальной плоскости с частотой $\nu = 10$ с$^{-1}$. Ось вращения проходит через конец стержня. Вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна $B_0 = 50$ мкТл. Определите разность потенциалов между концами проводника.

Ответ: $\Delta\varphi = 1,57$ мВ.

Решение. При каждом обороте стержня магнитный поток, пересекаемый стержнем, равен $\Phi = B_0S = B_0\pi l^2$, где l — длина стержня. Если частота стержня ν $\left(\nu = \dfrac{1}{T}\right)$, то $\Delta\varphi = \mathcal{E} = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B_0\pi l^2\nu = 1,57$ мВ.

27.21. С какой угловой скоростью надо вращать прямой проводник длиной $r = 20$ см вокруг одного из его концов в плоскости, перпендикулярной к линиям индукции однородного магнитного поля, чтобы в проводнике индуцировалась ЭДС $\mathcal{E} = 0,3$ В? Магнитная индукция поля $B = 0,2$ Тл.

Ответ: $\omega = 75$ рад/с.

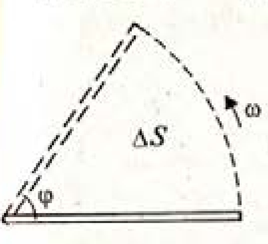


Рис. 27.3

Решение. За время Δt проводник, вращаясь с угловой скоростью ω, повернется на угол $\varphi = \omega\Delta t$ и «заметет» сектор, площадь которого $\Delta S = \dfrac{\varphi r^2}{2} = \dfrac{\omega r^2\Delta t}{2}$ (рис. 27.3). Магнитный поток через эту площадь $\Delta\Phi = B\Delta S = \dfrac{B\omega r^2\Delta t}{2}$,

$\mathcal{E} = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \dfrac{B\omega r^2}{2}$, отсюда $\omega = \dfrac{2\mathcal{E}}{Br^2} = 75$ рад/с.

27.22. Рамка, на которой намотано $N = 100$ витков провода сопротивлением $R = 10$ Ом, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 50$ мТл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки $S = 100$ см². Определите, какой заряд протечет через рамку при повороте ее от угла α_1 до α_2: 1) от 0 до 30°; 2) от 30° до 60°; 3) от 60° до 90°; 4) от 0 до 180° (α — угол между вектором индукции и нормалью к рамке).

Ответ: 1) $q = 0,67$ мКл; 2) $q = 1,8$ мКл; 3) $q = 2,5$ мКл; 4) $q = 10$ мКл.

Решение. При повороте рамки протечет индуцируемый заряд

$$q = I\Delta t = \frac{\mathcal{E}}{NR}\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t NR}\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{NR},\text{ где } \Delta\Phi = BS(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Тогда $q = \dfrac{BS}{NR}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$.

1) $q = \dfrac{BS}{NR}(\cos 0° - \cos 30°) = 0,67$ мКл.

2) $q = \dfrac{BS}{NR}(\cos 30° - \cos 60°) = 1,8$ мКл.

3) $q = \dfrac{BS}{NR}(\cos 60° - \cos 90°) = 2,5$ мКл.

4) $q = \dfrac{BS}{NR}(\cos 0° - \cos 180°) = 10$ мКл.

27.23. Проводник длиной $l = 50$ см скользит без трения по двум рейкам со скоростью $v = 10$ м/с в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости, в которой лежат рейки (рис. 27.4). Рейки замкнуты на резистор сопротивлением $R = 0{,}625$ Ом. Определите, с какой силой магнитное поле действует на проводник. С какой силой тянут проводник?

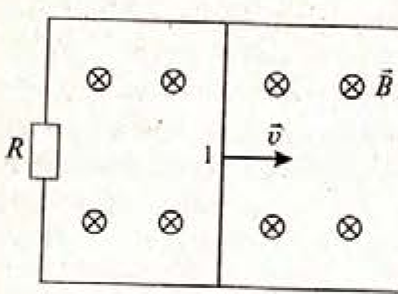


Рис. 27.4

Ответ: $F_A = F_{вн} = 0{,}1$ мН.

Решение. При движении проводника в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{B \Delta S}{\Delta t} = Bvl$.

При этом в контуре идет ток $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Bvl}{R}$. На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера $F_A = BIl = \frac{B^2 l^2 v}{R} = 0{,}1$ мН. Так как проводник движется равномерно, то именно такой величины силу и нужно приложить к проводнику.

27.24. Два металлических стержня расположены вертикально и замкнуты вверху проводником. По этим стержням без трения скользит перемычка длиной $l = 0{,}5$ см и массой $m = 1$ г. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл, перпендикулярной плоскости рамки. Установившаяся скорость $v = 1$ м/с. Найдите сопротивление перемычки. Сопротивлением стержней и провода пренебречь.

Ответ: $R = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ Ом.

Решение. При движении перемычки возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = Blv$. При этом по перемычке идет ток $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Blv}{R}$. Перемычка будет двигаться с постоянной скоростью при условии $mg = F_A$, $F_A = BIl$, откуда $I = \frac{mg}{Bl}$. Сравнив два выражения для тока, получим $R = \frac{B^2 l^2 v}{mg} = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ Ом.

27.25. В однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией $B = 60$ мТл находится вертикальная Н-образная конструкция из толстых металлических стержней, перпендикулярная магнитному полю (рис. 27.5). По стержням свободно, без нарушения контакта, скользит проводник длиной $l = 50$ см, массой $m = 1$ г и сопротивлением $R = 0{,}8$ Ом. Определите, с какой скоростью движется проводник и направление тока в перемычке.

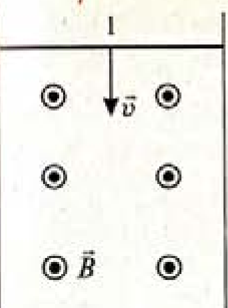


Рис. 27.5

Ответ: $v = 8{,}7$ м/с; ток в перемычке течет справа налево.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $v = \frac{Rmg}{B^2 l^2} = 8{,}7$ м/с. Применив правило левой руки, находим, что ток в перемычке течет справа налево.

27.26. Н-образную конструкцию (см. задачу 27.25) наклонили под углом $\alpha = 30°$ к горизонту так, что угол между вектором магнитного поля и проводником остался прямым. Определите, с какой скоростью движется проводник.

Ответ: $v = 17{,}4$ м/с.

Указание. Воспользуйтесь решением задач 27.24 и 27.25. Учтите, что в данном случае $\mathcal{E}_i = Blv \sin\alpha$, где $v \sin\alpha$ — нормальная составляющая скорости по отношению к магнитному полю, поэтому $v = \frac{Rmg}{B^2 l^2 \sin\alpha} = 17{,}4$ м/с.

27.27. Металлический диск радиусом $r = 10$ см, расположенный перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 1$ Тл, вращается вокруг оси, проходящей через центр, с частотой $\nu = 100$ с$^{-1}$. Два скользящих контакта (один на оси диска, другой — на окружности) соединяют диск с реостатом сопротивлением $R = 5$ Ом. Чему равна тепловая мощность, выделяемая на реостат?

Ответ: $P = 1{,}96$ Вт.

Решение. При вращении диска поток магнитной индукции через контур остается постоянным. При повороте диска на угол $\Delta\varphi$ радиус диска описывает площадь $\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$, изменение потока $\Delta \Phi = \frac{1}{2} B r^2 \Delta\varphi$, а $\mathcal{E}_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} B\omega r^2 = B\pi r^2 \nu$, где $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ — частота вращения диска. Тепловая мощность $P = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} = \frac{B^2 \pi^2 r^4 \nu^2}{R} = 1{,}96$ Вт.

27.28. Катушка диаметром $D = 6$ см, содержащая $N = 500$ витков алюминиевой проволоки ($\rho = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом · м) сечением $S = 1$ мм², расположена в однородном магнитном поле, индукция которого направлена вдоль оси катушки и равномерно изменяется со скоростью $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 1$ мТл/с. Концы катушки замкнуты накоротко. Определите тепловую мощность, выделяющуюся в катушке.

Ответ: $P = 0{,}302$ мкВт.

Решение. $|\mathscr{E}| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = N\frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{\pi D^2}{4}$, $R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{N\pi D}{S}$, $P = \frac{\mathscr{E}^2}{R} =$ $= \frac{N^2\pi^2 D^4 S}{16\rho N\pi D}\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2 = \frac{N\pi D^3 S}{16\rho}\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2 = 0{,}302$ мкВт.

27.29. Горизонтально расположенный проводящий стержень, сопротивление которого $R = 0{,}8$ Ом и масса $m = 1$ г, может скользить без нарушения электрического контакта по двум вертикальным медным шинам. Расстояние между шинами равно $l = 0{,}5$ м. Снизу их концы соединены с источником тока, ЭДС которого равна $\mathscr{E} = 0{,}51$ В. Перпендикулярно плоскости, в которой находятся шины, приложено однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}06$ Тл. Найдите постоянную скорость, с которой будет подниматься стержень. Сопротивлением шин и источника тока, а также трением пренебречь (рис. 27.6).

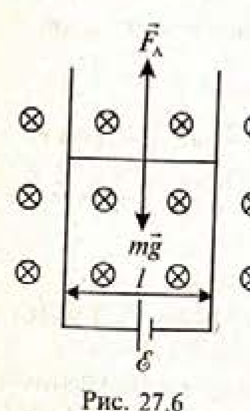


Рис. 27.6

Ответ: $\upsilon = 8{,}3$ м/с.

Решение. На стержень действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и направленная вверх сила Ампера $\vec{F}_A$, модуль которой $F_A = IBl$, где I — сила тока в цепи. Так как стержень движется с постоянной скоростью, то выполняется условие равновесия $F_A - mg = 0$. Кроме ЭДС источника $\mathscr{E}$ в цепи действует ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$. По закону Ома для замкнутой цепи $I = \frac{\mathscr{E} + \mathscr{E}_i}{R}$. По закону электромагнитной индукции для проводника, движущегося в магнитном поле со скоростью υ, ЭДС индукции равна $\mathscr{E}_i = -Bl\upsilon$. Следовательно, $I = \frac{\mathscr{E} - Bl\upsilon}{R}$, тогда $Bl\frac{\mathscr{E} - Bl\upsilon}{R} - mg = 0$, откуда $\upsilon = \frac{\mathscr{E}}{Bl} - \frac{Rmg}{B^2l^2} = 8{,}3$ м/с.

27.30. По катушке с индуктивностью $L = 80$ мГн проходит постоянный ток $I = 2$ А. Определите время убывания тока при размыкании цепи, если ЭДС самоиндукции $\mathscr{E} = 16$ В.

Ответ: $\Delta t = 10^{-2}$ с.

Решение. Электродвижущая сила самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока в контуре $\mathscr{E}_s = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ или $|\mathscr{E}_s| = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$, откуда $\Delta t = \frac{L\Delta I}{\mathscr{E}} = 10^{-2}$ с.

27.31. Электромагнит индуктивностью $L = 5$ Гн подключен к источнику тока, ЭДС которого равна $\mathscr{E}_1 = 110$ В. Определите общую ЭДС в момент размыкания цепи, если при этом сила тока убывает со скоростью $\frac{\Delta I}{\Delta t} = 8\ \frac{\text{А}}{\text{с}}$.

Ответ: $\mathscr{E} = 150$ В.

Решение. ЭДС самоиндукции $|\mathscr{E}_s| = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Общая ЭДС в момент размыкания цепи равна $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + |\mathscr{E}_s| = 150$ В.

27.32. Найдите индуктивность проводника, в котором равномерное изменение силы тока на $\Delta I = 2$ А на протяжении $\Delta t = 0{,}25$ с возбуждает ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_s = 20$ мВ.

Ответ: $L = 2{,}5$ мГн.

Решение. ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_s = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$; $L = \frac{|\mathscr{E}_s|}{\Delta I}\Delta t = 2{,}5$ мГн.

27.33. Катушку с ничтожно малым сопротивлением и индуктивностью $L = 3$ Гн присоединяют к источнику тока с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 15$ В и ничтожно малым внутренним сопротивлением. Через какой промежуток времени сила тока в катушке достигает $I = 50$ А?

Ответ: $t = 10$ с.

Решение. По закону Ома для замкнутой цепи $\mathscr{E} = I(R + r)$, где $\mathscr{E}$ — полная ЭДС в цепи, равная в данном случае сумме ЭДС источника $\mathscr{E}_1$, и ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_s$, возникающей после присоединения катушки к источнику. Тогда $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_s = \mathscr{E}_1 - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = I(R + r)$. По условию задачи сопротивления R и r ничтожно малы, тогда $\mathscr{E}_1 - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0$, откуда скорость уменьшения силы тока $\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\mathscr{E}_1}{L}$.

Учитывая, что это постоянная величина, получаем $I = \frac{\Delta I}{\Delta t}t$, то есть $t = \frac{I\Delta t}{\Delta I} = \frac{IL}{\mathcal{E}_1} = 10$ с.

27.34. Длинный соленоид индуктивностью $L = 4$ мГн содержит $N = 600$ витков. Площадь поперечного сечения соленоида $S = 20$ см². Определите магнитную индукцию поля внутри соленоида, если сила тока, протекающего по его обмотке $I = 6$ А.

Ответ: $B = 0{,}02$ Тл.

Решение. Магнитный поток $\Phi = LI$. С другой стороны, $\Phi = NBS$. Отсюда $B = \frac{\Phi}{NS} = \frac{LI}{NS} = 0{,}02$ Тл.

27.35. Две длинные катушки намотаны на общий сердечник. Индуктивности катушек $L_1 = 0{,}64$ Гн и $L_2 = 0{,}04$ Гн. Определите, во сколько раз число витков первой катушки больше, чем второй.

Ответ: $N_1 = 4N_2$.

Решение. Индуктивность катушки без сердечника $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$; $\frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}$, $\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = 4$.

27.36. Сколько витков проволоки, вплотную прилегающих друг к другу, диаметром $d = 0{,}5$ мм с изоляцией ничтожной толщины надо намотать на картонный цилиндр диаметром $D = 1{,}5$ см, чтобы получить однослойную катушку индуктивностью $L = 100$ мкГн?

Ответ: $N = 225$.

Решение. Индуктивность соленоида $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$, $S = \frac{\pi D^2}{4}$, $l = \pi d$, $L = \frac{\mu_0 N \pi D^2}{4d}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$. $N = \frac{4dL}{\mu_0 \pi D^2} = 225$.

27.37. Определите индуктивность катушки, в которой при изменении силы тока от $I_1 = 5$ А до $I_2 = 10$ А за $\Delta t = 0{,}1$ с возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s = 10$ В. На сколько при этом изменяется энергия магнитного поля катушки?

Ответ: $L = 0{,}2$ Гн; $\Delta W = 7{,}5$ Дж.

Решение. ЭДС самоиндукции катушки равна $\mathcal{E}_s = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Отсюда найдем индуктивность катушки $L = \frac{|\mathcal{E}_s|\Delta t}{\Delta I} = \frac{|\mathcal{E}_s|\Delta t}{I_2 - I_1} = 0{,}2$ Гн.

Энергия магнитного поля при токах I_1 и I_2 $W_1 = \frac{LI_1^2}{2}$, $W_2 = \frac{LI_2^2}{2}$.

Изменение энергии равно $\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{L}{2}\left(I_2^2 - I_1^2\right) = 7{,}5$ Дж.

27.38. Соленоид с сердечником из никеля на длине $l = 0{,}5$ м имеет 1000 витков с площадью поперечного сечения 50 см². Определите магнитный поток внутри соленоида и энергию магнитного поля, если сила тока в соленоиде 10 А, а магнитная проницаемость никеля $\mu = 200$.

Ответ: $W = 0{,}13$ Дж.

Решение. Учитывая, что величина индукции магнитного поля соленоида с сердечником $B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I$, магнитный поток через соленоид равен $\Phi = BS_1 = \mu\mu_0 \frac{N}{l} IS = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ Вб. Энергия магнитного поля внутри соленоида $W = \frac{LI^2}{2}$. Учитывая, что $\Phi = LI$, получаем $W = \frac{\Phi I}{2} = 0{,}13$ Дж.

27.39. На круглом деревянном цилиндре имеется однослойная катушка из медной проволоки, масса которой $m = 50$ г. Расстояние между крайними витками $l_1 = 60$ см много больше диаметра цилиндра, а сопротивление обмотки $R = 30$ Ом. Определите энергию магнитного поля катушки, если она подключена к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 62$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом.

Ответ: $W = 31$ мкДж.

Решение. Энергия магнитного поля катушки $W = \frac{LI^2}{2}$, ее индуктивность $L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l}\pi a^2$, где $N = \frac{l_2}{2\pi a}$ — число витков, $S = \pi a^2$ — площадь поперечного сечения соленоида, a — радиус витков. Длину провода l_2 найдем из следующих соотношений: $m = Dl_2S_1$, где D —

плотность вещества, S_1 — площадь поперечного сечения провода, сопротивление провода $R = \rho \cdot \frac{l_2}{S_1}$, тогда $l_2 = \sqrt{\frac{mR}{D\rho}}$. Число витков катушки $N = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{mR}{D\rho}}$, следовательно, $L = \frac{\pi\mu_0\mu}{l_1}\frac{mR}{4\pi^2 D\rho} = \mu\mu_0\frac{mR}{4\pi D\rho l_1}$.

Согласно закону Ома сила тока в цепи $I = \frac{\mathscr{E}}{R+r}$. Подставив это значение в формулу энергии магнитного поля, получим $W = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\mathscr{E}^2}{2(R+r)^2} = \frac{\mu_0\mu mR\mathscr{E}^2}{8\pi D\rho l_1(R+r)^2} = 31$ мкДж.

27.40. В катушке индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн сила тока $I = 10$ А. Какова энергия магнитного поля этой катушки? Как изменится энергия поля, если сила тока увеличится вдвое?

Ответ: $W = 10$ Дж; увеличится в 4 раза.

Решение. $W = \frac{LI^2}{2} = 10$ Дж. При увеличении силы тока в 2 раза энергия увеличиться в 4 раза, так как $W \sim I^2$.

27.41. Определите энергию магнитного поля соленоида, в котором при силе тока $I = 5$ А возникает магнитный поток $\Phi = 0{,}5$ Вб.

Ответ: $W = 1{,}25$ Дж.

Указание. См. решение задачи 27.38.

27.42. Соленоид длиной $l = 50$ см и диаметром $D = 0{,}8$ см имеет $N = 2 \cdot 10^4$ витков медного провода ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м). Определите время, в течение которого в обмотке соленоида выделится количество теплоты, равное энергии магнитного поля в соленоиде.

Ответ: $t = 1{,}45 \cdot 10^{-6}$ с.

Решение. По закону Джоуля-Ленца $Q = I^2Rt$, где $R = \frac{\rho l}{S}$ — сопротивление обмотки соленоида. $l = \pi DN$, $S = \frac{\pi d^2}{4}$, где диаметр провода $d = \frac{l}{N}$ (так как витки соленоида намотаны вплотную друг к другу). Тогда площадь поперечного сечения провода $S = \frac{\pi l^2}{4N^2}$ и $R = \frac{4\rho DN^3}{l^2}$. Следовательно, $Q = \frac{4I^2\rho DN^3 t}{l^2}$. Энергия магнитного

поля $W = \frac{LI^2}{2}$, где $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$, $S = \frac{\pi D^2}{4}$, $L = \frac{\mu_0 N^2 \pi D^2}{4l}$, а $W = \frac{\mu_0 N^2 \pi D^2 I^2}{8l}$. Приравняв выражения для Q и W, получим $t = \frac{\mu_0 \pi D l}{32\rho N} = 1{,}45 \cdot 10^{-6}$ с.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Уровень II

1. Пружинящая спираль одним концом закреплена в зажиме штатива, а другим касается поверхности ртути. Что произойдет, если по спирали пропустить электрический ток (джоулевым теплом и действием магнитного поля Земли на спираль с током пренебречь)?

Решение. Ток в витках спирали имеет одинаковое направление, поэтому они будут притягиваться, спираль сожмется и разорвет контакт. После этого спираль под действием своего веса снова удлинится и замкнет цепь. Таким образом, спираль будет колебаться в вертикальном направлении сжимаясь и разжимаясь, и при этом размыкая и замыкая цепь.

2. Жесткий проводник длиной l, по которому идет ток I, касается сферической проводящей поверхности. Нижний конец проводника шарнирно закреплен в точке O (рис. 1а). Определите, как движется проводник во внешнем магнитном поле, вектор индукции которого $\vec{B}$ образует угол α с направлением тока. Силами тяжести и трения пренебречь.

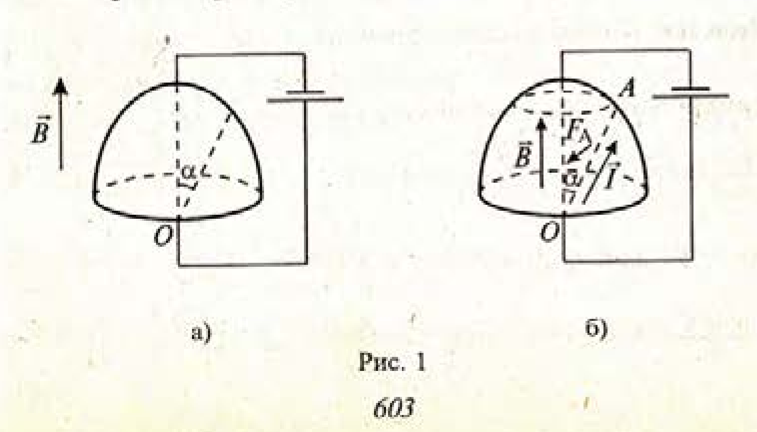


Рис. 1

Решение. На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера $\vec{F}_А = \left[I d\vec{l}, \vec{B} \right]$. В нашем случае (рис. 1б) сила Ампера направлена к наблюдателю перпендикулярно магнитному полю и проводнику с током. В результате проводник вращается по образующей конуса с углом раствора 2α при вершине конуса.

3. Почему два параллельных проводника по которым текут токи в одном направлении, притягиваются, а два параллельных катодных луча (потоки электронов) отталкиваются?

Решение. В проводниках, по которым течет ток, объемный электрический заряд равен нулю, поэтому преобладает действие магнитных сил — провода притягиваются. В катодных лучах, где имеются только электроны, объемный электрический заряд отличен от нуля, поэтому преобладают силы отталкивания между одноименными электрическими зарядами, магнитное взаимодействие этих зарядов гораздо слабее.

4. Покоящийся в начальный момент протон ускоряется электрическим полем, напряженность которого $E = \text{const}$. Через $\tau = 0,01$ с он влетает в магнитное поле, перпендикулярное электрическому, магнитная индукция которого $B = 10^{-5}$ Тл. Во сколько раз нормальное ускорение протона в этот момент больше его тангенциального ускорения?

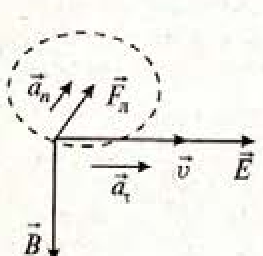


Рис. 2

Ответ: $a_n/a_\tau = 9,6$.

Решение. Под действием электрического поля протон движется ускоренно. Электрическое поле создает тангенциальное ускорение. $qE = ma_\tau$; $a_\tau = \dfrac{qE}{m}$. Когда заряд влетает в магнитное поле, на него начинает действовать сила Лоренца $\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$, направленная перпендикулярно и скорости, и магнитному полю (рис. 2). В результате действия этой силы возникает нормальное (центростремительное) ускорение: $qvB = ma_n$, откуда $a_n = \dfrac{qvB}{m}$. Тогда $\dfrac{a_n}{a_\tau} = \dfrac{qvBm}{mqE} = \dfrac{vB}{E}$. (1)

Скорость находим, исходя из условия задачи, $v = a_\tau \tau = \dfrac{qE\tau}{m}$, следовательно, (1) преобразуется к виду $\dfrac{a_n}{a_\tau} = \dfrac{qE\tau}{m}\dfrac{B}{E} = \dfrac{q}{m}\tau B = 9,6$.

5. Отрицательная частица влетает со скоростью v под углом α к параллельно направленным электрическому и магнитному полям. Определите, сколько оборотов сделает частица до момента начала движения в направлении, обратном полям. Напряженность электрического поля $\vec{E}$, индукция магнитного поля $\vec{B}$.

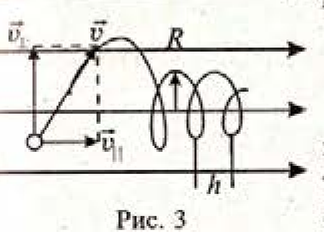


Рис. 3

Ответ: $n = \dfrac{vB\cos\alpha}{2\pi E}$.

Решение. В отсутствии электрического поля, только в магнитном поле, частица двигалась бы по винтовой линии. Электрическое поле оказывает тормозящее действие на отрицательную частицу, поэтому она будет двигаться по винтовой линии, но с уменьшающимся шагом. Сделав n витков, она остановится и начнет двигаться в противоположном направлении, но уже с увеличивающимся шагом. В направлении, перпендикулярном магнитному полю, на частицу действует сила Лоренца $qv_\perp B = \dfrac{mv_\perp^2}{R}$; $R = \dfrac{mv_\perp}{qB}$;

$T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}$, очевидно, что радиус R и период вращения T частицы при наличии электрического поля не изменяются. В направлении $\vec{E}$ частица движется с ускорением $a_\parallel$ $qE = ma_\parallel$; $a_\parallel = \dfrac{qE}{m}$. До остановки она пройдет расстояние $l = \dfrac{a_\parallel t^2}{2}$, где $t = nT$, n — число оборотов, сделанных частицей. По теореме о кинетической энергии $\dfrac{mv_\parallel^2}{2} = qEl$; $mv_\parallel^2 = qE\dfrac{Eq}{m}n^2T^2$; $mv_\parallel = qEn\dfrac{2\pi m}{qB}$; $n = \dfrac{vB\cos\alpha}{2\pi E}$.

6. Квадрат сделан из четырех проводников длиной $l = 8$ см и сопротивлением $R = 4$ Ом каждый. На расстоянии $l/4$ от одного из проводников квадрат замкнут перемычкой сопротивлением $r = 1$ Ом (рис. 4). Плоскость квадрата перпендикулярна однородному магнитному полю, изменяющемуся со скоростью $\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = 200$ мТл/с. Определите силу тока, текущего по перемычке.

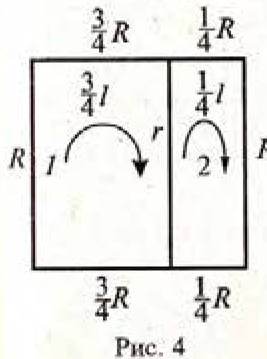


Рис. 4

Ответ: $I = 20$ мкА.

Решение. Согласно основному закону электромагнитной индукции в контуре 1 $|\mathscr{E}_1| = \frac{\Delta B \cdot S_1}{\Delta t}$, $S_1 = \frac{3l^2}{4}$; в контуре 2 $|\mathscr{E}_2| = \frac{\Delta B \cdot S_2}{\Delta t}$, $S_2 = \frac{l^2}{4}$.

По закону Ома сила тока в контуре 1 $I_1 = \frac{\mathscr{E}_1}{R + 2\cdot\frac{3}{4}R + r}$, в контуре 2 $I_2 = \frac{\mathscr{E}_2}{R + 2\cdot\frac{1}{4}R + r}$. Очевидно, что токи I_1 и I_2 текут в разных направлениях, ток, текущий в перемычке $I = I_1 - I_2$;

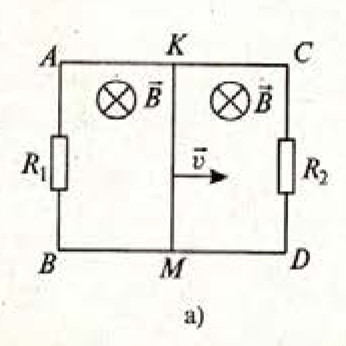
$$I = \frac{\Delta B}{\Delta t}\left(\frac{3l^2}{4\left(\frac{5}{2}R + r\right)} - \frac{l^2}{4\left(\frac{3}{2}R + r\right)}\right) = \frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot\frac{l^2}{4}\left[\frac{3\left(\frac{3}{2}R + r\right) - \left(\frac{5}{2}R + r\right)}{\left(\frac{5}{2}R + r\right)\left(\frac{3}{2}R + r\right)}\right] =$$

$$= \frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot\frac{l^2}{4}\left[\frac{(9R + 6r) - (5R + 2r)}{(5R + 2r)(3R + 2r)}\right] = \frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot\frac{l^2}{4}\left[\frac{4R + 4r}{(5R + 2r)(3R + 2r)}\right] =$$

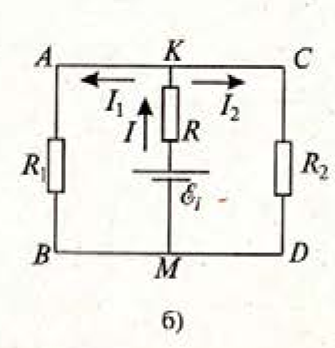
$$= \frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot\frac{l^2(R + r)}{(5R + 2r)(3R + 2r)} = 20 \text{ мкА}.$$

7. Прямоугольный контур находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости контура. Индукция поля B. Перемычка длиной l имеет сопротивление R, стороны AB и CD — сопротивления R_1 и R_2 (рис. 5а). Определите силу тока, который течет по перемычке, при ее движении с постоянной скоростью v.

Ответ: $I = \frac{Blv(R_1 + R_2)}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}$.



а)



б)

Рис. 5

Решение. При движении проводника в магнитном поле в нем индуцируется ЭДС $\mathscr{E}_i = Blv$. Эквивалентная схема показана на рис. 5б. Используя правила Кирхгофа, получим

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \quad (\text{для узла } K); & (1) \\ I_1R_1 + IR = \mathscr{E}_i \quad (\text{контур } ABMK); & (2) \\ I_1R_1 = I_2R_2 \quad (\text{контур } ABDC). & (3) \end{cases}$$

Из (2) $I_1 = \frac{\mathscr{E}_i - IR}{R_1}$; из (3) $I_2 = \frac{I_1R_1}{R_2}$. Полученные результаты подставим в (1) $I = \frac{\mathscr{E}_i - IR}{R_1} + \frac{(\mathscr{E}_i - IR)}{R_1}\cdot\frac{R_1}{R_2}$; откуда получим

$$I = \frac{Blv(R_1 + R_2)}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}.$$

8. В однородное магнитное поле с индукцией $B = 2$ Тл помещено горизонтальное металлическое кольцо радиуса $R = 5$ см, причем его ось совпадает с направлением поля. По кольцу может свободно двигаться стержень длиной $l = R$ (рис. 6). Определите установившуюся угловую скорость вращения стержня, когда между центром стержня и кольцом подключили источник ЭДС $\mathscr{E} = 1$ В.

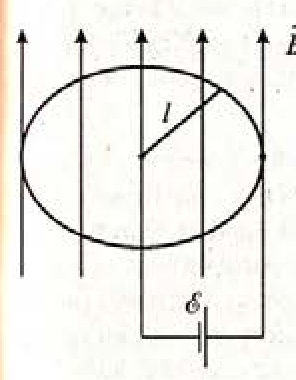


Рис. 6

Ответ: $\omega = 4\cdot10^2$ рад/с.

Решение. При установившемся движении стержень должен двигаться по инерции, ток в нем равен нулю, тогда

$\mathscr{E} = \mathscr{E}_i$; $\mathscr{E}_i = \frac{B\omega l^2}{2}$ (см. задачу 27.21).

$\mathscr{E} = \frac{B\omega l^2}{2}$; $\omega = \frac{2\mathscr{E}}{Bl^2} = 4\cdot10^2$ рад/с.

9. В термоядерных реакторах для удержания плазмы применяется магнитное поле. Упрощенная модель следующая: в плоском слое толщиной d создано однородное магнитное поле с индукцией B, параллельной стенкам слоя (перпендикулярно рисунку). Слева находится газ из заряженных частиц, имеющих заряд q, массу m и движущихся в произвольных направлениях с одинаковой по величине скоростью v. При какой величине индукции $\vec{B}$ частицы не будут проникать в область справа от магнитной стенки?

Ответ: $B > \frac{2mv}{gd}$.

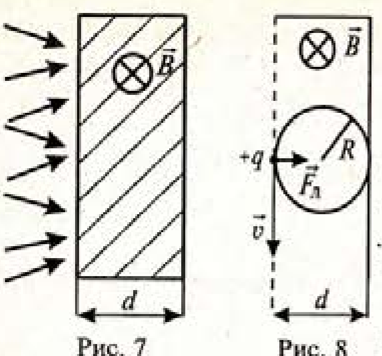


Рис. 7 Рис. 8

Решение. На частицы в магнитном поле действует сила Лоренца $F_л = q[\vec{v}, \vec{B}]$. Глубже всего (на расстояние $l = 2R$) проникнет в поле частица, скорость которой параллельна стенке и перпендикулярна магнитному полю (рис. 8). $qvB = \frac{mv^2}{R}$, откуда $B = \frac{2mv}{ql}$. Если $B > \frac{2mv}{qd}$, то $2R < d$ и частицы не будут проникать в область справа от магнитной стенки.

10. ____ На оси постоянного магнита, расположенного вертикально, на некотором расстоянии от него находится легкое проволочное кольцо, плоскость которого перпендикулярна оси магнита. В некоторый момент времени кольцо начинает падать так, что его плоскость остается во время падения горизонтальной. Как будет отличаться падение кольца из сверхпроводника и кольца с конечным сопротивлением?

Решение. При движении сверхпроводящего кольца в магнитном поле возникает индукционный ток в кольце, благодаря действию вихревого электрического поля. Ток в кольце будет изменяться так, чтобы общий поток магнитной индукции через кольцо не изменялся. (В сверхпроводящем контуре не может действовать ЭДС, которая привела бы к существованию бесконечно большого тока. Следовательно, магнитный поток через сверхпроводящий контур всегда неизменен). В некоторый момент времени сила, действующая на кольцо со стороны магнита, станет равной силе тяжести кольца, но т.к. кольцо имело некоторую скорость, то, двигаясь по инерции, оно проскочит положение равновесия и будет двигаться до тех пор, пока возросшая сила взаимодействия с магнитом не обратит его скорость в нуль и не заставит двигаться назад. Проходя положение равновесия, кольцо будет иметь скорость, направленную вверх, кольцо опять проскочит положение равновесия и т. д. Потерь в сверхпроводнике нет, поэтому возникнут незатухающие колебания относительно положения равновесия.

Если кольцо имеет конечное сопротивление, то величина тока будет определяться сопротивлением кольца и ЭДС в данный момент времени, т. е. скоростью движения. При малом сопротивлении кольца колебания кольца будут затухающие. Если сопротивление кольца велико, то кольцо будет падать так, как в вязкой среде.

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Уровень III

1. ____ Между двумя одинаковыми сжатыми на величину x_0 пружинами жесткостью k находится шарик, масса которого m и заряд q. Пружины прикреплены к двум параллельным проводящим пластинам, расстояние между которыми d (рис. 1). Пружина рвется, если растягивающая сила превысит величину T. Какую ЭДС должен иметь источник, чтобы при его подключении к пластинам одна из пружин порвалась? Силой тяжести пренебречь, пружины непроводящие.

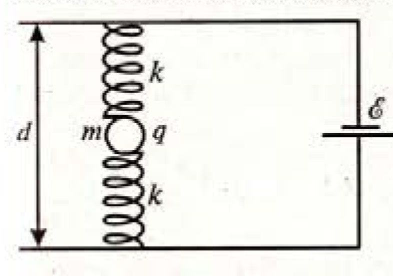


Рис. 1

Ответ: $\mathcal{E}_{\min} = (T + kx_0)d/q$.

Решение. Сила, действующая на шарик, $F = qE = q\frac{\mathcal{E}}{d}$. (1)

Пусть максимальное смещение шарика в момент остановки равно x. Тогда из условия разрыва пружины

$T = k(x - x_0)$. (2)

Используем закон сохранения энергии:

$\frac{2kx_0^2}{2} + Fx = \frac{k(x_0 + x)^2}{2} + \frac{k(x_0 - x)^2}{2}$; откуда с учетом (2) $F = kx = T + kx_0$. Окончательно из (1) получим $\mathcal{E}_{\min} = \frac{Fd}{q} = \frac{(T + kx_0)d}{q}$.

2. ____ На гладкий стержень надеты две муфточки из изолирующего материала, соединенные пружиной и связанные нитью (рис. 2). Каждая из муфточек имеет заряд $q = 0,33 \cdot 10^{-7}$ Кл. К середине нити приложена некоторая сила $\vec{F}$, под действием которой система движется без трения по

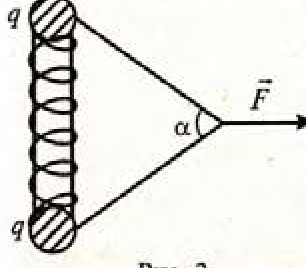


Рис. 2

горизонтальной плоскости, и при этом половинки нити образуют угол $\alpha = 60°$. Длина недеформированной пружины равна длине нити $l_0 = 0,2$ м. Определите ускорение системы, если ее масса $m = 0,2$ кг, а жесткость пружины $k = 0,7$ Н/м.

Ответ: $a = 0,2$ м/с².

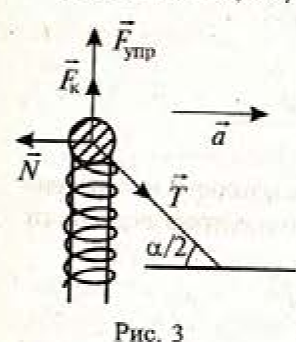


Рис. 3

Решение. Запишем второй закон Ньютона для системы в целом:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1)$$

только для одной муфточки (рис. 3)

$$m_м\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_{упр} + \vec{N} + \vec{F}_К, \quad (2)$$

где $m_м$ — масса муфточки, $\vec{T}$ — сила натяжения нити, $\vec{F}_{упр}$ — сила упругости пружины, $\vec{N}$ — сила нормальной реакции стержня, $\vec{F}_К$ — сила кулоновского взаимодействия муфточек.

Из (1) (x): $F = ma$; (3)

из (2) (y): $-T\sin\frac{\alpha}{2} + k(l_0 - l) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = 0,$ (4)

где l — расстояние между муфточками в процессе движения.

Учтем также, что $F = 2T\cos\frac{\alpha}{2}$, (5)

а $l = l_0\sin\frac{\alpha}{2}$. (6)

Получив из (4) T и используя (5) и (6), найдем значение ускорения $a = \frac{F}{m} = \frac{2kl_0}{m}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{q^2\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{4\pi\varepsilon_0 m l_0^2\sin^2(\alpha/2)} \approx 0,2$ м/с².

3. Положительный заряд q равномерно распределен по тонкому проволочному кольцу радиусом R. Найдите на оси кольца точки, в которых напряженность электрического поля имеет наибольшее значение. Определите напряженность поля в этих точках. Как будет двигаться точечный заряд $-q_0$ массой m, если в начальный момент времени он покоился в некоторой точке на оси кольца на расстоянии $x \ll R$ от его центра?

Ответ: $E_{max} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$.

Решение. Заряженное кольцо можно рассматривать состоящим из отдельных заряженных элементов Δq, каждый из которых можно считать точечным зарядом, для которого $\Delta E = k\frac{\Delta q}{r^2}$. Суммируя

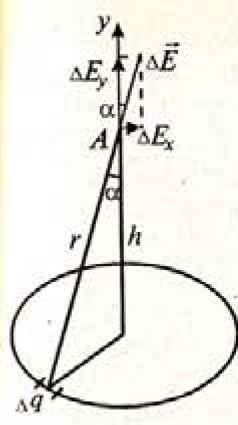


Рис. 4

векторы напряженности поля в точке A получим $E = \sum \Delta E\cos\alpha = \sum k\frac{\Delta q}{R^2 + h^2}\cos\alpha$ (рис. 4). Сумма составляющих, перпендикулярных оси кольца, равна нулю. С учетом того, что $\cos\alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, получим напряженность поля в точке A $E = k\frac{qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$.

Для нахождения точки максимума напряженности поля приравняем первую производную от E по h к нулю $\frac{dE}{dh} = 0$.

$$\frac{dE}{dh} = kq\frac{\left((R^2 + h^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(R^2 + h^2)^{1/2}\cdot 2h^2\right)}{(R^2 + h^2)^3} = kq\frac{R^2 - 2h^2}{(R^2 + h^2)^{5/2}} = 0;$$

$$R^2 - 2h^2 = 0; \quad h = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

В этих точках по обе стороны кольца наблюдается максимальное значение напряженности поля $E_{max} = kq\frac{R}{\sqrt{2}\left(R^2 + \frac{R^2}{2}\right)^{3/2}} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$.

Сила, действующая на заряд $-q_0$, равна $F = -q_0 E = -k\frac{q_0 qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$ и направлена к центру кольца. Считая $h = x \ll R$, получим $F = -k\frac{qq_0 x}{R^3}$.

Согласно второму закону Ньютона $-\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 R^3}x = ma_x$. Это уравнение гармонических колебаний с периодом $T = 4\pi\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mR^3}{qq_0}}$.

4. Шар радиусом R равномерно заряжен с объемной плотностью ρ. Определите зависимость потенциала поля $E(r)$ внутри и вне шара.

Ответ: В центре шара $(r = 0)$ $\varphi(0) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$. В интервале $0 < r < R$ зависимость $\varphi(r)$ — парабола, при $r > R$ $\varphi(r)$ — гипербола.

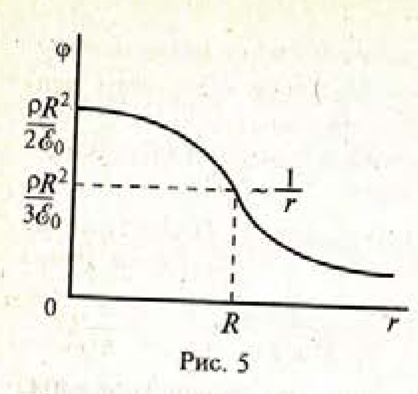


Рис. 5

Решение. Известна связь напряженности поля с потенциалом $E=-\frac{d\varphi}{dr}$, тогда $d\varphi=-Edr$. Если перейти к конечным значениям приращения потенциала, получим $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-\int\limits_1^2 Edr$, или $\varphi_1-\varphi_2=\int\limits_1^2 Edr$. Если учесть, что потенциал численно равен работе по переносу единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2, и предположить, что точка 2 на бесконечности, а $\varphi_\infty=0$, то потенциал некоторой точки 1 равен $\varphi_1=\int\limits_1^\infty Edr$. Используем значение напряженности поля, полученное в задаче 19.23. При $r>R$ $E(r)=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$;

$$\varphi(r)=\int\limits_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr=\left(-\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\right)\Big|_r^\infty=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r};\quad \varphi(R)=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}.$$

Если $r<R$, то $\varphi(r)=\int\limits_r^R E_1(r)dr+\int\limits_R^\infty E_2(r)dr$.

$$\varphi(r)=\int\limits_r^R\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dr+\int\limits_R^\infty\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\Big|_r^R+\varphi(R)=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(R^2-r^2\right)+\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}=$$

$=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2-r^2\right)$. В центре шара $(r=0)$ $\varphi(0)=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$. В интервале $0<r<R$ зависимость $\varphi(r)$ — парабола, при $r>R$ $\varphi(r)$ — гипербола.

5. В однородном электрическом поле напряженностью $\vec{E}$ находится однородный металлический шар радиусом R. Поверхностная плотность индуцированного заряда σ зависит от угла α (рис. 6). Определите зависимость $\sigma(\alpha)$.

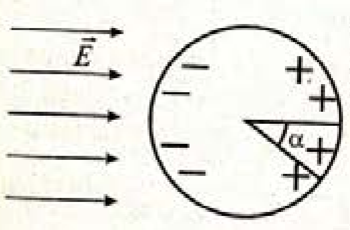


Рис. 6

Ответ: $\sigma=3\varepsilon_0 E\cos\alpha$.

Решение. Внутри металлического шара напряженность поля равна нулю

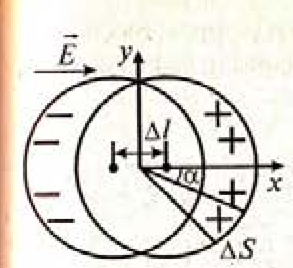


Рис. 7

$\vec{E}+\vec{E}_{инд}=0$. Для определения напряженности поля, создаваемого индуцированным зарядом, представим шар как два шара радиусом R, сдвинутых относительно друга на Δl, и заряженных объемными зарядами $+q$ и $-q$ одинаковой величины (рис. 7). Напряженность электрического поля в общем слое равна

$$E_{инд}=k\frac{q}{R^3}\left(r-\frac{l}{2}\right)-k\frac{q}{R^3}\left(r+\frac{l}{2}\right)=-k\frac{q}{R^3}\Delta l.$$

Это поле однородное. На поверхность ΔS приходится заряд $\Delta q=\frac{q\Delta Sl\cos\alpha}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, откуда $\sigma=\frac{\Delta q}{\Delta S}=\frac{ql\cos\alpha}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. С учетом того, что $E-k\frac{q}{R^3}l=0$, получим $\sigma=3\varepsilon_0 E\cos\alpha$.

6. Из проволоки сделан куб, в каждое ребро которого включено по одному конденсатору C. Куб включен в цепь точками 1 и 7 (рис. 8). Найдите емкость полученной системы конденсаторов.

Ответ: $C_{1-7}=1,2C$.

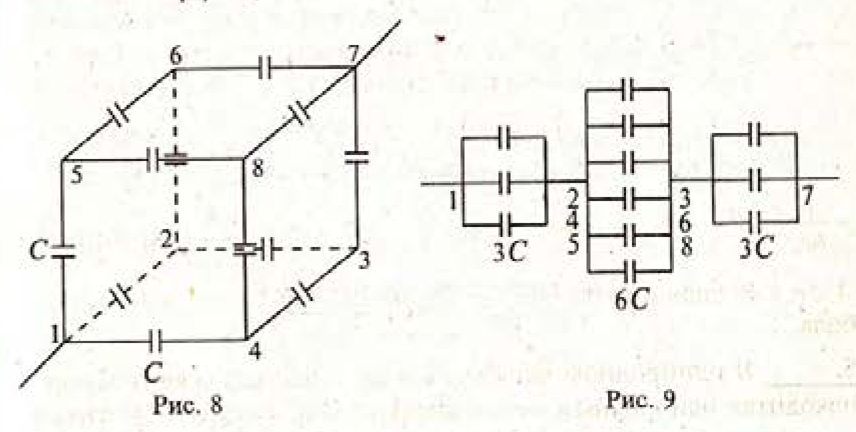


Рис. 8 Рис. 9

Решение. Если батарея заряжена, то точки 2, 4, 5 имеют одинаковый потенциал и их можно соединить. Аналогично для точек 3, 6, 8. Эквивалентная схема имеет вид (рис. 9). Емкость отдельных участков $3C$, $6C$, $3C$. Общая емкость $\frac{1}{C_{1-7}}=\frac{2}{3C}+\frac{1}{6C}=\frac{5}{6C}$; откуда $C_{1-7}=1,2C$.

7. ____ N точек соединены друг с другом попарно одинаковыми проводниками с сопротивлением R. Определите сопротивление такой системы между двумя любыми точками.

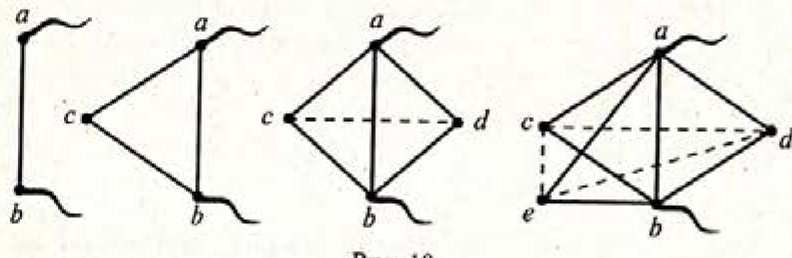


Рис. 10

Решение. Подсчитаем сопротивление для 2, 3, 4, и 5 точек. На рис. 10 пунктиром изображены те проводники, по которым ток не идет из-за равенства потенциалов в точках c и d (для четырех точек) и в точках c, d, e (для пяти точек). Таким образом, подключение каждой новой точки эквивалентно параллельному присоединению сопротивления $2R$: для двух точек $R_x = 2R/2$, для трех точек $R_x = 2R/3$, для четырех $R_x = 2R/4$, и т. д., следовательно, общее сопротивление всегда равно $2R/N$.

8. ____ Изолированный телеграфный провод (сопротивление единицы длины $\rho_{пр}$ постоянно), помещенный в заземленную металлическую оболочку (экран), с постоянным сопротивлением единицы длины $\rho_{об}$, соединяет два пункта A и B, расстояние между

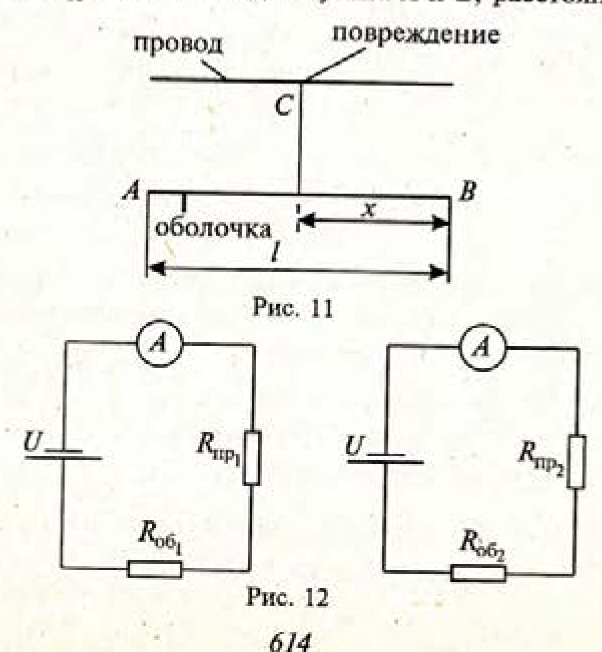


Рис. 11

Рис. 12

которыми l (рис. 11). Провод поврежден в неизвестном пункте C, из-за чего наблюдается короткое замыкание провода с экраном. Как найти место повреждения C, имея аккумуляторную батарею и миллиамперметр?

Решение. В пункте A составляем цепь 1 (рис. 12) и измеряем ток I_1. $U = I_1\left(R_{пр_1} + R_{об_1}\right) = I_1\left(\rho_{пр}(l-x) + \rho_{об}(l-x)\right) = I_1(l-x)\left(\rho_{пр} + \rho_{об}\right)$.

В пункте B составляем цепь 2 и измеряем I_2:

$U = I_2\left(R_{пр_2} + R_{об_2}\right) = I_2 x\left(\rho_{пр} + \rho_{об}\right)$.

В результате решения двух уравнений получаем $x = \dfrac{I_1 l}{I_1 + I_2}$.

9. ____ Между двумя параллельными шинами включены конденсаторы, емкости которых C_1 и C_2 (рис. 13). Проводящая перемычка массой m лежит на шинах, расстояние между которыми l и может без трения скользить вдоль них. Перпендикулярно плоскости шин включено однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Какую силу F вдоль шин надо приложить к перемычке, чтобы она двигалась с постоянным ускорением a? Сопротивлением шин и перемычки пренебречь.

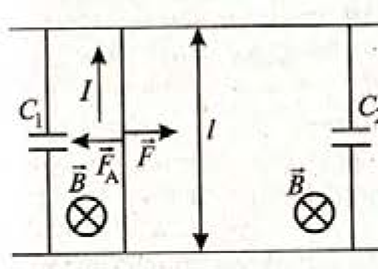


Рис. 13

Ответ: $F = \left[m + B^2 l^2 (C_1 + C_2)\right] a$.

Решение. Согласно закону Фарадея ЭДС индукции в перемычке $|\mathcal{E}_i| = \Delta\Phi/\Delta t = Blv = Bla\Delta t$.

Сила Ампера, действующая на перемычку (рис. 13), $F_A = IBl$, где ток находим, учитывая, что напряжения на конденсаторах одинаковы и равны ЭДС индукции $U_{C_1} = U_{C_2} = \mathcal{E}_i$. Тогда заряд, появляющийся на конденсаторах $q = q_1 + q_2 = \mathcal{E}_i(C_1 + C_2)$; (конденсаторы включены параллельно). Ток связан с зарядом конденсаторов $I = \dfrac{q}{\Delta t} = \dfrac{\mathcal{E}_i(C_1 + C_2)}{\Delta t}$, и сила Ампера равна $F_A = B^2 l^2 a (C_1 + C_2)$. По второму закону Ньютона для перемычки $ma = F - F_a$;

$F = ma + F_a = \left[m + B^2 l^2 (C_1 + C_2)\right] a$.

10. ____ В магнитном поле с большой высоты падает кольцо, имеющее массу m, диаметр d и сопротивление R. Плоскость кольца все время горизонтальна. Найдите установившуюся скорость падения

кольца, если модуль индукции $\bar{B}$ магнитного поля меняется с высотой h по закону $\left|\bar{B}\right| = B_0(1+\alpha h)$.

Ответ: $v = \dfrac{16mg}{\pi^2 d^4 B_0^2 \alpha^2}$.

Решение. При достижении кольцом постоянной (установившейся) скорости v, его кинетическая энергия не изменяется, тогда изменение его потенциальной энергии будет равно тепловым потерям в кольце. При движении кольца в магнитном поле в нем возбуждается ЭДС индукции $\left|\mathcal{E}_i\right| = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Магнитный поток равен

$\Phi = \dfrac{\pi d^2}{4}B = \dfrac{\pi d^2}{4}B_0(1+\alpha h)$, отсюда $\left|\mathcal{E}_i\right| = \dfrac{\pi d^2}{4}B_0\dfrac{dh}{dt}\alpha = \dfrac{\pi d^2}{4}B_0\alpha v$, $\left(\dfrac{dh}{dt} = v\right)$.

По кольцу идет ток $I = \dfrac{\left|\mathcal{E}_i\right|}{R} = \dfrac{\pi d^2 B_0 \alpha v}{4R}$. По закону сохранения энергии $mgh = I^2 Rt$; $\dfrac{h}{t} = v$; при установившейся скорости $mgv = I^2 R = \dfrac{\pi^2 d^4 B_0^2 \alpha^2 v^2}{16R}$, тогда установившаяся скорость равна $v = \dfrac{16mgR}{\pi^2 d^4 B_0^2 \alpha^2}$.

11. Два одинаковых шарика массами m и радиусом R находятся на расстоянии 10 R друг от друга. Шарики несут заряды $+q$ и $-q$. Первый шарик привязан к стене ниткой, выдерживающей натяжение T, второй шарик в определенный момент отпускают. Определите скорость шариков после соприкосновения, если удар абсолютно неупругий. Заряды не перераспределяются.

Рис. 14

Ответ: $u = \sqrt{\dfrac{0{,}2kq^2}{mR}}$.

Решение. Максимальная сила взаимодействия между шариками (рис. 14) $F_{\max} = k\dfrac{q^2}{4R^2}$. Если $T < F_{\max}$, то нитка оборвется еще до момента соприкосновения шариков. Если $T \geq F_{\max}$, то привязанный шарик до соприкосновения будет находиться в покое.

Рассмотрим случай $T < F_{\max}$. Пусть в момент разрыва нитки расстояние между центрами шариков x. В этот момент сила кулоновского взаимодействия равна силе натяжения нитки:

$$k\frac{q^2}{x^2} = T. \qquad (1)$$

С этого момента система, состоящая из 2-х шариков, становится замкнутой. Закон сохранения импульса запишется в виде

$$mv = 2mu, \qquad (2)$$

где v — скорость левого шарика в момент обрыва нитки; u — скорость шариков после соприкосновения.

Скорость v найдем из закона сохранения энергии:

$$-k\frac{q^2}{10R} = -k\frac{q^2}{x} + \frac{1}{2}mv^2. \qquad (3)$$

Решив систему, состоящую из уравнений (1)—(3) найдем u:

$u = \sqrt{k\dfrac{q^2}{2m}\left(\dfrac{1}{q}\sqrt{\dfrac{T}{k}} - \dfrac{1}{10R}\right)}$. Если $T \geq F_{\max}$, то в предыдущем решении следует взять $x = 2R$, тогда $u = \sqrt{\dfrac{0{,}2kq^2}{mR}}$.

12. Неоновая лампочка загорается при напряжении U_1. При этом сопротивление лампочки становится пренебрежительно малым. Когда напряжение на лампочке падает до U_2, она гаснет и ее сопротивление становится бесконечно большим. Такую лампочку включили в цепь (рис 15). Считая $\mathcal{E} > U_1 > U_2$, постройте приближенно график зависимости напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа K.

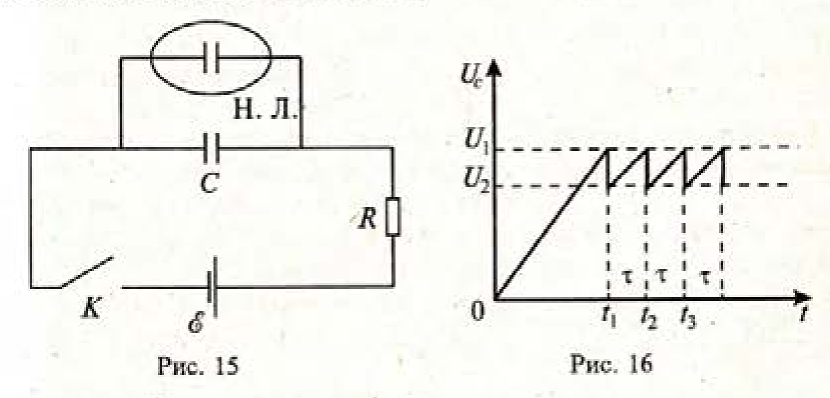


Рис. 15 Рис. 16

Решение. После замыкания ключа напряжение на конденсаторе растет до значения U_1, при котором загорается неоновая лампочка. Поскольку $\mathcal{E} \gg U_1$, можно считать, что во время зарядки конденсатора сила тока $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$ и напряжение U_c на конденсаторе растет по линейному закону. В момент t_1, когда напряжение на

конденсаторе равно U_1, загорается лампочка. Время t_1, можно найти из условия $It_1 = Q = CU_1 \Rightarrow t_1 = \frac{CU_1R}{\mathcal{E}}$.

В момент, когда лампочка загорается, конденсатор практически разряжается до напряжения U_2, и лампочка гаснет. Затем в течение времени τ конденсатор снова заряжается до напряжения U_1 и т. д. Таким образом, напряжение на конденсаторе изменяется с периодом $\tau = \frac{(U_1 - U_2)CR}{\mathcal{E}}$ (рис. 16).

13. Виток провода изогнут в виде восьмерки так, что радиусы окружностей $r_1 = 20$ мм, $r_2 = 60$ мм (рис. 17). В течение времени $\Delta t = 0{,}5$ мс однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости витка, равномерно возрастает. Начальное значение индукции магнитного поля равно нулю, конечное $B = 50$ Тл. На какое напряжение U должна быть рассчитана изоляция между проводами, чтобы не произошел пробой?

Ответ: $U_{AB} = 380$ В.

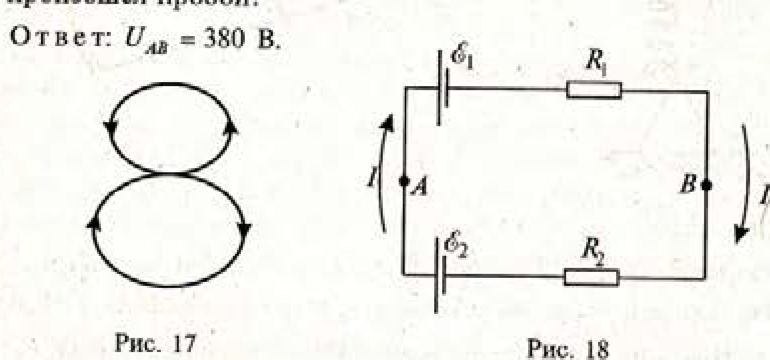


Рис. 17 Рис. 18

Решение. Обозначим сопротивления верхнего и нижнего колец «восьмерки» через R_1 и R_2 соответственно, а индуцируемые в них ЭДС через $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Эти ЭДС действуют в цепи навстречу друг другу. Пробой возможен между точками A и B на перемычке «восьмерки» (см. эквивалентную схему на рис. 18).

Согласно закону Ома: $I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_2 + R_1}$;

$$U_{AB} = \mathcal{E}_2 - IR_2 = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_1 R_2}{R_2 + R_1} = \frac{\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_1}}.$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции

$\mathcal{E}_1 = \frac{B}{\Delta t}\pi r_1^2$; $\mathcal{E}_2 = \frac{B}{\Delta t}\pi r_2^2$ и учитывая, что $\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}$, получим

$$U_{AB} = \frac{B}{\Delta t}\pi \frac{r_2^2 + r_1 r_2}{1 + \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\pi B r_1 r_2}{\Delta t} = 380 \text{ В}.$$

14. Тонкая пружина жесткостью $k = 20$ Н/м закреплена в недеформированном состоянии в точках A и C, расстояние между которыми $l_0 = 20$ см, и помещена во внешнее магнитное поле с индукцией $B = 0{,}8$ Тл. При пропускании по пружинке тока она приобретает форму дуги окружности радиусом $R = 30$ см (рис. 19). Определите силу тока I.

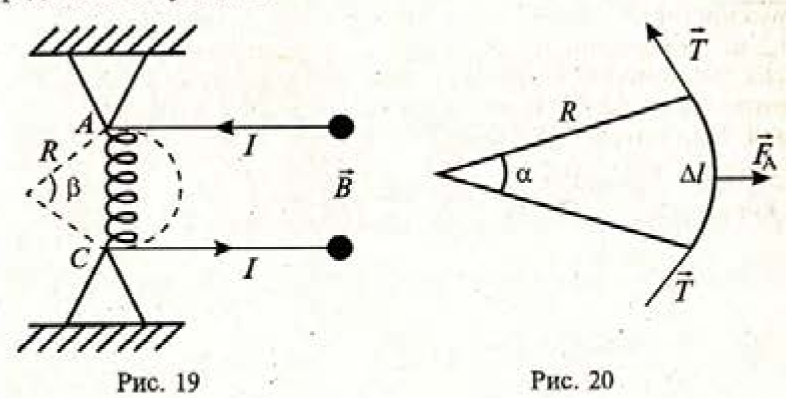


Рис. 19 Рис. 20

Решение. Рассмотрим отрезок пружины длиной $\Delta l \ll R$ (рис. 20). На него действует сила Ампера $\vec{F}_A$ и сила натяжения $\vec{T}$. Второй закон Ньютона в проекциях на направление силы Ампера $\vec{F}_A$:

$$0 = F_A - 2T\sin\frac{\alpha}{2} = F_A - 2T\frac{\alpha}{2} = IB\Delta l - \alpha T,$$

откуда $T = IB\frac{\Delta l}{\alpha} = IRB.$ (1)

С другой стороны, силу натяжения можно найти из закона Гука:

$T = k\Delta l = k(R\beta - l_0),$ (2)

где $\beta = 2\arcsin(\frac{l_0}{2R})$, β — центральный угол, опирающийся на дугу окружности, образованной пружиной. Приравняв (1) и (2), найдем силу тока I: $I = \frac{k}{B}\left[2\arcsin\left(\frac{l_0}{2R}\right) - \frac{l_0}{R}\right] = 0{,}32$ А.

15. К источнику с напряжением $U = 10$ В подключили последовательно соединенные катушку индуктивностью $L_0 = 0{,}1$ Гн и резистор сопротивлением $R = 10$ Ом. Через некоторое время ток

в цепи установился. После этого начинают вдвигать и выдвигать сердечник катушки таким образом, чтобы индуктивность изменялась по закону $L = L_0(1 + 0{,}1\sin\omega t)$. При этом в цепи появляется переменная составляющая тока. 1) Найдите амплитуду этой составляющей на частоте $\omega = 1$ рад/с. 2) Какой станет амплитуда, если вдвигать и выдвигать источник в 10000 раз чаще?

Ответ: $I_{m_1} = 10^{-3}$ А; $I_{m_2} = 0{,}1$ А.

Решение. Для цепи с катушкой индуктивности L и резистором R время установления тока (время релаксации) $\tau = L/R$. В данной задаче это среднее время $\tau = L_0/R = 10^{-2}$ с.

1) Период изменения индуктивности $T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 6{,}28$ с. Очевидно, что $T_1 >> \tau$, т. е. изменение индуктивности происходит медленно и ток в цепи успевает установиться при каждом значении индуктивности (процесс квазистатический). Тогда приближенно можно считать, что ток в цепи остается почти постоянным и равным U/R. Используя закон Ома, запишем $I_1\frac{dL}{dt} + I_1R = U$. Учитывая, что $\frac{dL}{dt} = 0{,}1\omega L_0\cos\omega t$, получим $I_1 = \frac{U}{R\left[1 + (0{,}1\omega L_0/R)\cos\omega t\right]} = \frac{U}{R}\left(1 - \frac{0{,}1\omega L_0}{R}\cos\omega t\right)$. Амплитуда переменной составляющей тока равна $I_{m_1} = 0{,}1\frac{\omega L_0 U}{R^2} = 10^{-3}$ А.

2) Период изменения индуктивности $T_2 = \frac{2\pi}{10^4\omega} = 6{,}28\cdot10^{-4} c << \tau$. Изменение индуктивности происходит настолько быстро, что в первом приближении магнитный поток, пронизывающий катушку, можно считать постоянным $\Phi = LI_2 = L_0I_0 = L_0U/R = \text{const}$. Следовательно, $I_2 = \frac{L_0U}{LR} = \frac{L_0U}{L_0\left(1 + 0{,}1\sin 10^4\omega t\right)R} = \frac{U}{R}\left(1 - 0{,}1\sin 10^4\omega t\right)$.

Амплитуда переменной составляющей тока равна
$I_{m_2} = 0{,}1U/R = 0{,}1$ А.

В первом случае (низкие частоты) амплитуда переменной составляющей тока линейно растет с частотой изменения индуктивности; во втором случае (большие частоты) амплитуда от частоты не зависит.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Уровень I

28. КИНЕМАТИКА ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

28.1. Составьте уравнение гармонического колебания, если амплитуда колебаний $A = 5$ см, а период полного колебания $T = 0{,}5$ с.

Решение. Уравнение гармонического колебания имеет вид $x = A\sin\omega t$, где $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$. Тогда $x = A\sin(2\pi t/T) = 0{,}05\sin 4\pi t$.

28.2. Составьте уравнение гармонического колебания, если амплитуда колебания $A = 4$ см, а частота колебаний $\nu = 50$ Гц.

Решение. Аналогично предыдущей задаче.

$x = A\sin 2\pi\nu t = 0{,}04\sin 100\pi t$.

28.3. Точка равномерно движется по окружности. Проекция точки на линию, лежащую в плоскости ее движения, изменяется со временем по гармоническому закону. Запишите, как меняется со временем координата x точки, проекции скорости и ускорения на ось x, если в начальный момент $x = 0$. Постройте графики зависимостей $x(t)$, $\upsilon_x(t)$, $a_x(t)$.

Решение. Координата $x = A\sin\omega t$. Так как амплитуда равна радиусу окружности, а угловая скорость $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$, то $x = R\sin\dfrac{\upsilon}{R}t$. Проекция скорости на ось x:

$\upsilon_x = x' = R\dfrac{\upsilon}{R}\cos\dfrac{\upsilon}{R}t$. Проекция ускорения на ось x: $a_x = \upsilon'_x = -\dfrac{\upsilon^2}{R}\sin\dfrac{\upsilon}{R}t$. Графики $x(t)$, $\upsilon_x(t)$ и $a_x(t)$ приведены на рис. 28.1.

Рис. 28.1

28.4. Материальная точка совершает гармонические колебания, описываемые урав-

нением $x = 0,05\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Определите амплитуду A, круговую частоту ω, период T, частоту ν и начальную фазу колебаний φ_0. Определите также фазу колебаний φ_t и координату колеблющейся точки x_t в момент времени $t = 0,5$ с. Совпадает ли начало наблюдения с началом движения, если колебания точки вызваны толчком из положения равновесия?

Ответ: $A = 0,05 м$; $\omega = \frac{\pi}{2}$ с$^{-1}$; $\nu = 0,25$ Гц; $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$; $\varphi_t = \frac{\pi}{2}$; $x_t = 0,05$ м.

Решение. Из сопоставления заданного уравнения $x = 0,05\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ с уравнением гармонических колебаний $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ следует, что $A = 0,05$ м; $\omega = \frac{\pi}{2}$ с$^{-1}$; $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$. Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4$ с. Частота колебаний $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{4}$ с$^{-1}$ $= 0,25$ Гц. При $t = 0,5$ с, $\varphi_t = \frac{\pi}{2}\cdot 0,5 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $x_t = 0,05\sin\varphi_t = 0,05\sin\frac{\pi}{2} = 0,05$ м. Значение x_t совпадает с амплитудой. По условию, колебания точки вызваны толчком из положения равновесия, т. е. при $x = 0$. Если $x = A\sin\varphi$, то при $x = 0$ и $\sin\varphi = 0$, а соответствующее значение фазы $\varphi = \omega t + \varphi_0 = 0$. Если наблюдение за движением началось в этот момент времени, то следует положить $t = 0$, тогда $\varphi_0 = 0$. В данном случае $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, следовательно, наблюдение за движением началось позднее.

28.5. За какую часть периода точка, совершающая гармонические колебания, пройдет путь, равный: а) половине амплитуды, если в начальный момент она находилась в положении равновесия; б) одной трети амплитуды, если в начальный момент она находилась в крайнем положении?

Ответ: а) $t = \frac{T}{12}$; б) $t = \frac{T}{7,5}$.

Решение. а) Уравнение гармонических колебаний при $\varphi_0 = 0$ имеет вид $x = A\sin\omega t$. Так как $x = \frac{1}{2}$ A, то $\sin\omega t = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{T}t = \frac{1}{2}$, следовательно, $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{6}$, откуда следует $t = \frac{T}{12}$.

б) Так как точка движется из крайнего положения, то $x = A$ при $t = 0$, тогда $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\frac{2\pi t}{T}$. Из условия смещение $x = A - \frac{1}{3}A = \frac{2}{3}A$. Тогда $\cos\frac{2\pi t}{T} = \frac{2}{3}$, а $\frac{2\pi t}{T} = 48°$, $t = \frac{48°}{360°}T = \frac{T}{7,5}$.

28.6. За какую часть периода тело, совершающее гармонические колебания, проходит: а) весь путь от среднего положения до крайнего; б) первую половину этого пути; в) вторую половину?

Ответ: а) $t = \frac{T}{4}$; б) $t_1 = \frac{T}{12}$; в) $t_2 = \frac{T}{6}$.

Решение. а) Выбрав начало отсчета времени в момент $x = 0$, имеем $\varphi_0 = 0$. Уравнение колебаний имеет вид $x = A\sin\omega t$. Согласно условию $x = A$ (или $x = -A$ при $\varphi = \pi$). Тогда $A = A\sin\omega t$, $\sin\omega t = 1$, а $\omega t = \frac{\pi}{2}$. Отсюда $t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$.

б) Время прохождения первой половины этого пути найдем, полагая $x = \frac{1}{2}A$. $\frac{1}{2}A = A\sin\omega t_1$, отсюда $\sin\omega t_1 = \frac{1}{2}$; $\omega t_1 = \frac{\pi}{6}$ и $t_1 = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{T}{12}$.

в) Вторую половину этого пути тело пройдет за время

$$t_2 = t - t_1 = \frac{1}{4}T - \frac{1}{12}T = \frac{1}{6}T.$$

28.7. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 5$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 0,5$ м. Движение начинается из положения $x_0 = 0,3$ м. Запишите уравнение движения точки.

Ответ: $x = 0,5\sin(10\pi t + \arcsin 0,6)$.

Решение. Круговая частота $\omega = 2\pi\nu = 10\pi$. При $t = 0$ $x_0 = A\sin\varphi_0$, откуда $\sin\varphi_0 = \frac{x_0}{A}$, а $\varphi_0 = \arcsin\frac{x_0}{A} = \arcsin 0,6$. Искомое уравнение имеет вид: $x = 0,5\sin(10\pi t + \arcsin 0,6)$.

28.8. Уравнение колебаний точки имеет вид: $x = 0,08\cos\pi(t + 0,2)$. Определите амплитуду, период и начальную фазу колебаний.

Ответ: $A = 0,08$ м; $T = 2$ с; $\varphi_0 = 36°$.

Решение. Амплитуда $A = 0,08$ м; период $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ с; начальная фаза $\varphi_0 = 0,2\pi = 36°$.

28.9. Через сколько времени от начала движения точка, совершающая колебательное движение согласно закону $x = 7\sin\frac{1}{2}\pi t$, проходит путь от положения равновесия до максимального смещения?

Ответ: $t = 1$ с.

Решение. $x_{max} = A$. Уравнение движения $A = A\sin\frac{\pi}{2}t$, откуда $\sin\frac{\pi}{2}t = 1$; $\frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2}$, значит, $t = 1$ с.

28.10. Материальная точка совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид: $x = 0,05\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$. На сколько увеличится фаза этих колебаний за время $\Delta t = 2$ с?

Ответ: $\Delta\varphi = \pi$.

Решение. Из заданного уравнения видно, что $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, а $\varphi = \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}$ и при $t = 2$ с $\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot 2 + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$. Тогда изменение фазы $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \pi$.

28.11. Запишите уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 5$ см, если за $\Delta t = 1$ мин совершается $N = 150$ колебаний и начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 45°$.

Ответ: $x = 0,05\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Уравнение гармонических колебаний: $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

По условию задачи $A = 0,05$ м, $\varphi_0 = 45° = \frac{\pi}{4}$ рад, $\omega = 2\pi\frac{N}{\Delta t} = 5\pi c^{-1}$.

Уравнение имеет вид: $x = 0,05\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

28.12. Груз на пружине колеблется вдоль одной прямой с амплитудой $A = 2$ см. Период колебаний $T = 2$ с. В начальный момент

времени груз проходил положение равновесия. Определите скорость и ускорение груза через время $t = 0,25$ с.

Ответ: $\upsilon = 4,4$ см/с; $a = -14$ см/с^2.

Решение. Уравнение гармонических колебаний:

$x = A\sin\omega t = A\sin\frac{2\pi t}{T}$. Скорость $\upsilon = x' = A\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t = 4,4$ см/с.

Ускорение $a = \upsilon' = -A\frac{4\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}t = -14$ см/с^2.

28.13. По условию задачи 28.12 определите среднюю скорость движения груза от положения равновесия до максимального отклонения его от положения равновесия.

Ответ: $\upsilon_{ср} = 4$ см/с.

Решение. Средняя скорость $\upsilon_{ср} = \frac{4A}{T} = \frac{4\cdot 2}{2} = 4$ см/с.

28.14. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см и периодом $T = 5$ с. Определите для точки: максимальную скорость и максимальное ускорение.

Ответ: $\upsilon_{max} = 12,6$ см/с; $a_{max} = 15,8$ см/с^2.

Решение. $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, $\upsilon = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$,

$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\upsilon_{max} = |A\omega| = A\frac{2\pi}{T} = 12,6$ см/с,

$a_{max} = |A\omega^2| = A\frac{4\pi^2}{T^2} = 15,8$ см/с^2.

28.15. Точка, совершающая гармонические колебания, в некоторый момент времени имеет смещение $x = 4\cdot 10^{-2}$ м, скорость $\upsilon = 0,05$ м/с и ускорение $a = -0,8$ м/с^2. Определите: 1) амплитуду и период колебаний точки; 2) фазу колебаний в рассматриваемый момент времени.

Ответ: $T = 1,4$ с; $A = 4$ см; $\varphi = \pi/12$.

Решение. $x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \upsilon = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$, $a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Очевидно $a = -\omega^2 x$, откуда $\omega = \sqrt{-\frac{a}{x}} = \sqrt{20}$; $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,4$ с.

$x^2 = A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$ и $\upsilon^2 = \omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$, тогда $\frac{x^2}{A^2} = \sin^2(\omega t + \varphi_0)$,

а $\frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_0)$. После несложных математических преоб-

разований получим $A=\sqrt{v^2+\omega^2 x^2}=4\cdot10^{-2}$ м. $\sin(\omega t+\varphi_0)=\frac{x}{A}=1$,

$\omega t+\varphi_0=\varphi=\frac{\pi}{2}$.

28.16. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x=0{,}02\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$ м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу колебаний; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение точки; 6) через сколько времени после начала отсчета точка будет проходить через положение равновесия.

Ответ: $A=0{,}02$ м; $T=2$ с; $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$, $v_{max}=6{,}28$ м/с; $a=19{,}7$ м/с^2; $t=n$ с, где $n=0$, 1, 2 и т. д.

Решение. $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$, $A=0{,}02$ м, $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega=\pi$, $T=2$ с, $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$, $v=-0{,}02\pi\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$, $v_{max}=0{,}02\pi$ м/с, $a=-0{,}02\pi^2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$, $a_{max}=0{,}02\pi^2$ м/с^2. При $x=0$: $0{,}02\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\pi t+\frac{\pi}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ($n=0$, 1, 2, ...). Откуда $t=\frac{n\pi}{\pi}=n$.

28.17. Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом $T=0{,}6$ с и амплитудой $A=10$ см. Найдите среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь $A/2$: 1) из крайнего положения; 2) из положения равновесия.

Ответ: 1) $v_{ср}=0{,}5$ м/с; 2) $v_{ср}=1$ м/с.

Решение. По условию $x=\frac{A}{2}$. Воспользуемся решением задачи 28.6.

1) $t_1=\frac{T}{6}$, $v_{ср}=\frac{A\cdot6}{2\cdot T}=0{,}5$ м/с.

2) $t_2=\frac{T}{12}$, $v_{ср}=\frac{A\cdot12}{2\cdot T}=1$ м/с.

28.18. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия $x=0$. Частота колебаний $\omega=4$ рад/с. Определите, в какой момент времени после прохождения положения равновесия частица будет иметь координату $x=25$ см и скорость $v_x=100$ см/с.

Ответ: $t=0{,}2$.

Решение. Уравнение гармонических колебаний $x=A\sin\omega t$, скорость $v_x=x'=A\omega\cos\omega t$. $\frac{x}{v_x}=\frac{\mathrm{tg}\,\omega t}{\omega}$, откуда $t=\frac{1}{\omega}\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega x}{v_x}\right)=0{,}2$.

29. ДИНАМИКА ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

29.1. На нити длиной l подвесили маленький груз массой m. Груз отклоняют от положения равновесия и отпускают. Изобразите силы, действующие на груз. Объясните, почему период колебаний груза, подвешенного на нити, не зависит от его массы. Определите период малых колебаний этого груза (математического маятника).

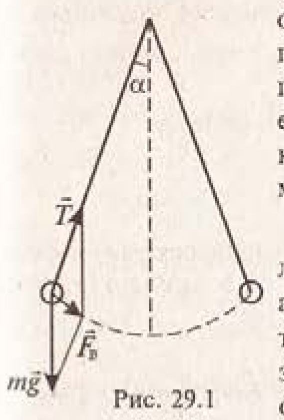


Рис. 29.1

Решение. Моделью заданной системы является математический маятник. На материальную точку (грузик) действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Действие этих сил приводит к движению грузика по окружности радиусом l с ускорением $\vec{a}$. Так что $m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{T}$ (рис. 29.1). Проекция данного уравнения на прямую, касательную к окружности, дает $ma_\tau=-mg\sin\alpha$, где $ma_\tau=F_в$ — возвращающая сила. Заменив $\sin\alpha=\alpha=\frac{x}{l}$ (для малых α), получим $a_\tau=-\frac{gx}{l}$. При гармонических колебаниях $a=a_\tau=-\omega_0^2 x$, а $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$, то очевидно, что $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Откуда следует, что период колебаний математического маятника от массы не зависит.

29.2. На гладком столе находится груз массой m, прикрепленный к выступу пружиной жесткостью k. Груз отклоняется от положения равновесия. Нарисуйте силы, действующие на груз. Определите период колебаний груза на пружине (пружинного маятника).

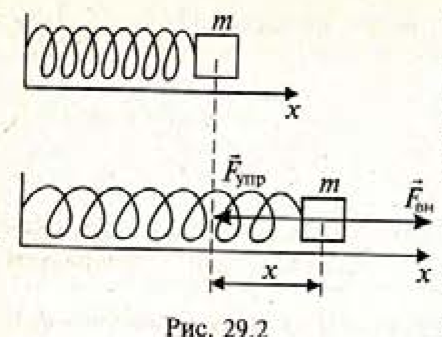


Рис. 29.2

Решение. На груз действует внешняя сила $\vec{F}_{вн}$, растягивающая пружину, (рис. 29.2) и сила упругости пружины, равная по модулю внешней силе $F_{упр} = -kx$. Тогда $ma = -kx$, а $a = -\frac{kx}{m}$. Ускорение гармонических колебаний $a = -\omega_0^2 x$. Очевидно $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, а $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

29.3. К пружине жесткостью $k = 25$ Н/м подвешено тело массой $m = 3{,}65$ кг. Определите период колебаний данного пружинного маятника.

Ответ: $T = 2{,}4$ с.

Решение. Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2{,}4\,\text{с}.$$

29.4. Длина маятника, установленного в Исаакиевском соборе в Ленинграде, равна 98 м. За какое время маятник совершает полное колебание?

Ответ: $T = 20$ с.

Решение. Маятник совершит одно полное колебание за время, равное периоду. Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 20\,\text{с}$.

29.5. Для определения ускорения свободного падения был взят маятник, состоящий из проволоки длиной $l = 90{,}7$ см и металлического шарика диаметром $d = 40$ мм. Продолжительность $n = 100$ полных колебаний маятника оказалась равной $t = 193$ с. Вычислите по этим данным ускорение свободного падения.

Ответ: $g = 9{,}82$ м/с^2.

Решение. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l + \frac{d}{2}}{g}}$ и $T = \frac{t}{n}$. Из сравнения этих формул находим $g = 4\pi^2 n^2 (l + \frac{d}{2}) = 9{,}82$ м/с^2.

29.6. Маятник массой $m = 5$ кг на нити, имеющей длину $l = 0{,}8$ м, совершает колебательные движения с амплитудой $A = 0{,}4$ м. Найдите скорость движения маятника v, когда он пройдет путь $S = 10$ см от положения равновесия, и наибольшую силу натяжения нити T. Массой нити пренебречь.

Ответ: $v = 1{,}35$ м/с; $T = 61{,}2$ Н.

Решение. Уравнение движения маятника $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, скорость в любой момент времени $v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Преобразуем эти выражения к виду $\frac{x^2}{A^2} = \sin^2(\omega t + \varphi_0)$ и $\frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_0)$.

Тогда $\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$. Если учесть, что $x = S$ и $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, то нетрудно получить $v = \sqrt{\frac{g(A^2 - S^2)}{l}} = 13{,}55$ м/с. Наибольшая сила натяжения соответствует положению равновесия, где $v_{max} = \omega A = 1{,}35$ м/с. Из второго закона Ньютона $T - mg = \frac{mv_{max}^2}{l}$ следует

$$T = mg + \frac{mv_{max}^2}{l} = 61{,}2\ \text{Н}.$$

29.7. На какую часть длины надо уменьшить длину математического маятника, чтобы период колебаний маятника на высоте $h = 10$ км был равен периоду его колебаний на поверхности Земли?

Ответ: $\frac{\Delta l}{l} = 3{,}1 \cdot 10^{-3}$.

Решение. Условие равенства периодов колебаний маятников разной длины на разных высотах выражается следующим образом: $\frac{l_0}{g_0} = \frac{l}{g_h}$. Образовав производную пропорцию, получаем $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0 - l}{l_0} = \frac{g_0 - g_h}{g_0}$. Учитывая, что $g_h = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$ (g изменяется с высотой по закону обратных квадратов) находим $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{2h}{R} = 3{,}1 \cdot 10^{-3}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

29.8. Один из маятников за некоторое время совершил $n_1 = 10$ колебаний. Другой за то же время совершил $n_2 = 6$ колебаний. Разность длин маятников $\Delta l = 16$ см. Найдите длины маятников l_1 и l_2.

Ответ: $l_1 = 9$ см; $l_2 = 25$ см.

Решение. $T_1 = \frac{t}{n_1} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$, $T_2 = \frac{t}{n_2} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1+\Delta l}{g}}$. Так как время колебаний маятников одинаково, находим $\frac{n_2^2}{n_1^2} = \frac{l_1}{l_1+\Delta l}$, откуда $l_1 = \frac{n_2^2\Delta l}{n_1^2 - n_2^2} = 9$ см, тогда $l_2 = l_1 + \Delta l = 25$ см.

29.9. Два одинаковых упругих шарика подвешены на нитях, имеющих длины $l_1 = 1$ м и $l_2 = 0,25$ м так, что центры масс шаров находятся на одном уровне и шары соприкасаются друг с другом. Нить второго шара отклоняют на небольшой угол и отпускают. Сколько раз столкнутся шарики за время $\Delta t = 4$ с, прошедшее с начала движения второго шарика.

Ответ: 5 раз.

Решение. Периоды колебаний первого и второго шариков равны соответственно $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2$ с и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = 1$ с. За время $\Delta t = 4$ с первый шарик в положении равновесия окажется 5 раз, считая исходные положение. И хотя второй окажется в этой точке 7 раз, но встретятся они лишь 5 раз.

29.10. Во сколько раз изменится частота колебаний математического маятника при увеличении длины нити в три раза?

Ответ: В $\sqrt{3}$ раз.

Решение. Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, частота $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$, тогда $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \sqrt{\frac{l_1}{3l_1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

29.11. Найдите отношение длин математических маятников, если за одно и то же время один делает 10, а второй — 30 колебаний?

Ответ: $\frac{l_1}{l_2} = 9$.

Решение. Периоды колебаний математических маятников $T_1 = \frac{t}{n_1} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$, $T_2 = \frac{t}{n_2} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$. Их длины $l_1 = \frac{t^2 g}{4\pi^2 n_1^2}$, $l_2 = \frac{t^2 g}{4\pi^2 n_2^2}$. Откуда $\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = 9$.

29.12. Определите, как будут отличаться показания ручных часов и часов-ходиков через сутки после того, как их подняли на высоту $h = 5$ км над поверхностью земли.

Ответ: $\Delta t = 68$ с.

Решение. Из формулы периода колебаний маятника следует, что $\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{g_0}{g}$, где T и T_0, g и g_0 — соответственно периоды и ускорения на высоте h и на Земле. Так как $g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$, то $\frac{g_0}{g} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = 1 + \frac{2h}{R} + \frac{h^2}{R^2} \approx 1 + \frac{2h}{R}$ (так как $\frac{h}{R} < 1$, и поэтому $\frac{h^2}{R^2} << \frac{2h}{R}$). Таким образом, $\frac{T^2}{T_0^2} = 1 + \frac{2h}{R}$, а $T^2 - T_0^2 = \frac{2h}{R}T_0^2$. Ввиду того, что T мало отличается от T_0, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}\left(\frac{h+R}{R}\right)^2} = T_0\frac{h+R}{R} = T_0\left(1 + \frac{h}{R}\right)$, т. е. за время T_0 часы отстанут на $\Delta T = T - T_0 = \frac{h}{R}T_0$, тогда за $t_c = 24$ ч часы отстанут на время Δt такое, что $\frac{\Delta t}{t_c} = \frac{\Delta T}{T_0}$.

Откуда следует $\Delta t = \frac{t_c}{T_0}\Delta T = t_c\frac{h}{R} = 68$ с.

29.13. При температуре $t_1 = 20$ °C период колебания маятника $T_1 = 2$ с. Как изменится период колебаний, если температура возрастает до $t_2 = 30$ °C? Коэффициент линейного расширения материала маятника $\alpha = 1,85 \cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$.

Ответ: Возрастет в 1,0000924 раза.

Решение. При $t_1 = 20$ °C $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}$. При повышении температуры на $\Delta t = t_2 - t_1 = 10$ °C, период $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0(1+\alpha\Delta t)}{g}} = T_1\sqrt{1+\alpha\Delta t}$, тогда $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{1+\alpha\Delta t} = 1,0000924$.

29.14. При температуре $t_1 = 0$ °C период колебаний математического маятника равен 2 с. Чему равен период колебаний при $t_2 = 20$ °C, если коэффициент линейного расширения нити маятника $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-5}$град$^{-1}$.

Ответ: $T_2 = 2,00036$ с.

Указание. См. решение задачи 29.13. $T_2 = T_1\sqrt{1+\alpha t_2} = 2{,}00036$ с.

29.15. Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Земли в 3,7 раза больше радиуса Луны. Как изменится период колебаний маятника при перенесении его с Земли на Луну?

Ответ: Увеличится примерно в 2,4 раза.

Решение. Периоды колебания маятника на Земле и Луне равны соответственно $T_з = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_з}}$, $T_л = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_л}}$. Откуда $\frac{T_л}{T_з} = \sqrt{\frac{g_з}{g_л}}$, $g_з = \frac{GM}{R^2}$, $g_л = \frac{GM(3{,}7)^2}{81R^2}$. Таким образом, $\frac{T_л}{T_з} = \sqrt{\frac{GM\cdot 81\cdot R^2}{R^2GM(3{,}7)^2}} = \sqrt{\frac{81}{(3{,}7)^2}} = 2{,}4$.

29.16. На пружине подвешен грузик массой m. Период колебаний системы $T_1 = 0{,}5$ с. Затем подвесили еще один грузик, в результате период колебаний T_2 стал равным 0,6 с. Определите удлинение пружины.

Ответ: $\Delta l = 2{,}73$ см.

Решение. Периоды колебаний пружинного маятника в первом и втором случаях соответственно равны $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k}}$, откуда $T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta m}{k}$. Из закона Гука $k = \frac{|\vec F|}{\Delta l}$, где $F = \Delta mg$. Тогда $k = \frac{\Delta mg}{\Delta l}$, а $\Delta l = \frac{g\left(T_2^2 - T_1^2\right)}{4\pi^2} = 2{,}73$ см.

29.17. При отклонении от положения равновесия ареометр в сосуде с водой совершает гармонические колебания с периодом $T_1 = 1$ с. Каков будет период колебаний ареометра при погружении его в керосин? Плотность воды $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3, плотность керосина $\rho_2 = 0{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $T_2 = 1{,}12$ с.

Решение. Сила, стремящаяся вернуть ареометр в положение равновесия (сила Архимеда), равна силе упругости, т. е. $\rho_1 gxS = kx$. Тогда $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_1 gS}}$ и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_2 gS}}$, а $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$. Откуда $T_2 = T_1\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = 1{,}12$ с.

29.18. Вычислите период малых колебаний ареометра, погруженного в воду, которому сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Масса ареометра $m = 50$ г, радиус его трубки $r = 5$ мм. Сопротивлением воды пренебречь.

Ответ: $T = 1{,}6$ с.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$, где $S = \pi r^2$. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g\pi r^2}} = 1{,}6$ с.

29.19. Маятник состоит из тяжелого шарика, масса которого $m = 100$ г, подвешенного на нити длиной $l = 50$ см под углом $\alpha = 15°$. Определите период колебаний маятника и энергию, которой он обладает.

Ответ: $T = 1{,}42$ с; $W_п = 15$ мДж.

Решение. Считая шарик математическим маятником, а его колебания гармоническими, находим период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}42$ с. Энергия маятника, отклоненного на угол а, равна $W_п = mgh = mgl(1 - \cos\alpha) = 15\cdot 10^{-3}$ Дж $= 15$ мДж.

29.20. Определите энергию, которой обладает математический маятник массой $m = 100$ г и длиной $l = 1$ м, если амплитуда колебаний равна $A = 0{,}4$ м.

Ответ: $W = 0{,}078$ Дж.

Решение. Энергия математического маятника $W = W_к = \frac{mv_{max}^2}{2}$. Уравнение гармонического колебания $x = A\sin\omega t$, скорость $v = x' = \omega A\cos\omega t$, а $v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T}A$. Тогда $W = \frac{4m\pi^2}{T^2}A^2$. Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, тогда $W = \frac{mgA^2}{2l} = 0{,}078$ Дж.

29.21. Уравнение движения материальной точки массой 5 г имеет вид $x = 4\sin\left(\frac{2\pi}{8}t + 2\right)$ см. Определите амплитуду колебаний, циклическую частоту, период колебаний, начальную фазу, максимальную скорость, максимальное ускорение, максимальную силу, поддерживающую это движение, и полную энергию колеблющейся точки.

Ответ: $A = 4\cdot 10^{-2}$ м, $\omega = \frac{\pi}{4}$ с$^{-1}$, $\varphi_0 = 2$ рад, $T = 8$ с,

$v_{max} = 3{,}14 \cdot 10^{-2}$ м/с, $a_{max} = -2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м/с^2, $F_{max} = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$ Н, $W = 0{,}25$ Дж.

Решение. Сравнивая заданное уравнение с уравнением гармонических колебаний $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, получаем, что амплитуда колебаний $A = 4 \cdot 10^{-2}$ м, циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ с$^{-1}$, начальная фаза $\varphi_0 = 2$ рад, период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 8$ с. Скорость точки $v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$, максимальная скорость будет в том случае, когда $\omega t + \varphi_0 = 0$, а $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$; таким образом, $v_{max} = A\omega = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\pi}{4} = 3{,}14 \cdot 10^{-2}$ м/с. Скорость точки будет максимальна в положении равновесия. Ускорение точки $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$ будет максимальным при фазе $\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. В этом случае $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$ и $a_{max} = -A\omega^2 = -4 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{3{,}14^2}{4^2} = -2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м/с^2. Ускорение будет максимальным в крайних точках (максимально удаленных от положения равновесия). Знак «–» указывает на то, что ускорение всегда направлено в сторону, противоположную смещению точки. Максимальную силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона: $F_{max} = m|\vec{a}_{max}|$, $F_{max} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$ Н. Полная энергия точки $W = W_к + W_п$, $W = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$, $W = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 \frac{\pi^2}{16} = 0{,}25$ Дж.

29.22. К динамометру подвесили груз, вывели его из состояния равновесия и отпустили. При этом возникли колебания, частота которых $\nu = 2$ Гц. На каком расстоянии от нулевого положения остановится указатель динамометра после прекращения колебаний? Массу пружины не учитывать.

Ответ: $\Delta l = 0{,}06$ м.

Решение. После прекращения колебаний груз будет находиться в положении равновесия. При этом сила тяжести равна силе упругости $F = mg$. По закону Гука $|\vec{F}| = k\Delta l$, т. е. $k\Delta l = mg$; $\Delta l = mg/k$.

Из формулы периода колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ найдем жесткость $k = 4\pi^2 m/T^2$. Так как $\nu = 1/T$, то $k = 4\pi^2 m\nu^2$. Подставив это значение в выражение для Δl, получим $\Delta l = g/4\pi^2\nu^2$; $\Delta l = 0{,}06$ м.

29.23. Банка в виде цилиндра с утяжеленным дном плавает в воде. После толчка банка колеблется вблизи положения равновесия. Пренебрегая силами сопротивления, найдите период колебаний банки. Масса банки — m, площадь основания — S.

Решение. На банку действует сила тяжести и выталкивающая сила Архимеда. В состоянии равновесия объем погруженной части $V_п$. По условию плавания тел: $m\vec{g} + \vec{F}_{A_1} = 0$; $mg - \rho g V_п = 0$ (ось x направлена вниз). После толчка банка погрузится в воду еще на дополнительную высоту x. Объем погруженной части станет равным $V_п + xS$. По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{F}_{A_2} = m\vec{a}$, $mg - \rho g(V_п + xS) = ma$, т. о. $ma = -\rho g \cdot Sx$. Результирующая сил, действующих на банку, $F = -kx$, т. е. $ma = -kx$, $k = \rho g S$. Банка совершает гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$.

29.24. С каким ускорением a и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней секундный маятник за время $t = 2$ мин 30 с совершил $N = 100$ колебаний?

Ответ: $a = 5{,}4$ м/с^2.

Решение. Перейдем в систему координат, связанную с лифтом (неинерциальная система координат). Пусть ускорение лифта направлено вверх. На маятник действует сила натяжения нити $\vec{F}_н$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Второй закон Ньютона имеет вид: $F_н - mg = ma$ или $F_н = m(g + a)$. Таким образом, вес шарика как бы увеличился на величину ma, которая называется силой инерции. Тогда в формуле для периода колебаний вместо g нужно поставить $g' = g + a$. Если ускорение направлено вниз, то $g' = g - a$. Направление движения лифта не имеет значения. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm a}}$. По условию задачи период колебаний маятника в лифте увеличился, 100 колебаний он совершил не за 100 с, а за 150 с. Следовательно, лифт имеет ускорение, направленное вниз $g' = g - a$.

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}} = \dfrac{t}{N}$. В неподвижном лифте период колебаний $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 1$ с. Тогда $\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{t}{NT_0} = \sqrt{\dfrac{g}{g-a}}$; $a = g\left(1 - \dfrac{N^2T_0^2}{t^2}\right)$;

$$a = 9{,}8\left(1 - \frac{100^2 \cdot 1^2}{150^2}\right) = 5{,}4 \text{ м/с}^2.$$

29.25. В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого $T_1 = 1$ с. С каким ускорением движется лифт, если период колебаний этого маятника стал равным $T_2 = 1{,}1$ с? В каком направлении движется лифт?

Ответ: $a = 1{,}7$ м/с^2.

Решение. Период колебаний маятника в движущемся лифте $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$ (см. предыдущую задачу). В неподвижном лифте $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Тогда $\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2 = \dfrac{g}{g-a}$, откуда $a = g\left[1 - \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^2\right] \approx 1{,}7$ м/с^2. Ответ положительный, значит лифт движется с ускорением, направленным вниз; направление скорости не играет роли.

29.26. Маятник длиной $l = 1{,}2$ м подвешен к потолку вагона, движущегося горизонтально по прямой с ускорением $a = 2{,}2$ м/с^2. Найти положение равновесия и период колебаний маятника.

Ответ: $\alpha = 13°$; $T \approx 2{,}1$ с.

y, $\vec{F}$, α, $\vec{R}$, $m\vec{g}$, x

Рис. 29.3

Решение. Выберем систему отсчета, связанную с Землей (рис. 29.3). При движении вагона с ускорением маятник отклонится от вертикали на угол α и относительно вагона будет неподвижным. В этом положении равнодействующая $\vec{R}$ силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{F}$ должна обеспечивать маятнику ускорение, равное ускорению вагона a, поэтому $\vec{R} = m\vec{a}$. Тогда равновесный угол α между нитью и вертикалью определяется условием $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R}{mg} = \dfrac{a}{g}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{g} \approx 13°$. Период колебаний

маятника в вагоне будет такой же, как для маятника той же длины, но колеблющегося под действием эффективной силы $F = \sqrt{(mg)^2 + R^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}$ с ускорением $g' = \dfrac{F}{m} = \sqrt{g^2 + a^2}$;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \approx 2{,}1 \text{ с}.$$

29.27. Кубик совершает малые колебания в вертикальной плоскости, двигаясь без трения по внутренней поверхности сферической чаши. Найдите период колебаний кубика, если чаша опускается вниз с ускорением $a = g/3$. Считать, что внутренний радиус чаши $R = 0{,}02$ м много больше ребра кубика.

Ответ: $T = 0{,}35$ с.

Указание. См. решение задачи 29.23. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$, полагая $l = R$, $a = \dfrac{g}{3}$, получим $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3R}{2g}} = 0{,}35$ с.

29.28. Найдите потенциальную энергию математического маятника массой $m = 200$ г в положении, соответствующем углу отклонения нити от вертикали $\alpha = 10°$, если частота колебаний маятника $\nu = 0{,}5$ с$^{-1}$. Считать потенциальную энергию маятника в положении равновесия равной 0.

Ответ: $W_п = 2{,}9$ мДж.

Решение. Потенциальная энергия маятника $W_п = mgh = mgl(1 - \cos\alpha)$. Период колебаний $T = \dfrac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, откуда $l = \dfrac{g}{4\pi^2\nu^2}$.

$$W_п = \frac{mg^2(1-\cos\alpha)}{4\pi^2\nu^2} = 2{,}9 \text{ мДж}.$$

29.29. Маятник длиной 80 см, подвешенный в самолете, летящем горизонтально, совершает 4 колебания за 7 с. С каким ускорением летит самолет?

Ответ: $a = 3{,}2$ м/с^2.

Решение. Воспользуемся решением задачи 29.25 и найдем ускорение a. $T = \dfrac{t}{n} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$, $\sqrt{g^2 + a^2} = \dfrac{4\pi^2 n^2 l}{t^2}$,

$$a = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 n^2 l}{t^2}\right)^2 - g^2} = 3,2\ \text{м/с}^2.$$

29.30. Груз, подвешенный на нити длиной $l = 1$ м, отклонили на небольшой угол от положения равновесия и отпустили. Определите, через какое время груз вернется в исходную точку, если при движении нить была задержана штифтом, поставленным на одной вертикали с точкой подвеса, посередине длины нити (рис. 29.4).

Рис. 29.4

Ответ: $T = 1,7$ с.

Решение. Движение маятника справа от вертикали происходит за полупериод $\frac{T_1}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, а слева — за полупериод $\frac{T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$. Полный период равен $T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \pi\sqrt{\frac{l}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 1,7$ с.

29.31. На двух пружинах с коэффициентами жесткости k_1 и k_2, соединенных последовательно (рис. 29.5), висит груз m. Найдите период вертикальных колебаний такой системы.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$.

Решение. Под действием одной и той же силы F каждая из пружин растянется на длину $x_1 = \frac{F}{k_1}$, $x_2 = \frac{F}{k_2}$. Для системы пружин $F = kx = k(x_1 + x_2) = k\left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}\right)$. Откуда $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. Период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

k_1, k_2, m

Рис. 29.5

29.32. В условии предыдущей задачи пружины соединены параллельно. Найдите период колебаний такой системы.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$.

Решение. Обе пружины растянутся на одинаковую длину. $F_1 = k_1 x$, $F_2 = k_2 x$; тогда $F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)x$. Но $F = kx$ и $F = F_1 + F_2$.

Следовательно, $k = k_1 + k_2$, а период $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$.

29.33. К пружине подвешена чашка весов с гирями. Период вертикальных колебаний чашки равен T_1. После того, как на чашку положили добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равен T_2. Насколько удлинилась пружина от прибавления добавочного груза?

Ответ: $\Delta x = \frac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right)$.

Решение. $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}}$; $T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta m}{k}$. Для упругой силы $k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{g\Delta m}{\Delta x}$, где F — сила, вызывающая удлинение пружины на Δx. Таким образом, $T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta m \Delta x}{g\Delta m} = 4\pi^2\frac{\Delta x}{g}$, откуда $\Delta x = \frac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right)$.

29.34. Тело массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0,1\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$. Определите максимальные значения: 1) возвращающей силы; 2) кинетической энергии.

Ответ: $F_{max} = 0,158$ Н; $W_{к\,max} = 7,89$ мДж.

Решение. Из сравнения уравнения гармонических колебаний $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ с заданным $x = 0,1\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, находим $A = 0,1$ м, $\omega = 4\pi c^{-1}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, $\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$, $\upsilon_{max} = -A\omega$ $a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$, $a_{max} = -A\omega^2$. $F_{max} = ma_{max} = mA\omega^2 = 0,158$ Н.

$$W_{к\,max} = \frac{m\upsilon_{max}^2}{2} = \frac{mA\omega^2}{2} = 7,89\ \text{мДж}.$$

29.35. Материальная точка массой $m = 20$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0,1\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$. Определите полную энергию этой точки.

Ответ: $W = 15,8$ мДж.

Решение. $W = W_к + W_п$, $W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0)$,

$W_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0)$. $W = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = 15,8$ мДж.

29.36. Полная энергия гармонически колеблющейся точки равна $W = 10$ мкДж, а максимальная сила, действующая на точку, $F_{max} = -0,5$ мН. Напишите уравнение движения этой точки, если период колебаний $T = 4$ с, а начальная фаза $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $x = 0,04\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Полная энергия $W = \frac{mA^2\omega^2}{2}$, максимальная сила $F_{max} = mA\omega^2$. Их отношение $\frac{W}{F_{max}} = \frac{mA^2\omega^2}{2mA\omega^2} = \frac{A}{2}$, т. е. амплитуда $A = \frac{2W}{F_{max}} = 0,04$ м. Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ с$^{-1}$. Уравнение гармонических колебаний $x = 0,04\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$.

29.37. Определите отношение кинетической энергии точки, совершающей гармонические колебания, к ее потенциальной энергии, если известна фаза колебания.

Ответ: $W_к/W_п = \operatorname{tg}^2(\omega t + \varphi_0)$.

Решение. $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, $v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$,

$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$. $W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0)$,

$W_п = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega^2 x dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0)$;

$\frac{W_к}{W_п} = \operatorname{tg}^2(\omega t + \varphi_0)$.

29.38. Металлический шарик на длинной нити помещен между обкладками вертикального конденсатора. Как изменится характер колебаний шарика, если его масса — m, заряд — q, длина нити — l и напряженность поля в конденсаторе — E? Определите период колебаний шарика.

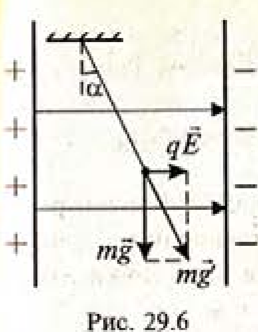


Рис. 29.6

Решение. При подключении электрического поля к конденсатору в положении равновесия шарика нить будет составлять с вертикалью угол α (рис. 29.6), $\operatorname{tg}\alpha = \frac{qE}{mg}$.

Эффективное ускорение свободного падения g' определится из уравнения второго закона Ньютона $mg' = \sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}$ и будет равно $g' = \frac{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}{m} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{Eq}{m}\right)^2}$. Тогда период колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{Eq}{m}\right)^2}}}.$$

29.39. Маленький шарик подвешен на нити длиной 1 м к потолку вагона. При какой скорости вагона шарик будет особенно сильно колебаться под действием ударов колес о стыки рельсов? Длина рельса 12,5 м.

Ответ: $v = 6,2$ м/с.

Решение. Шарик совершает вынужденные колебания с частотой ν, равной частоте ударов колес о стыки рельсов $\nu = \frac{v}{s}$. Так как размеры тела малы по сравнению с длиной нити, то его можно считать математическим маятником с периодом колебаний $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, тогда частота собственных колебаний $\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$. Амплитуда вынужденных колебаний максимальна в случае резонанса, когда $\nu = \nu_0$.

Следовательно, $\frac{v}{s} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$, откуда $v = \frac{s}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 6,2$ м/с.

29.40. При какой скорости поезда маятник длиной $l = 11$ см, подвешенный в вагоне, особенно сильно раскачивается, если расстояние между стыками рельсов $L = 12,5$ см?

Ответ: $v = 68$ км/ч.

Решение. При ударе колес вагона о стыки рельс вагон получает импульс, имеющий наряду с вертикальной и горизонтальную составляющую. Если период между ударами будет равен периоду колебаний маятника, то маятник будет раскачиваться особенно сильно. $T_1 = \frac{L}{v}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, $T_1 = T_2$, т. е. $\frac{L}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, откуда

$$v = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 18{,}78\,\text{м/с} = 68\,\text{км/ч}.$$

30. ВОЛНЫ. ЗВУК

30.1. Звук пушечного выстрела дошел до наблюдателя через время $\tau = 30$ с после того, как была замечена вспышка. Расстояние между пушкой и наблюдателем $l = 10$ км. Определите скорость распространения звука в воздухе.

Ответ: $v = 330$ м/с.

Решение. Скорость распространения звука $v = \frac{l}{t+\tau}$, где $t = \frac{l}{c}$ — время распространения светового сигнала.

$$v = \frac{l}{\frac{l}{c}+\tau} = \frac{lc}{l+\tau c} = 330 \text{ м/с}.$$

30.2. Первый раскат грома дошел до наблюдателя через время $\tau = 12$ с после того, как была замечена вспышка молнии. На каком расстоянии от наблюдателя возникла молния?

Ответ: $l = 4$ км.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $l = \frac{vc\tau}{c-v} = 4$ км.

30.3. Наиболее низкий звук, еще воспринимаемый человеком с нормальным слухом, имеет частоту $\nu = 16$ Гц. Какова длина волны в воздухе, соответствующая этой частоте? Скорость распространения звука в воздухе $v = 340$ м/с.

Ответ: $\lambda = 21$ м.

Решение. Длина волны $\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = 21$ м.

30.4. Определите длину звуковой волны в воде, вызываемой источником колебаний с частотой $\nu = 200$ Гц, если скорость звука в воде $v = 1450$ м/с.

Ответ: $\lambda = 7{,}25$ м.

Решение. $\lambda = \frac{v}{\nu} = 7{,}25$ м.

30.5. Во сколько раз изменится длина звуковой волны при переходе звука из воздуха в воду? Скорость звука в воде $v_1 = 1450$ м/с, в воздухе $v_2 = 340$ м/с.

Ответ: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 4{,}35$.

Решение. В воде $\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu}$, в воздухе $\lambda_2 = \frac{v_2}{\nu}$. Таким образом, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = 4{,}35$.

30.6. Звуковые колебания частотой ν имеют в первой среде длину волны λ_1, а во второй среде — λ_2. Как изменится скорость распространения этих колебаний при переходе из первой среды во вторую, если $\lambda_1 = 2\lambda_2$?

Ответ: $\frac{v_1}{v_2} = 2$.

Решение. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$, $\frac{2\lambda_2}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$, т. е. $\frac{v_1}{v_2} = 2$.

30.7. Составьте уравнение плоской волны, распространяющейся в воздухе, частицы которой колеблются с частотой $\nu = 2$ кГц и амплитудой $A = 1{,}7$ мкм. Скорость распространения звука в воздухе $v = 340$ м/с.

Решение. Уравнение плоской волны $y(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$.

$\omega = 2\pi\nu = 4\pi\cdot 10^3\ \text{с}^{-1}$, $A = 1{,}7\cdot 10^{-6}$ м.

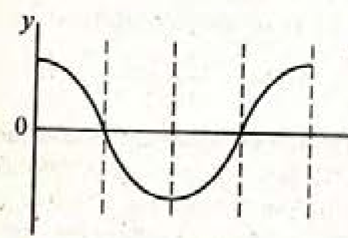
Таким образом, $y(x,t) = 1{,}7\cdot 10^{-6}\sin 4\pi\cdot 10^3\left(t - \frac{x}{340}\right)$.

30.8. Составьте уравнение плоской волны, распространяющейся в среде, точки которой колеблются с частотой $\nu = 1{,}5$ кГц. Длина волны, соответствующая данной частоте, равна $\lambda = 15$ см. Мак-

симальные смещения точек среды от положения равновесия в $n = 200$ раз меньше длины волны.

Решение. Уравнение плоской волны имеет вид $y(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Согласно условию: $\omega = 2\pi\nu$, $A = \frac{\lambda}{n}$. Скорость $v = \lambda\nu$. Уравнение принимает вид

$$y(x,t) = \frac{\lambda}{n}\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) = 7{,}5\cdot10^{-4}\sin 2\pi\left(1500t - \frac{x}{0{,}15}\right).$$



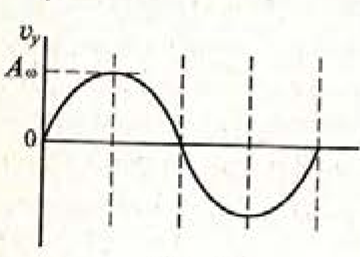


Рис. 30.1

30.9. В однородной упругой среде распространяется плоская волна вида $y = A\cos(\omega t - kx)$. Изобразите для момента $t = 0$ графики зависимостей от x величин y и v_y.

Решение. См. рис. 30.1.

$$v_y = y' = -A\omega\sin(\omega t - kx).$$

30.10. Уравнение бегущей плоской звуковой волны имеет вид $y = 60\cos(1800t - 5{,}3x)$, где y — смещение, мкм; t — время, с; x — расстояние, м. Найдите отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны.

Ответ: $\frac{A}{\lambda} = 5\cdot10^{-5}$.

Решение. Уравнение плоской волны $y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu x}{v}\right)$. Сравниваем с заданным уравнением $y = 60\cos(1800t - 5{,}3x)$, находим $A = 60\cdot10^{6}$ м, $\frac{2\pi\nu}{v} = 5{,}3$, откуда $\frac{v}{\nu} = \lambda = \frac{2\pi}{5{,}3} = 1{,}2$ м. Таким образом $\frac{A}{\lambda} = \frac{60\cdot10^{-6}}{1{,}2} = 5\cdot10^{-5}$.

30.11. Скорость звука в воде $v = 1450$ м/с. На каком расстоянии находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний $\nu = 725$ Гц?

Ответ: $l = 1$ м.

Решение. Искомые точки находятся на расстоянии, равном половине длины волны. Так как $\lambda = \frac{v}{\nu}$, то $l = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2\nu} = 1$ м.

30.12. Волна распространяется со скоростью $v = 360$ м/с при частоте $\nu = 450$ Гц. Чему равна разность фаз двух точек волны, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x = 20$ см?

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Если две точки отстоят друг от друга на расстоянии равном λ, то разность фаз равна 2π, а если на расстоянии Δx, то разность фаз $\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda}2\pi$. Так как $\lambda = \frac{v}{\nu}$, то $\Delta\varphi = \frac{2\pi\nu}{v}\Delta x = \frac{\pi}{2}$.

30.13. Волна с частотой $\nu = 5$ Гц распространяется в пространстве со скоростью $v = 3$ м/с. Найдите разность фаз волны в двух точках пространства, отстоящих друг от друга на расстоянии $l = 0{,}2$ м и расположенных на прямой, совпадающей с направлением распространения волны.

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{2}{3}\pi$.

Решение. Длина волны $\lambda = \frac{v}{\nu} = 0{,}6$ м. Так как на расстоянии длины волны λ разность фаз равна 2π, то на расстоянии l разность фаз $\Delta\varphi = \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2}{3}\pi$.

30.14. Плоская бегущая волна представлена уравнением $y = 0{,}05\sin(1980t - 6x)$, где y — смещение частицы, см; t — время, с; x — расстояние, м, по оси, вдоль которой распространяется волна. Определите разность фаз между колеблющимися точками, находящимися на расстоянии $\Delta x = 35$ см друг от друга.

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Решение. Из сравнения уравнения бегущей волны

$y = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\sin\left(2\pi\nu\cdot t - \frac{2\pi\nu\cdot x}{v}\right)$ с заданным

$y = 0{,}05\sin(1980t - 6x)$, находим $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = 105$ см.

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2}{3}\pi.$$

30.15. На поверхности озера возбудили волну, которая добежала до крутого берега за $t = 1$ мин. Расстояние между соседними гребнями волн $l = 1,5$ м, а время между ударами волн о берег $\tau = 1$ с. На каком расстоянии от берега возбуждена волна?

Ответ: $S = 90$ м.

Решение. Расстояние от источника волны до берега $S = vt$, где v — скорость распространения волны на поверхности воды. $v = \dfrac{\lambda}{T}$, где $T = \tau = 1$с. Тогда $S = \dfrac{\lambda t}{\tau} = 90$ м.

30.16. Скорость распространения волны в среде $v = 200$ м/с. Вычислите период колебаний, если ближайшее расстояние между точками, колеблющимися в противоположных фазах, $l = 20$ см.

Ответ: $T = 2 \cdot 10^{-3}$ с.

Решение. Расстояние между точками, колеблющимися в противоположных фазах равно половине длины волны, т. е. $l = \dfrac{\lambda}{2}$, тогда $\lambda = 2l$. Период колебаний $T = \dfrac{\lambda}{v} = \dfrac{2l}{v} = 2 \cdot 10^{-3}$ с.

30.17. Уравнение колебаний источника волн $y = 0,04 \sin(600\pi t)$. Колебания распространяются в упругой среде. Запишите кинематическое уравнение волны, определите период колебаний T и отклонение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии $x = 75$ см от источника, через $t = 0,01$ с от начала колебаний при скорости распространения волны $v = 300$ м/с.

Ответ: $T = \dfrac{1}{300}$ с; $y_1 = 0,04$ м.

Решение. Уравнение бегущей волны

$y = A \sin \omega \left(t - \dfrac{x}{v} \right) = A \sin \left(2\pi \nu t - \dfrac{2\pi \nu x}{v} \right)$ сравним с заданным

$y = 0,04 \sin(600\pi t)$. Очевидно, $\nu = 300$ с$^{-1}$, тогда период $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{300}$ с.

Кинематическое уравнение волны имеет вид:

$$y_1 = 0,04 \sin \left(600\pi \cdot 0,01 - \frac{600\pi \cdot 0,75}{300} \right) = 0,04 \sin 4,5\pi = 0,04 \sin 810^\circ = 0,04 \text{ м.}$$

30.18. На расстоянии $S = 1068$ м от наблюдателя ударяют молотком по железнодорожному рельсу. Наблюдатель, приложив ухо к рельсу, услышал звук на время $\Delta t = 2,93$ с раньше, чем он дошел до него по воздуху. Найдите скорость звука в стали.

Ответ: $u = 5100$ м/с.

Решение. Скорость звука в воздухе $v = 340$ м/с. Время распространения звукового сигнала $t = \dfrac{S}{v}$. Скорость звука в стали

$$u = \frac{S}{t - \Delta t} = \frac{S}{\dfrac{S}{v} - \Delta t} = \frac{Sv}{S - v\Delta t} = 5100 \text{ м/с.}$$

30.19. Из пункта A в пункт B был послан звуковой сигнал частотой $\nu = 50$ Гц, распространяющийся со скоростью $v = 340$ м/с. При этом на расстоянии от A до B укладывалось целое число волн. Опыт повторили, когда температура была на 20 градусов выше, чем в первом случае. При этом число волн, укладывающихся на этом расстоянии, уменьшилось на две. Найдите расстояние l между пунктами A и B, если при повышении температуры на 1К скорость звука увеличивается на 0,5 м/с.

Ответ: $l = 476$ м.

Решение. Длина волны в первом случае $\lambda_1 = \dfrac{v_1}{\nu} = 6,8$ м, во втором — $\lambda_2 = \dfrac{v_2}{\nu} = 7$ м (т. к. $v_2 = 350$ м/с). С одной стороны, $l = n\lambda_1$, а с другой — $l = (n-2)\lambda_2$. То есть $n = \dfrac{2\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$, а $l = \dfrac{2\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 476$ м.

30.20. Когда наблюдатель воспринимает по звуку, что самолет находится в зените, он видит его под углом $\alpha = 73°$ к горизонту. С какой скоростью летит самолет? Скорость звука в воздухе $v_{зв} = 340$ м/с.

Ответ: $v \approx 100$ м/с.

Рис. 30.2

Решение. За время t звук прошел расстояние $AC = S_1$ (рис. 30.2), а самолет пролетел расстояние $AB = S_2$. Тогда $S_1 = v_{зв}t$, $S_2 = vt$,

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{v_{зв}}{v}$, откуда скорость самолета

$v = \dfrac{v_{зв}}{\operatorname{tg} \alpha} \approx 100$ м/с.

30.21. Мотоциклист, движущийся по прямолинейному участку дороги, увидел, как человек, стоящий у дороги, ударил стержнем по висящему рельсу, а через $t_1 = 2$ с услышал звук. С какой скоростью двигался мотоциклист, если он проехал мимо человека через $t_2 = 36$ с после начала наблюдения?

Ответ: $v_м = 20$ м/с.

Решение. Расстояние между человеком и мотоциклистом $S = \upsilon_м t_2$, где $\upsilon_м$ — скорость мотоциклиста. Двигаясь навстречу звуку, мотоциклист услышал его через время t_1, тогда $S = (\upsilon_м + \upsilon_{зв})t_1$ или $\upsilon_м t_2 = (\upsilon_м + \upsilon_{зв})t_1$, откуда $\upsilon_м = \dfrac{\upsilon_{зв} t_1}{t_2 - t_1} = 20$ м/с.

30.22. Расстояние до преграды, отражающей звук $S = 68$ м. Через сколько времени человек услышит эхо? $\upsilon_{зв} = 340$ м/с.

Ответ: $t = 0{,}4$ с.

Решение. Чтобы человек услышал эхо, звук должен пройти расстояние до преграды дважды (туда и обратно). Человек услышит эхо через время $t = \dfrac{2S}{\upsilon} = 0{,}4$ с.

30.23. При измерении глубины моря под кораблем при помощи эхолота оказалось, что моменты отправления и приема ультразвука разделены промежутком времени $t = 0{,}6$ с. Какова глубина моря под кораблем?

Ответ: $h = 420$ м.

Решение. Ультразвук прошел расстояние до дна дважды (туда и обратно), т. е. $t = \dfrac{2h}{\upsilon}$, откуда $h = \upsilon\dfrac{t}{2} = 420$ м.

30.24. Почему в пустом зрительном зале звук громче и «раскатистей», чем в зале, заполненном публикой?

Решение. В пустом зале звук многократно отражается от стен и потолка, и этот отраженный звук накладывается на основной. В полном зале звук быстро поглощается и не успевает отразиться многократно.

30.25. К верхнему концу цилиндрического сосуда, в который постепенно наливают воду, поднесен звучащий камертон. Звук, издаваемый камертоном, заметно усиливается, когда расстояния от поверхности жидкости до верхнего конца сосуда достигают значений $h_1 = 25$ см и $h_2 = 75$ см. Найдите частоту колебаний ν камертона. Скорость звука в воздухе $\upsilon = 340$ м/с.

Ответ: $\nu = 340$ Гц.

Решение. В трубе образуется стоячая звуковая волна с пучностями на обоих концах. Очевидно, что $h_1 = n_1\dfrac{\lambda}{2}$, $h_2 = n_2\dfrac{\lambda}{2}$, где $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, то есть $\Delta h = \Delta n\dfrac{\lambda}{2}$; $\lambda = \dfrac{2\Delta h}{\Delta n}$, а $\nu = \dfrac{\upsilon}{\lambda} = \dfrac{\upsilon\Delta n}{2\Delta h} = 340$ Гц.

31. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

31.1. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Период собственных колебаний контура $T_1 = 20$ мкс. Чему будет равен период, если конденсаторы включить последовательно?

Ответ: $T_2 = 10$ мкс.

Решение. Период собственных колебаний контура в первом случае $T_1 = 2\pi\sqrt{L\cdot 2C}$, во втором $T_2 = 2\pi\sqrt{L\cdot C_0/2}$. Тогда $T_2/T_1 = 1/2$ или $T_2 = T_1/2 = 10$ мкс.

31.2. Катушку какой индуктивности необходимо включить в колебательный контур, чтобы при емкости конденсатора 50 пФ получить частоту свободных колебаний 10 МГц?

Ответ: $L = 5{,}1$ мкГн.

Решение. $T = 2\pi\sqrt{LC}$; $T = 1/\nu$; $1/\nu = 2\pi\sqrt{LC}$; $L = 1/(2\pi\nu)^2 C = 5{,}1$ мкГн.

31.3. Во сколько раз изменится частота собственных колебаний в колебательном контуре, если емкость конденсатора увеличить в 25 раз, а индуктивность катушки уменьшить в 16 раз?

Ответ: $\nu_1/\nu_2 = 1{,}25$.

Решение. $T_1 = 2\pi\sqrt{L_1C_1}$; $T_1 = 1/\nu_1$; $\nu_1 = 1/2\pi\sqrt{L_1C_1}$. $T_2 = 2\pi\sqrt{L_2C_2}$; $T_2 = 1/\nu_2$; $\nu_2 = 1/2\pi\sqrt{L_2C_2}$. $\nu_1/\nu_2 = \sqrt{L_2C_2/L_1C_1} = \sqrt{L_1\cdot 25C_1/16L_1C_1} = 1{,}25$.

31.4. При увеличении емкости конденсатора колебательного контура на 0,08 мкФ частота колебаний уменьшается в 3 раза. Найдите начальную емкость конденсатора. Индуктивность катушки не изменялась.

Ответ: $C_1 = 0{,}01$ мкФ.

Решение. $T_1 = 2\pi\sqrt{LC_1}$; $\nu_1 = 1/2\pi\sqrt{LC_1}$. $T_2 = 2\pi\sqrt{LC_2}$; $\nu_2 = 1/2\pi\sqrt{LC_2}$. $\nu_1/\nu_2 = \sqrt{C_2/C_1} = \sqrt{(C_1+\Delta C)/C_1} = 3$, тогда $(C_1+\Delta C)/C_1 = 9$, а $C_1 = \Delta C/8 = 0{,}01$ мкФ.

31.5. При изменении емкости конденсатора колебательного контура на $\Delta C = 4{,}1$ мкФ, период колебаний увеличился в $n = 2{,}06$ раз. Найдите начальную емкость C_1. Индуктивность катушки не изменялась.

Ответ: $C_1 = 1{,}26$ мкФ.

Решение. См. решение задачи 31.4. $T_1/T_2 = \sqrt{C_1/C_2} = \sqrt{C_1/C_1 + \Delta C}$; $T_1/T_2 = 1/n$; $C_1/(C_1 + \Delta C) = 1/n^2$; $n^2 C_1 = C_1 + \Delta C$; $C_1 = \Delta C/(n^2 - 1) =$ $= 1{,}26$ мкФ.

31.6. Резонанс в колебательном контуре с конденсатором 10^{-6} Ф наступает при частоте 400 Гц. Если параллельно первому конденсатору подключить другой конденсатор C_2, то резонансная частота становится равной 200 Гц. Определите C_2.

О т в е т: $C_2 = 3$ мкФ.

Решение. $\nu_1 = 1/2\pi\sqrt{LC_1}$. При параллельном соединении конденсаторов $C = C_1 + C_2$, откуда $\nu_2 = 1/2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}$. $C_2 = C_1\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right)/\nu_2^2 =$ $= 3$ мкФ.

31.7. Приемный контур состоит из катушки $L = 2$ мГн и конденсатора $C = 1{,}8$ нФ. На какую длину волны рассчитан контур?

О т в е т: $\lambda = 3570$ м.

Решение. Длина волны $\lambda = cT = c2\pi\sqrt{LC} = 3570$ м,

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

31.8. В приемнике емкость в колебательном контуре можно менять от 0,1 до 5 нФ, а индуктивность — от 0,5 до 1 мГн. Какой диапазон частот и длин волн можно охватить настройкой этого приемника?

О т в е т: От 71 кГц до 0,71 МГц; от 0,42 км до 4,2 км.

Решение. $\nu_1 = 1/2\pi\sqrt{L_1 C_1} = 71 \cdot 10^3$ Гц; $\nu_2 = 1/2\pi\sqrt{L_2 C_2} = 0{,}71$ МГц. $\lambda_1 = cT_1 = c/\nu_1 = 0{,}42$ км, $\lambda_2 = c/\nu_2 = 4{,}2$ км.

31.9. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ мГн и конденсатора площадью пластин $S = 155$ см^2, расстояние между которыми $d = 1{,}5$ мм. Зная, что контур резонирует на длину волны $\lambda = 630$ м, определите диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между обкладками конденсатора.

О т в е т: $\varepsilon = 6{,}11$.

Решение. Емкость конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$. Период колебаний колебательного контура $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Длина волны $\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{L\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}$,

откуда $\varepsilon = \left(\dfrac{\lambda}{2\pi c}\right)^2 \cdot \dfrac{d}{\varepsilon_0 LS} = 6{,}11$.

31.10. Колебательный контур содержит соленоид (длина $l = 5$ см, площадь поперечного сечения $S_1 = 1{,}5$ см^2, число витков $N = 500$) и плоский конденсатор (расстояние между пластинами $d = 1{,}5$ мм, площадь пластин $S = 100$ см^2). Определите частоту ω_0 собственных колебаний контура.

О т в е т: $\omega_0 = 4{,}24 \cdot 10^6$ рад/с.

Решение. Собственная частота $\omega_0 = 2\pi/T = 1/\sqrt{LC}$, где $L = \mu\mu_0\dfrac{N^2 S_1}{l}$,

а $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S_2}{d}$. Так как $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$, то $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{ld}{\varepsilon_0\mu_0 N^2 S_1 S_2}} = 4{,}24 \cdot 10^6$ рад/с.

31.11. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатора емкостью $C = 39{,}5$ мкФ. Заряд конденсатора $q_0 = 3$ мкКл. Пренебрегая сопротивлением контура, запишите уравнение: 1) изменения силы тока в зависимости от времени; 2) изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени.

О т в е т: 1) $I = 1{,}5\cos\left(160\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ мА; 2) $U_c = 76\cos(160\pi t)$ мВ.

Решение. $q = q_0\cos\omega_0 t$, $I = \dfrac{dq}{dt} = -q_0\omega_0\sin\omega_0 t = -q_0\omega_0\cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$U_c = \dfrac{q}{C} = \dfrac{q_0}{C}\cos\omega_0 t$; $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 0{,}5 \cdot 10^3$ рад/с, $I = 1{,}5\cos\left(0{,}5 \cdot 10^3 t + \dfrac{\pi}{2}\right) =$

$= 1{,}5\cos\left(160\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ мА. (1 рад = 57°). $U_c = 76\cos(160\pi t)$ мВ.

31.12. Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатор, со временем изменяется по закону $I = -0{,}1\sin 200\pi t$ А. Определите: 1) период колебаний; 2) емкость конденсатора; 3) максимальное напряжение на обкладках конденсатора; 4) максимальную энергию магнитного и электрического полей.

О т в е т: $T = 10$ мс; $C = 25{,}3$ мкФ; $U_0 = 6{,}29$ В; $W_0^{м} = 0{,}5$ мДж; $W_0^{э} = 0{,}5$ мДж.

Решение. $T = 2\pi/\omega_0 = 10$ мс; $C = T^2/4\pi^2 L = 25{,}3$ мкФ; $I_0 = 0{,}1$; $U_0 = I_0/\omega_0 C = 6{,}29$ В; $W_0^{м} = LI_0^2/2 = 0{,}5$ мДж; $W_0^{э} = CU_0^2/2 = 0{,}5$ мДж.

31.13. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 1{,}8$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн. Определите максимальную силу тока I_0 в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора $U_0 = 100$ В.

О т в е т: $I_0 = 0{,}3$ А.

Решение. Рассмотрим два способа решения задачи. Первый способ основан на исследовании уравнения свободных электромагнитных колебаний, второй — на законе сохранения энергии.

1-й способ. Так как об активном сопротивлении не говорится, то будем считать его равным нулю, следовательно, в контуре будут не затухающие колебания. При этом $q = q_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$; $I = \dfrac{dq}{dt} = \omega q_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $I_0 = \omega q_0$ — максимальное значение силы тока в контуре. Учитывая, что $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, а $q_0 = CU_0$, получаем $I_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} CU_0 = U_0\sqrt{\dfrac{C}{L}}$, $I_0 = 100\sqrt{\dfrac{1{,}8\cdot 10^{-6}}{0{,}2}} = 0{,}3$ А.

2-й способ. Используя закон сохранения энергии, запишем $W^э = W^м$; $\dfrac{CU_0^2}{2} = \dfrac{LI_0^2}{2}$; $I_0 = U_0\sqrt{\dfrac{C}{L}}$; $I_0 = 0{,}3$ А.

31.14. В колебательном контуре, состоящем из двух последовательно соединенных катушек с индуктивностями L_1 и L_2 и конденсатора емкостью C, происходят свободные незатухающие колебания с амплитудой колебаний силы тока I_0. Когда сила тока в катушке L_1 максимальна, в нее быстро (за время, малое по сравнению с периодом колебаний) вставляют сердечник, что приводит к увеличению ее индуктивности в μ раз. Определите максимальное напряжение на конденсаторе до и после введения сердечника.

Решение. Максимальное напряжение U_0 на конденсаторе до введения сердечника находится из закона сохранения энергии $\dfrac{(L_1 + L_2)I_0^2}{2} = \dfrac{CU_0^2}{2}$, откуда $U_0 = I_0\sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{C}}$. При введении сердечника суммарный поток индукции магнитного поля в обеих катушках остается неизменным: $(L_1 + L_2)I_0 = (\mu L_1 + L_2)I_1$, где $I_1 = I_0\dfrac{L_1 + L_2}{\mu L_1 + L_2}$ — новое значение силы тока. Энергия в контуре стала равной $W = \dfrac{(L_1 + L_2)^2}{2(\mu L_1 + L_2)} I_0^2$. Максимальное напряжение U_m на конденсаторе после введения сердечника в катушку найдем из закона сохранения энергии: $\dfrac{(\mu L_1 + L_2)I_1^2}{2} = \dfrac{CU_m^2}{2}$,

$$\frac{(L_1 + L_2)^2}{2(\mu L_1 + L_2)} I_0^2 = \frac{CU_m^2}{2}, \text{ откуда } U_m = (L_1 + L_2) I_0 \sqrt{\frac{1}{C(\mu L_1 + L_2)}}.$$

13.15. Какой интервал частот и длин волн может перекрыть один из диапазонов радиоприемника, если индуктивность колебательного контура радиоприемника этого диапазона $L = 1$ мкГн, а его емкость изменяется от $C_1 = 50$ пФ до $C_2 = 100$ пФ?

Ответ: $\Delta\nu = (22{,}2 \div 16)\cdot 10^6$ Гц; $\Delta\lambda = (13{,}4 \div 19{,}6)$ м.

Решение. Частота электромагнитных колебаний $\nu = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, длина волны $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$. Подставляя числовые данные, имеем $\nu_1 = 22{,}2\cdot 10^6$ Гц, $\lambda_1 = 13{,}4$ м, $\nu_2 = 16\cdot 10^6$ Гц, $\lambda_2 = 19{,}6$ м. Таким образом, диапазон радиоприемника перекрывает интервал частот $\Delta\nu = (22{,}2 \div 16)\cdot 10^6$ Гц и интервал длин волн $\Delta\lambda = (13{,}4 \div 19{,}6)$ м.

31.16. Энергия свободных незатухающих колебаний, происходящих в колебательном контуре, составляет 0,2 мДж. При медленном раздвигании пластин конденсатора частота колебаний увеличилась в $n = 2$ раза. Определите работу, совершенную против сил электрического поля.

Ответ: $A = 0{,}6$ мДж.

Решение. $A = W_2 - W_1$, где W_1 и W_2 — энергия конденсатора в первом и во втором положении пластин. $W_1 = C_1\varphi_1^2/2$, $W_2 = C_2\varphi_2^2/2$. Согласно условию задачи $\nu_1/\nu_2 = n$, $\sqrt{C_1/C_2} = \nu_1/\nu_2 = n$, $C_1/C_2 = n^2$; $C_2 = C_1/n^2$; $q = C_1\varphi_1 = C_2\varphi_2 = const$, $\varphi_2 = \varphi_1 C_1/C_2 = n^2\varphi_1$. Тогда $W_2 = C_2\varphi_2^2/2 = n^2 W_1$; а работа $A = (n^2 - 1)W_1 = 0{,}6$ мДж.

31.17. Конденсатор емкостью $C = 25$ мкФ зарядили до напряжения $U_0 = 5$ В и замкнули на катушку индуктивностью $L = 0{,}01$ Гн. Пренебрегая сопротивлением контура, определите амплитудное значение силы тока I_0.

Ответ: $I_0 = 0{,}25$ А.

Решение. Заряд на конденсаторе $q = q_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, $q_0 = CU_0$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $I = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. $I_0 = \omega_0 q_0 = CU_0/\sqrt{LC} = U_0\sqrt{C/L} = 0{,}25$ А.

31.18. Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $U = 50\cos(10^4\pi t)$. Емкость конденсатора $C = 0{,}9$ мкФ. Найдите индуктивность контура L; закон

изменения силы тока со временем; длину волны, соответствующую этому контуру.

Ответ: $L = 1{,}12$ мГн; $I = -1{,}42\sin(10^4\pi t)$; $\lambda = 6\cdot10^4$ м.

Решение. Из уравнения $U = 50\cos(10^4\pi t)$ видно, что $\omega = 10^4\pi$ рад/с. С другой стороны $\omega = 2\pi/T = 1/\sqrt{LC}$, откуда $L = 1/\omega^2 C = 1{,}12$ мГн. Длина волны $\lambda = cT = 2\pi c/\omega = 6\cdot10^4$ м. По определению $I = -I_0\sin\omega t$. Так как $I_0 = U_0/\omega t$, то $I = -\dfrac{U_0}{\omega L}\sin\omega t = -1{,}42\sin(10^4\pi t)$.

31.19. В колебательном контуре индуктивность катушки $L = 0{,}2$ Гн, а амплитуда колебаний силы тока $I_0 = 40$ мА. Найдите энергию колебаний электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки в тот момент, когда мгновенное значение силы тока вдвое меньше амплитудного значения.

Ответ: $W^м = 40$ мкДж; $W^э = 120$ мкДж.

Решение. Энергия магнитного поля катушки $W^м = LI^2/2$, где I — мгновенное значение силы тока. Но $I = I_0/2$, тогда $W^м = LI_0^2/8 = 40$ мкДж. Полная энергия $W = W^м + W^э = const$. Для амплитудного значения тока $W = LI_0^2/2$. Тогда $W^э = W - W^м = LI_0^2/2 - LI_0^2/8 = (3/8)LI_0^2 = 120$ мкДж.

31.20. Найдите амплитудное значение I_0 силы тока в колебательном контуре ($L = 10$ мГн и $C = 400$ пФ), если амплитудное значение напряжения $U_0 = 500$ В.

Ответ: $I_0 = 0{,}1$ А.

Решение. По закону сохранения энергии $W^м_{max} = W^э_{max}$, т. е. $LI_0^2/2 = CU_0^2/2$; $I_0 = U_0\sqrt{C/L} = 0{,}1$ А.

31.21. Найдите силу тока и напряжение в тот момент времени, когда энергия магнитного поля катушки равна энергии электрического поля конденсатора. Амплитудные значения силы тока и напряжения соответственно равны $I_0 = 1{,}4$ мА, $U_0 = 280$ В.

Ответ: $I = 1$ мА; $U = 200$ В.

Решение. Полная энергия $W = W^м + W^э$. Но $W^м = W^э$, тогда $W = 2W^м$. $W^м = LI^2/2$; $W = LI_0^2/2$; $LI_0^2/2 = 2LI^2/2$, откуда $I = I_0/\sqrt{2} = 1$ мА. Аналогичные расчеты для электрического поля: $W = 2W^э$; $W = CU_0^2/2 = 2CU^2/2$; $U = U_0/\sqrt{2} = 200$ В.

31.22. Через какой промежуток времени (в долях периода $\dfrac{t}{T}$) на конденсаторе колебательного контура заряд будет равен половине амплитудного значения?

Ответ: $\dfrac{t}{T} = \dfrac{1}{6}$.

Решение. $q = q_0\cos\omega_0 t$; $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$; $\dfrac{q_0}{2} = q_0\cos 2\pi\dfrac{t}{T}$; $\cos 2\pi\dfrac{t}{T} = \dfrac{1}{2}$, откуда $\dfrac{t}{T} = \dfrac{\arccos 0{,}5}{2\pi} = \dfrac{1}{6}$.

31.23. Станция работает на длине волны $\lambda_{нес} = 30$ м. Сколько колебаний несущей частоты происходит в течение одного периода звуковых колебаний с частотой $\nu = 5$ кГц?

Ответ: $n = 2\cdot10^3$.

Решение. Число колебаний несущей частоты $n = \lambda_{зв}/\lambda_{нес}$, где $\lambda_{зв}$ — длина волны звуковых колебаний. $\lambda_{зв} = c/\nu$, тогда $n = c/\nu\lambda_{нес} = 2\cdot10^3$.

31.24. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 20$ см и излучает $n = 5000$ импульсов в секунду длительностью $\tau = 0{,}02$ мкс каждый. Определите число колебаний в одном импульсе и глубину разведки радиолокатора.

Ответ: $S = 30$ км.

Решение. Число колебаний в одном импульсе $N = \tau\nu$, где ν — частота колебаний. Так как $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, где c — скорость распространения электромагнитных волн, то $N = \dfrac{c\tau}{\lambda}$. За промежуток времени $t = \dfrac{1}{n}$ между двумя последовательными импульсами электромагнитные волны доходят до цели и, отразившись, возвращаются обратно. Поэтому $2S = ct$, где S — глубина разведки. Таким образом, $S = \dfrac{ct}{2} = \dfrac{c}{2n} = 30$ км.

31.25. Радиолокатор работает на волне $\lambda = 15$ см и испускает импульсы с частотой $\nu = 4$ кГц. Длительность каждого импульса $t = 2$ мкс. Какова наибольшая дальность обнаружения цели? Сколько колебаний содержится в одном импульсе?

Ответ: $S_{max} = 37$ км; $n = 4\cdot10^3$.

Решение. См. решение задач 31.23 и 31.24.

32. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ НА РАССТОЯНИЕ

32.1. Проволочная рамка площадью S равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B вокруг оси, перпендикулярной направлению поля. Частота вращения ν. Как со временем изменяются магнитный поток Φ, проходящий через рамку, и ЭДС индукции $\mathcal{E}$ в рамке?

Ответ: $\Phi = BS\cos(2\pi\nu t + \alpha_0)$; $\mathcal{E} = BS2\pi\nu\sin(2\pi\nu t + \alpha_0)$.

Решение. Магнитный поток $\Phi = BS\cos\alpha$, где α — угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью к рамке $\vec{n}$. При вращении рамки угол α (фаза) постоянно изменяется со временем $\alpha = \omega t + \alpha_0 = 2\pi\nu t + \alpha_0$, где $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота, α_0 — начальная фаза. $\Phi(t) = BS\cos(2\pi\nu t + \alpha_0)$. ЭДС индукции $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = BS2\pi\nu\sin(2\pi\nu t + \alpha_0)$.

32.2. Рамка площадью $S = 200$ см^2 вращается с частотой $\nu = 8$ с$^{-1}$ в магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл. Напишите уравнения $\Phi(t)$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$, если при $t = 0$ нормаль к плоскости рамки составляла с линиями индукции угол $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Чему равна амплитуда ЭДС?

Ответ: $\Phi(t) = 0,008\sin 16\pi t$; $\mathcal{E}(t) = -0,4\cos 16\pi t$; $\mathcal{E}_{max} = 0,4$ В.

Решение. $\Phi = BS\cos(\omega t + \alpha_0) = BS\cos(2\pi\nu t + \alpha_0)$;

$$\Phi(t) = 0,4\cdot 2\cdot 10^{-2}\cos\left(2\pi\cdot 8t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,008\sin 16\pi t.$$

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -BS2\pi\nu\cos 2\pi\nu t = -0,008\cdot 16\pi\cdot\cos 16\pi t;$$

$\mathcal{E}(t) = -0,4\cos 16\pi t$; $\mathcal{E}_{max} = BS2\pi\nu = 0,4$ В.

32.3. При вращении проволочной рамки в однородном магнитном поле пронизующий рамку магнитный поток изменяется в зависимости от времени по закону $\Phi = 0,01\sin 10\pi t$. Вычислив производную Φ', напишите формулу зависимости ЭДС от времени $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$. В каком положении была рамка в начале отсчета времени? Чему равна частота вращения рамки? Чему равны максимальные значения магнитного потока и ЭДС?

Ответ: $\Phi_{max} = 0,01$ Вб; $\mathcal{E}_{max} = 0,314$ В.

Решение. $\Phi = \Phi_{max}\cos(\omega t + \alpha_0)$ и $\Phi = 0,01\sin 10\pi t$. Приравняв эти два выражения, получим $\Phi_{max} = 0,01$ Вб. При $t = 0$ $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

$\omega = 2\pi\nu = 10\pi$; $\nu = 5c^{-1}$. $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\Phi_{max}\omega\cos 10\pi t = -\mathcal{E}_{max}\cos 10\pi t$;

$\mathcal{E}(t) = -0,01\cdot 10\pi\cos 10\pi t = -0,1\cos 10\pi t$; $\mathcal{E}_{max} = 0,1\pi = 0,314$ В.

32.4. Найдите максимальный магнитный поток через прямоугольную рамку, вращающуюся в однородном магнитном поле с частотой $\nu = 10$ об/с, если амплитуда индуцируемой в рамке ЭДС $\mathcal{E}_{max} = 3$ В (рис. 32.1).

Рис. 32.1

Ответ: $\Phi_{max} = 48$ мВб.

Решение. $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{d}{dt}(BS\cos 2\pi\nu t) = BS2\pi\nu\sin 2\pi\nu t = \mathcal{E}_{max}\sin 2\pi\nu t$;

$\mathcal{E}_{max} = BS2\pi\nu = \Phi_{max}2\pi\nu$, $\Phi_{max} = \dfrac{\mathcal{E}_{max}}{2\pi\nu} = 48$ мВб.

32.5. Сколько витков имеет рамка площадью $S = 500$ см^2, если во время ее вращения с частотой $\nu = 20$ с$^{-1}$ в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл амплитудное значение ЭДС $\mathcal{E}_{max} = 63$ В?

Ответ: $N = 100$.

Решение. $\mathcal{E} = -N\dfrac{d\Phi}{dt} = -N\dfrac{d}{dt}(BS\cos 2\pi\nu t) = NBS2\pi\nu\sin 2\pi\nu t = \mathcal{E}_{max}\sin 2\pi\nu t$; $\mathcal{E}_{max} = NBS2\pi\nu$; $N = \dfrac{\mathcal{E}_{max}}{BS2\pi\nu} = 100$.

32.6. Найдите частоту вращения прямоугольной рамки в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл, если амплитуда индуцируемой в рамке ЭДС $\mathcal{E}_{max} = 10$ В. Площадь рамки $S = 200$ см^2, число витков рамки $N = 20$.

Ответ: $\nu = 8$ об/с.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $\nu = \dfrac{\mathcal{E}_{max}}{2\pi NBS}$.

32.7. Полагая, что напряжение переменного тока изменяется по закону синуса и начальная фаза равна нулю, определите напряжение в моменты времени 5, 10, 15 мс. Амплитуда напряжения 200 В, частота 50 Гц.

Ответ: $U_1 = 0,2$ кВ; $U_2 = 0$; $U_3 = -0,2$ кВ.

Решение. $U(t) = U_{max}\sin\omega t$; $\omega = 2\pi\nu$; $U(t) = U_{max}\sin 2\pi\nu t$.

$$U_1(t) = 200\sin(2\pi\cdot 50\cdot 5\cdot 10^{-3}) = 200\sin\frac{\pi}{2} = 0,2\,\text{кВ}.$$

$$U_2(t) = 200\sin(2\pi\cdot 50\cdot 10\cdot 10^{-3}) = 200\sin\pi = 0\ \text{В}.$$

$$U_3(t) = 200\sin(2\pi\cdot 50\cdot 15\cdot 10^{-3}) = 200\sin\frac{3\pi}{2} = -0,2\ \text{кВ}.$$

32.8. Напряжение на концах участка цепи, по которому течет переменный ток, изменяется с течением времени по закону $U = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$. В момент времени $t = \frac{T}{12}$ мгновенное значение напряжения $U = 10$ В. Найдите амплитуду напряжения U_0, круговую частоту ω и частоту тока ν, если период колебаний $T = 0,01$ с. Представьте графически зависимость напряжения от времени.

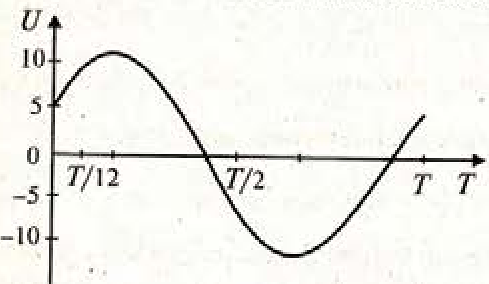


Рис. 32.2

Ответ: $U_0 = 11,6$ В; $\omega = 628$ с; $\nu = 100$ Гц.

Решение. Круговая частота тока $\omega = \frac{2\pi}{T} = 628$ с$^{-1}$, частота тока $\nu = \frac{1}{T} = 100$ Гц. В момент времени $t = \frac{T}{12}$ мгновенное значение напряжения $U = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{6}\right) = U_0 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_0$.

Отсюда $U_0 = \frac{2U}{\sqrt{3}} = 11,6$ В. График зависимости напряжения от времени представлен на рис. 32.2.

32.9. Через $t = \frac{T}{2}$ мгновенное значение напряжения $U_1 = -14$ В. Найдите значение напряжения U_2 при фазе $\varphi = \pi$.

Ответ: $U_2 = -14$ В.

Решение. $U_1 = U_0 \cos\frac{2\pi}{T} t = U_0 \cos(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}) = U_0 \cos\pi$,

$U_2 = U_0 \cos\pi$, тогда $U_2 = U_1 = -14$ В.

32.10. В сеть переменного тока включили резистор сопротивлением R. Амплитудное значение напряжения U_0. Как изменяются со временем напряжение на резисторе, ток, выделяемая мощность?

Ответ: $U = U_0 \sin\omega t$; $I = \frac{U_0}{R} \sin\omega t$; $R = \frac{U_0^2}{R} \sin^2\omega t$.

Решение. Напряжение меняется по гармоническому закону: $U = U_0 \sin\omega t$. Так как $I = \frac{U}{R}$, то $I = \frac{U_0}{R} \sin\omega t$.

Мощность $P = \frac{U^2}{R} = \frac{U_0^2 \sin^2\omega t}{R}$.

32.11. Вольтметр переменного тока, включенный в сеть, показывает напряжение 220 В. Найдите максимальное значение напряжения в сети.

Ответ: $U_0 = 310$ В.

Решение. Действующее (или эффективное) значение напряжения связано с его максимальным значением соотношением $U_д = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$, откуда $U_0 = \sqrt{2} U_д = 310$ В.

32.12. На какое напряжение надо рассчитывать изоляторы линии электропередачи, если действующее значение напряжения 500 кВ?

Ответ: $U_0 = 707$ кВ.

Решение. Изоляторы необходимо рассчитывать на максимальное напряжение $U_0 = \sqrt{2} U_д = 707$ кВ.

32.13. Напишите уравнение, выражающее зависимость напряжения и силы тока от времени для электроплитки сопротивлением $R = 50$ Ом, включенной в сеть переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц и напряжением $U = 200$ В.

Ответ: $U(t) = 310\cos 100\pi t$; $I(t) = 6,2\cos 100\pi t$.

Решение. $U(t) = U_0 \cos\omega t$; $\omega = 2\pi\nu$; $\omega = 100\pi$ с$^{-1}$. $U_0 = \sqrt{2} U_д = 310$ В;

$U(t) = 310\cos 100\pi t$. $I(t) = I_0 \cos\omega t$, $I_0 = \frac{U_0}{R}$; $I_0 = \frac{U_д}{R}\sqrt{2} = 6,2$ А.

$I(t) = 6,2\cos 100\pi t$.

32.14. Электроплитка мощностью $P = 0,5$ кВт включена в промышленную сеть с напряжением $U = 127$ В. Какая максимальная мощность выделяется в плитке?

Ответ: $P_{max} = 1$ кВт.

Решение. Максимальная мощность, выделяемая в плитке,

$P_{max} = P_0 = I_0 U_0 = \sqrt{2} I_д \cdot \sqrt{2} U_д = 2 I_д \cdot U_д = 2P = 1$ кВт.

32.15. Неоновая лампа начинает светиться и гаснуть, когда напряжение на ее электродах достигнет строго определенного значения. Какую часть периода будет светиться лампа, если ее вклю-

чить в сеть, действующее значение напряжения в которой равно этому напряжению?

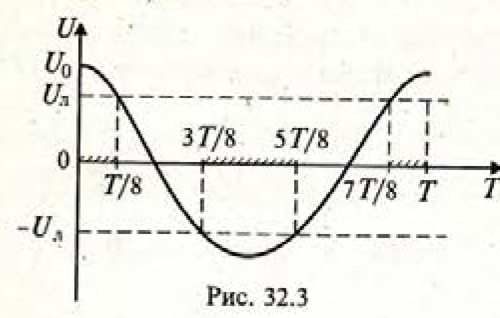


Рис. 32.3

Ответ: $\frac{t}{T} = 0{,}5$.

Решение. Неоновая лампа начинает светиться при напряжении, равном действующему: $U = U_д = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.

Тогда при $U = U_0 \cos\frac{2\pi}{T}t$ имеем $\frac{U_0}{\sqrt{2}} = U_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$; $\cos\frac{2\pi t}{T} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Моменты периода, соответствующие значению действующего напряжения, будут равны $t = \frac{T}{8}, \frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}$. Т. е. лампа светится в интервалах времени $0, \frac{T}{8}, \frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}, T$ (см. рис. 32.3). Время, в течение которого будет светиться лампа, $\Delta t = \left(\frac{T}{8} - 0\right) + \left(\frac{5T}{8} - \frac{3T}{8}\right) + \left(T - \frac{7T}{8}\right) = \frac{T}{2}$, т. е. лампа светится половину периода.

32.16. Мгновенное значение силы тока для фазы $\frac{\pi}{6}$ равно 6 А. Определите амплитудное и действующее значение силы тока.

Ответ: $I_0 = 12$ А; $I_д = 8{,}6$ А.

Решение.

$$I = I_0 \sin\omega t = I_0 \sin\frac{\pi}{2}; \quad I_0 = \frac{I}{\sin\frac{\pi}{2}} = 12 \text{ А}; \quad I_д = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 8{,}6 \text{ А}.$$

32.17. Активное сопротивление цепи 32 Ом, а угол сдвига фаз напряжения и силы тока равен 37°. Найдите емкость включенного в цепь конденсатора и полное сопротивление цепи. Частота стандартная.

Ответ: $C = 130$ мкФ; $Z = 40$ Ом.

Решение. Коэффициент мощности $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$, где Z — полное сопротивление цепи. $Z = \frac{R}{\cos\varphi} = 40$ Ом.

Полное сопротивление данной цепи $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega c)^2}}$.

Откуда $C = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{1}{Z^2 - R^2}} = 130$ мкФ.

32.18. При каких значениях фазы в масштабах одного периода мгновенное значение напряжения равно по модулю половине амплитудного?

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

Решение. $I = \pm I_0 \cos\varphi$; $\frac{I_0}{2} = \pm I_0 \cos\varphi$; $\cos\varphi = \pm\frac{1}{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

32.19. От генератора переменного тока питается электропечь с сопротивлением $R = 22$ Ом. Найдите количество теплоты Q, выделяемое печью за время $t = 1$ ч, если амплитуда тока $I_0 = 10$ А.

Ответ: $Q = 3{,}96$ МДж.

Решение. Действующее значение силы тока $I_д = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Количество теплоты, выделяемое печью, $Q = I_д^2 Rt = \frac{I_0^2 Rt}{2} = 3{,}96$ МДж.

32.20. В цепь включены конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ и катушка индуктивностью $L = 0{,}05$ Гн. При какой частоте тока в этой цепи будет резонанс?

Ответ: $\nu_р = 0{,}5$ кГц.

Решение. Условие резонанса $\omega_р = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ или $2\pi\nu_р = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; откуда $\nu_р = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 0{,}5$ кГц.

32.21. В сеть переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены лампа, конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и катушка. Индуктивность катушки без сердечника $L_1 = 50$ мГн, а при полностью введенном сердечнике $L_2 = 1{,}5$ Гн. Как изменяется накал лампы при введении в катушку сердечника?

Ответ: Вначале увеличивается, затем уменьшается.

Решение. Максимальная сила тока наблюдается при резонансе, когда $L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C} = 0{,}51$ Гн. Накал лампы увеличивается при приближении к резонансу и уменьшается при удалении от него.

32.22. В сеть переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно лампа, катушка индуктивности $L = 0{,}5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Как изменится накал лампы, если к конденсатору подключить параллельно такой же второй конденсатор?

Ответ: Увеличится.

Решение. См. предыдущую задачу. Резонанс в цепи наступает при емкости $C_0 = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 L} = 2C = 20$ мкФ. Общее сопротивление катушки и конденсатора сначала равно 160 Ом, после подключения второго конденсатора — падает практически до нуля. Накал лампы увеличится.

32.23. Последовательно с лампочкой карманного фонарика к ЗГ («звуковой генератор») подключен конденсатор. Как изменится накал лампы, если: а) не изменяя емкости конденсатора, увеличить частоту переменного тока; б) не изменяя частоты, увеличить емкость конденсатора?

Ответ: В обоих случаях накал лампочки увеличится.

Решение. Закон Ома для цепи переменного тока (для амплитудных значений) с активным сопротивлением R, емкостью C и индуктивностью L имеет вид: $I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$. В данной задаче $L = 0$. $I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$.

а) При увеличении частоты $\omega = 2\pi\nu$ знаменатель уменьшается, следовательно, величина тока увеличивается — накал лампочки увеличится.

б) При увеличении емкости получим тот же результат.

32.24. Последовательно с лампочкой карманного фонарика к ЗГ подключена катушка. Как изменяется накал лампочки, если: а) не изменяя частоты, внести в катушку железный сердечник; б) уменьшить частоту?

Ответ: а) накал лампочки уменьшится; б) увеличится.

Решение. Закон Ома для цепи переменного тока при $C = 0$ имеет вид: $I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ или $I_л = \frac{U_л}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$.

а) Если в катушку внести железный сердечник, индуктивность катушки увеличится. Знаменатель в формуле увеличится, что приведет к уменьшению силы тока и, как следствие, накал лампочки уменьшится.

б) Уменьшение частоты приводит к уменьшению полного сопротивления, т. е. к увеличению силы тока — накал лампочки увеличится.

32.25. Найдите сопротивление конденсатора емкостью 18 мкФ в цепях с частотой переменного тока 50 и 100 Гц.

Ответ: $X_{c_1} = 400$ Ом; $X_{c_2} = 200$ Ом.

Решение. Емкостное сопротивление $X_c = \frac{1}{\omega C}$; $X_{c_1} = \frac{1}{2\pi\nu_1 C} = 400$ Ом, $X_{c_2} = \frac{1}{2\pi\nu_2 C} = 200$ Ом.

32.26. Найдите индуктивность катушки, если амплитуда напряжения на ее концах $U_0 = 160$ В, амплитуда тока в ней $I_0 = 10$ А и частота тока $\nu = 50$ Гц.

Ответ: $L = 0{,}051$ Гн.

Решение. Индуктивное сопротивление катушки $X_L = \omega L$, где $\omega = 2\pi\nu$.

Амплитуда тока $I_0 = \frac{U_0}{X_L} = \frac{U_0}{\omega L}$, отсюда $L = \frac{U_0}{I_0\omega} = \frac{U_0}{I_0 2\pi\nu} = 0{,}051$ Гн.

32.27. Конденсатор и электрическая лампочка соединены последовательно и включены в цепь переменного тока стандартной частоты напряжением 440 В. Какую емкость должен иметь конденсатор для того, чтобы через лампочку протекал ток в 0,5 А и падение потенциала на лампочке было равным 110 В?

Ответ: $C = 3{,}74$ мкФ.

Решение. Закон Ома для цепи переменного тока:

$I_л = \frac{U_л}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$. При $L = 0$ $I_л = \frac{U_л}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$.

Сопротивление лампочки $R = \frac{U_л}{I} = 220$ В, $\omega = 2\pi\nu = 314$ об/с,

$$C = \frac{I_л}{\omega}\sqrt{\frac{1}{U^2 - I^2R^2}} = 3{,}74 \cdot 10^{-6}\ Ф = 3{,}74\ мкФ.$$

32.28. В цепь последовательно включены резистор с сопротивлением $R = 1$ кОм, катушка индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ. Найдите индуктивное сопротивление X_L, емкостное сопротивление X_C и полное сопротивление Z цепи при частотах $\nu_1 = 5$ Гц и $\nu_2 = 10$ кГц.

Ответ: $X_C = 318$ Ом, $X_L = 157$ кОм, $Z = 3{,}33$ кОм.

$X_C = 15{,}9$ Ом, $X_L = 31{,}4$ кОм, $Z = 31{,}4$ кОм.

Решение. Индуктивное сопротивление $X_L = \omega L$, емкостное сопротивление $X_C = \frac{1}{\omega C}$, полное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$, где $\omega = 2\pi\nu$ — круговая частота. При $\nu_1 = 5$ Гц, $X_C = \frac{1}{2\pi\nu_1 C} = 318$ кОм, $X_L = 2\pi\nu_1 L = 157$ Ом, $Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu_1 L - \frac{1}{2\pi\nu_1 C}\right)^2} = 3{,}33$ кОм. При $\nu_2 = 10$ кГц, $X_C = 15{,}9$ Ом, $X_L = 31{,}4$ кОм, $Z = 31{,}4$ кОм.

32.29. В цепь последовательно включены резистор, катушка и конденсатор. Определите полное сопротивление цепи, коэффициент мощности и активную мощность, если активное сопротивление резистора и катушки 100 Ом, сила тока (действующее значение) 1 А и действующее значение напряжения на всем участке цепи 200 В. Стандартная частота переменного тока 50 Гц.

Ответ: $Z = 200$ Ом; $\cos\varphi = 0{,}5$; $P = 100$ Вт.

Решение. Активная мощность (средняя мощность, выделяемая в цепи) $P = I^2R = 100$ Вт. С другой стороны, средняя мощность $P = I_д U_д \cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = \frac{P}{I_д U_д} = \frac{I^2R}{I_д U_д} = 0{,}5$. Зная коэффициент мощности $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$, найдем полное сопротивление цепи $Z = \frac{R}{\cos\varphi} = 200$ Ом.

32.30. В сеть переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц включена катушка длиной $l = 20$ см и диаметром $d = 5$ см, содержащая $N = 500$ витков медного провода площадью поперечного сечения $S = 0{,}6$ мм². Определите, какая доля полного сопротивления катушки приходится на реактивное сопротивление. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм·м.

Ответ: $\frac{X}{Z} = 0{,}401$.

Решение. Полное сопротивление цепи переменного тока $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, при $C = 0$ $X = X_L = \omega L$ — реактивное сопротивление, активное сопротивление $R = \rho\frac{l'}{S}$, $l' = \pi d N$, $R = \frac{\rho\pi d N}{S}$, $\omega \approx 2\pi\nu$, индуктивность катушки $L = \mu\mu_0\frac{N^2S'}{l}$; $S' = \frac{\pi d^2}{4}$, $\mu = 1$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$X = X_L = 2\pi\nu\mu_0 N^2\frac{\pi d^2}{4l} = \frac{\mu_0\pi^2\nu N^2 d^2}{2l} = 0{,}97\ Ом;\ R = 2{,}22\ Ом.$$

$$\frac{X}{Z} = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} = 0{,}401.$$

32.31. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц включена катушка длиной $l = 30$ см и площадью поперечного сечения $S = 10$ см², содержащая $N = 1000$ витков. Определите активное сопротивление катушки, если известно, что сдвиг фаз φ между напряжением и током составляет 30°.

Ответ: $R = 2{,}28$ Ом.

Решение. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$, $\omega = 2\pi\nu$, $R_C = \frac{1}{\omega C} = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R} \approx \frac{\omega L}{R}$,

$$L = \mu\mu_0\frac{N^2S}{l},\ \mu = 1,\ L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l},\ R = \frac{\omega L}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{2\pi\nu\mu_0 N^2 S}{l\operatorname{tg}\varphi} = 2{,}28\ Ом.$$

32.32. Цепь переменного тока состоит из последовательно соединенных катушки, конденсатора и резистора. Амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе $U_{(LC)_0} = 173$ В, а амплитудное значение напряжения на резисторе $U_{(R)_0} = 100$ В. Определите сдвиг фаз между током и внешним напряжением.

Ответ: $\varphi = 60°$.

Решение. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$; $U_{(LC)_0} = U_{L_0} - U_{C_0}$, $U_{C_0} = \frac{I_0}{\omega C}$,

$$U_{(LC)_0} = I_0\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),\ U_{R_0} = I_0 R,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{U_{(LC)_0} I_0}{I_0 U_{R_0}} = \frac{U_{(LC)_0}}{U_{R_0}};\ \varphi \approx 60°.$$

32.33. Генератор, частота которого составляет $\nu = 32$ кГц и амплитудное значение напряжения $U_0 = 120$ В, включен в резонирующую цепь, емкость которой $C = 1$ нФ. Определите амплитудное значение напряжения на конденсаторе, если активное сопротивление цепи $R = 5$ Ом.

Ответ: $U_{C_0} = 119$ кВ.

Решение. В случае резонанса полное сопротивление цепи $Z = R$.

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R}, \quad U_{C_0} = I_0 R_C, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad U_{C_0} = \frac{U_0}{R}\cdot\frac{1}{\omega C}, \quad \omega = 2\pi\nu,$$

$$U_{C_0} = \frac{1}{2\pi\nu C}\cdot\frac{U_0}{R} = 119 \text{ кВ}.$$

32.34. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 5$ мкГн и активным сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом. Определите среднюю мощность, потребляемую колебательным контуром, при поддержании в нем незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_{C_0} = 10$ В.

Ответ: $P_{ср} = 5$ мВт.

Решение. Средняя мощность $P_{ср} = \frac{1}{2} I_0^2 R$, $I_0 = \frac{U_{C_0}}{R_C}$; $X_C = \frac{1}{\omega C}$,

$$I_0 = U_{C_0}\omega C, \;\; \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \;\; P_{ср} = \frac{1}{2}U_{C_0}^2\omega^2C^2R = \frac{1}{2}\frac{RCU_{C_0}^2}{L} = 5 \text{ мВт}.$$

32.35. Найдите коэффициент мощности $\cos\varphi$ электрической цепи, если генератор отдает в цепь мощность $P = 8$ кВт, амплитудное значение тока $I_0 = 100$ А, амплитудное значение напряжения на зажимах генератора $U_0 = 200$ В.

Ответ: $\cos\varphi = 0{,}8$.

Решение. Средняя мощность, выделяемая на участке цепи,

$$P = \frac{I_0 U_0}{2}\cos\varphi, \text{ откуда } \cos\varphi = \frac{2P}{I_0 U_0} = 0{,}8.$$

32.36. Соленоид с железным сердечником, имеющий индуктивность $L = 2$ Гн и сопротивление обмотки $R = 10$ Ом, включен сначала в сеть постоянного тока с напряжением $U = 20$ В, а затем в сеть переменного тока с действующим напряжением $U_д = 20$ В и частотой $\nu = 0{,}4$ кГц. Найдите ток I, текущий через соленоид, в первом случае и амплитудное значение тока I_0 — во втором.

Ответ: $I = 2$ А; $I_0 = 5{,}6$ мА.

Решение. В цепи постоянного тока $I = \frac{U}{R} = 2$ А. Индуктивное сопротивление соленоида $X_L = \omega L = 2\pi\nu L = 5$ кОм. Амплитуда напряжения $U_0 = \sqrt{2}U_д$. Так как $R \ll X_L$, то амплитуда переменного тока $I_0 = \frac{U_0}{X_L} = \frac{\sqrt{2}U_д}{2\pi\nu L} = 5{,}6$ мА.

32.37. Как будут изменяться напряжения и силы токов в первичной и вторичной обмотках трансформатора, подключенного к сети, при увеличении полезной нагрузки (уменьшении сопротивления) во вторичной обмотке?

Ответ: I_2 — возрастает, U_2 — уменьшается; I_1 — возрастает, U_1 — практически не изменяется.

Решение. При уменьшении сопротивления R, U_2 уменьшается $U_2 = I_2 R$. Сила тока во вторичной обмотке $I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2 + R}$ при уменьшении R возрастает. $\mathcal{E}_2$ — ЭДС, индуцируемая во вторичной обмотке, R_2 — сопротивление вторичной обмотки. Коэффициент трансформации $k = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{I_2}{I_1}$ — постоянная величина, поэтому при увеличении I_2 увеличивается и ток I_1 в первичной обмотке. Напряжение U_1 в первичной обмотке практически не изменится, так как $U_1 = \mathcal{E}_1$, а $\mathcal{E}_1$ — ЭДС самоиндукции в первичной обмотке — практически постоянная величина.

32.38. Как изменится сила тока в первичной и вторичной обмотках работающего трансформатора, если железный сердечник разомкнуть?

Ответ: I_1 возрастет; I_2 уменьшится.

Указание. При размыкании сердечника магнитное поле в обоих катушках уменьшится. Это приведет к уменьшению ЭДС индукции и самоиндукции, а как следствие, к увеличению I_1 и уменьшению I_2.

32.39. Трансформатор при работе вхолостую получает из сети небольшую энергию. На что она расходуется?

Решение. При работе вхолостую в первичной обмотке течет очень малый ток холостого хода; трансформатор потребляет из сети небольшую мощность, которая практически совпадает с мощностью, расходуемой на перемагничивание сердечника. Это потери на гистерезис, называемые потерями в стали.

32.40. Почему КПД трансформаторов значительно выше, чем у электродвигателей?

Решение. У трансформаторов в отличие от электродвигателей нет потерь на трение, поэтому их КПД выше.

32.41. Почему для реостата замыкание одного-двух витков является безопасным, а трансформатор может выйти из строя, если хоть один виток обмотки замкнется накоротко?

Решение. При замыкании витка реостата этот виток просто «выходит из игры», т. е. ток по нему не пойдет, вследствие чего сопротивление реостата немного изменится (количество витков достаточно велико), что не представляет опасности. Замкнутый виток трансформатора фактически представляет собой еще одну вторичную обмотку, которая работает в режиме короткого замыкания. В этой обмотке с очень малым сопротивлением индуцируется очень большой ток. В результате виток сильно нагревается и может расплавиться или будет повреждена изоляция, что послужит причиной замыкания соседних витков.

32.42. Трансформатор повышает напряжение с 220 В до 1,1 кВ и содержит 700 витков в первичной обмотке. Каков коэффициент трансформации? Сколько витков во вторичной обмотке? В какой обмотке провод большего сечения?

Ответ: $k = 0{,}2$; $N_2 = 3{,}5 \cdot 10^3$; в первой.

Решение. Коэффициент трансформации $k = \dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$, $N_2 = 5N_1 = 3{,}5 \cdot 10^3$. Так как мощность первичной и вторичной обмоток практически одинакова, т. е. $I_1U_1 = I_2U_2$, то $I_1^2R_1 = I_2^2R_2$ или $I_1^2\rho\dfrac{l_1}{S_1} = I_2^2\rho\dfrac{l_2}{S_2}$, $k = \dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{I_2}{I_1}$. Очевидно, $l_2 = 5l_1$, а $I_2 = \dfrac{I_1}{5}$, тогда $\dfrac{I_1^2l_1}{S_1} = \dfrac{I_1^2 5l_1}{25S_2}$; откуда $S_1 = 5S_2$, т. е. в первой обмотке сечение провода в 5 раз больше, чем во второй.

32.43. Трансформатор повышает напряжение с $U_1 = 100$ В до $U_2 = 5{,}6$ кВ. На одну из обмоток надели виток провода, концы которого подсоединили к вольтметру. Вольтметр показал напряжение $U = 0{,}4$ В. Сколько витков имеют обмотки трансформатора?

Ответ: $N_1 = 2{,}5 \cdot 10^2$; $N_2 = 1{,}4 \cdot 10^4$.

Решение. Провод с вольтметром можно рассматривать как дополнительную обмотку трансформатора, которая состоит из одного витка. Этот контур пронизывается таким же магнитным потоком, как и любой из витков. Иначе, вольтметр показал напряжение, которое индуцируется в одном витке. Тогда $N_1 = \dfrac{U_1}{U} = 2{,}5 \cdot 10^2$; $N_2 = \dfrac{U_2}{U} = 1{,}4 \cdot 10^4$.

32.44. Понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации $k = 5$ включен в сеть с напряжением $U = 220$ В. Определите КПД трансформатора, если потерь энергии в первичной обмотке не происходит, а напряжение на вторичной обмотке $U_2 = 42$ В.

Ответ: $\eta = 96\%$.

Решение. Коэффициент трансформации $k = \dfrac{U_1}{U_2}$, отсюда $U_1 = kU_2$. Если потерь энергии в первичной обмотке не происходит, то КПД $\eta = \dfrac{U_1}{U} \cdot 100\% = \dfrac{k \cdot U_2}{U} \cdot 100\% = 96\%$.

32.45. Первичная обмотка трансформатора имеет $N_1 = 2{,}4 \cdot 10^3$ витков. Сколько витков должна иметь вторичная обмотка, чтобы при напряжении на зажимах $U = 11$ В передавать во внешнюю цепь мощность $P = 22$ Вт? Сопротивление вторичной обмотки $r = 0{,}2$ Ом. Напряжение в сети $U_1 = 380$ В.

Ответ: $N_2 = 72$.

Решение. Индуцируемая во вторичной обмотке ЭДС $\mathcal{E} = \dfrac{U_1}{k}$. Напряжение на ее зажимах $U_2 = \mathcal{E} - Ir = \dfrac{U_1}{k} - Ir$. Так как $I = \dfrac{P}{U}$, а $k = \dfrac{N_1}{N_2}$, то $U = U_2 = \dfrac{U_1N_2}{N_1} - \dfrac{Pr}{U}$, откуда $N_2 = \dfrac{(U^2 + Pr)N_1}{U_1U} = 72$.

32.46. Ток в первичной обмотке трансформатора $I_1 = 0{,}5$ А, напряжение на ее концах $U_1 = 220$ В. Ток во вторичной обмотке трансформатора $I_2 = 11$ А, напряжение на ее концах $U_2 = 9{,}5$ В. Найдите КПД трансформатора.

Ответ: $\eta = 95\%$.

Решение. Мощность, подводимая к первичной обмотке (затраченная мощность) $P_1 = I_1U_1$. Мощность, отдаваемая вторичной обмоткой нагрузке (полезная мощность), $P_2 = I_2U_2$.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I_2U_2}{I_1U_1} = 0{,}95 \text{ или } \eta = 95\%.$$

32.47. Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 8$ включена в сеть переменного тока с напряжением $U_1 = 220$ В. Сопротивление вторичной обмотки $r = 2$ Ом, ток в ней $I = 3$ А. Найдите напряжение U_2 на зажимах вторичной обмотки.

Ответ: $U_2 = 21{,}5$ В.

Решение. Индуцируемая во вторичной обмотке ЭДС $\mathcal{E} = \dfrac{U_1}{k}$.

Напряжение на ее зажимах $U_2 = \mathcal{E} - Ir = \dfrac{U_1}{k} - Ir = 21{,}5$ В.

32.48. Понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации $k = 10$ включен в сеть с напряжением $U_1 = 220$ В. Найдите напряжение на выходе трансформатора, если сопротивление вторичной обмотки $r_2 = 0{,}2$ Ом, а сопротивление полезной нагрузки $R = 2$ Ом.

Ответ: $U_н = 20$ В.

Решение. Коэффициент трансформации $k = \dfrac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2}$, $\mathcal{E}_1 = U_1$,

$\mathcal{E}_2 = \dfrac{U_1}{k}$, $\mathcal{E}_2 = U_2 + U_н$, где $U_н$ — напряжение на полезной нагрузке.

$$\mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + I_2 R = I_2(r_2 + R),\quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2 + R} = \frac{\mathcal{E}_1}{k(r_2 + R)},$$

$$U_н = I_2 R = \frac{\mathcal{E}_1 R}{k(r_2 + R)} = 20\ \text{В}.$$

32.49. До какого значения надо повысить напряжение в линии электропередачи сопротивлением $R = 36$ Ом, чтобы от электростанции мощностью $P = 5$ МВт было передано $\eta = 95\%$ энергии?

Ответ: $U = 60$ кВ.

Решение. Потеря мощности в проводах $P_{пр} = P(1 - \eta)$. С другой стороны $P_{пр} = IU_{пр} = I^2 R$. Откуда $I = \sqrt{\dfrac{P(1-\eta)}{R}}$. Напряжение на выходе из подстанции надо повысить до $U = \dfrac{P}{I} = \sqrt{\dfrac{PR}{(1-\eta)}} = 60$ кВ.

32.50. От подстанции к потребителю передается мощность $P = 62$ кВт. Сопротивление линии $R = 5$ Ом. Определить для случаев осуществления передачи при напряжении $U_1 = 620$ В и $U_2 = 6200$ В: 1) напряжение у потребителя; 2) какую часть мощности получает потребитель.

Ответ: 1) $n_1 = 0{,}19$; $n_2 = 0{,}99$; 2) $U_1' = 120$ В; $U_2' = 6{,}15$ кВ.

Решение. Сила тока в проводах $I = \dfrac{P}{U}$. Напряжение на проводах $U_{пр} = IR = \dfrac{P}{U}R$. Напряжение у потребителя $U' = U - U_{пр}$. Доля мощности получаемой потребителем $n = \dfrac{U'}{U}$.

1) $U_1' = U_1 - \dfrac{P}{U_1}R = 120$ В; $U_2' = U_2 - \dfrac{P}{U_2}R = 6150$ В.

2) $n_1 = \dfrac{U_1'}{U_1} = 0{,}19$; $n_2 = \dfrac{U_2'}{U_2} = 0{,}99$.

32.51. Первичная обмотка трансформатора для питания накала радиоприемника имеет $N_1 = 12000$ витков и включена в сеть переменного тока с напряжением $U_1 = 120$ В. Какое число витков N_2 должна иметь вторичная обмотка, если ее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом? Напряжение накала радиоприемника $U_2 = 3{,}5$ В при токе $I = 1$ А.

Ответ: $N_2 = 400$.

Решение. Индуцируемая во вторичной обмотке ЭДС должна быть равна напряжению накала U_2 и падению напряжения на сопротивлении обмотки Ir. Поэтому отношение чисел витков в обмотках $\dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{U_2 + Ir}{U_1}$, отсюда $N_2 = \dfrac{(U_2 + Ir)N_1}{U_1} = 400$.

32.52. Первичная обмотка понижающего трансформатора включена в сеть переменного тока с напряжением $U_1 = 220$ В. Напряжение на зажимах вторичной обмотки $U_2 = 20$ В, ее сопротивление $r = 1$ Ом, ток в ней $I = 2$ А. Найдите коэффициент трансформации k и КПД η трансформатора.

Ответ: $k = 10$; $\eta = 91\%$.

Решение. Индуцируемая во вторичной обмотке ЭДС

$\mathcal{E}_2 = U_2 + I_2 r$. Коэффициент трансформации $k = \dfrac{U_1}{\mathcal{E}_2} = \dfrac{U_1}{U_2 + I_2 r} = 10$.

Ток в первичной обмотке находим из условия $U_1 I_1 = \mathcal{E}_2 I_2$. КПД трансформатора $\eta = \dfrac{U_2 I_2}{U_1 I_1} = \dfrac{U_2}{\mathcal{E}_2} = \dfrac{U_2}{(U_2 + I_2 r)} = 0{,}91$ или $\eta = 91\%$.

32.53. Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 10$ включена в сеть переменного тока с напряжением $U_1 = 120$ В. Сопротивление вторичной обмотки $r = 1{,}2$ Ом, ток в ней $I = 5$ А. Найдите сопротивление R нагрузки трансформатора и напряжение U_2 на зажимах вторичной обмотки.

Ответ: $U_2 = 6$ В; $R = 1{,}2$ Ом.

Решение. $U_2 = \frac{U_1}{k} - Ir = 6$ В, $R = \frac{U_2}{I} = \frac{U_1}{kI} - r = 1{,}2$ Ом.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Уровень II

1. На чашку массой M, подвешенную на пружине жесткостью k, с высоты h падает пластилиновый шарик массой m и прилипает к чашке. Найдите амплитуду колебаний A. Массой пружины пренебречь.

Ответ: $A = \frac{m}{k}\sqrt{g^2 + \frac{2ghk}{M+m}}$.

Решение. При свободном падении с высоты h шарик приобретает скорость $v = \sqrt{2gh}$. После абсолютно неупругого удара скорость шарика и чашки u найдем из закона сохранения импульса $mv = (m+M)u$, откуда $u = \frac{mv}{m+M} = \frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}$. Кинетическая энергия чашки с шариком переходит в потенциальную энергию растянутой пружины. Дальше система будет совершать гармонические колебания относительно некоторого равновесного положения x_0. Учтем, что еще до падения шарика под действием массы M пружина растянулась до длины l, что и принимается за начальное положение колеблющейся системы. Тогда $kl = Mg$; $kx_0 = (M+m)g$. Закон сохранения энергии для колебательного процесса: $\frac{k(x_0 - l)^2}{2} + \frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$. Первое слагаемое — потенциальная энергия пружины с чашкой в начальном положении l относительно равновесного положения x_0. Второе слагаемое — кинетическая энергия системы в начальном положении. Их сумма равна максимальной потенциальной энергии пружины (A — амплитуда колебаний). Решив систему уравнений, получим $A = \frac{m}{k}\sqrt{g^2 + \frac{2ghk}{M+m}}$.

2. В условии предыдущей задачи найдитн энергию колеблющейся системы. Как изменится ответ, если пренебречь массой чашки?

Решение. Максимальная потенциальная энергия пружины $W = \frac{kA^2}{2}$, где $A = \frac{m}{k}\sqrt{g^2 + \frac{2ghk}{M+m}}$.

$$W = \frac{m^2}{2k}\left(g^2 + \frac{2ghk}{M+m}\right) = \left(\frac{m^2g^2}{2k} + \frac{2m^2ghk}{2k(M+m)}\right) = m^2g\left(\frac{g}{2k} + \frac{h}{M+m}\right).$$

Если $M = 0$, то $A = \frac{m}{k}\sqrt{g^2 + \frac{2ghk}{m}}$, а $W = mg\left(\frac{mg}{2k} + h\right)$.

3. К пружине жесткостью k подвешено тело массой m. Затем пружина перерезается пополам и к одной ее половине подвешивается тот же груз. Изменится ли период колебаний пружины, а если изменится, то каково будет отношение периодов?

Ответ: $T_2 = T_1/\sqrt{2}$.

Решение. В первом случае $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$. (1)

Согласно закону Гука $F = k_1\Delta l$; (2)

$\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{F}{SE}$, (3)

где l_1 — длина пружины, S — площадь поперечного сечения проволоки, E — модуль Юнга. Из (2) и (3) получим $k \sim \frac{1}{l_1}$. Во втором случае $l_2 = \frac{l_1}{2}$; $k_2 \sim \frac{1}{l_2} \sim \frac{2}{l_1}$. (4)

Тогда из (1) и (4) получим $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $T_2 = \frac{T_1}{\sqrt{2}}$.

4. Определите период колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого $E = 300$ В/см Полярную молекулу можно представить в виде жесткой гантельки длиной $l = 10^{-8}$ см, на концах которой находятся две материальные точки массой $m = 10^{-24}$ г, несущие на себе заряды $+q$ и $-q$ соответственно $(q = e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ кл$)$.

Ответ: $T = 2\cdot10^{-11}$ с.

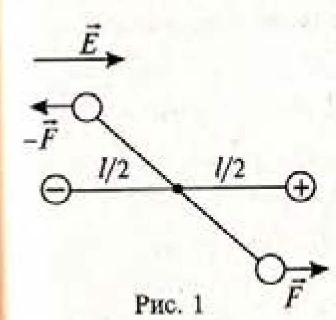


Рис. 1

Решение. В положении устойчивого равновесия молекула располагается вдоль поля (рис. 1). Если ее вывести из этого состояния, то возникает вращательный момент, поворачивающий молекулу вокруг ее центра тяжести. Этот момент создают силы $\vec{F}$ и $-\vec{F}$, действующие на заряды в электрическом поле. Если рассматривать заряды каждый в отдельности, то можно сказать, что электрические силы для них играют такую же роль как сила тяжести для матема-

тического маятника. Поэтому заряды колеблются подобно математическим маятникам длиной $l/2$ с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g'}}$, где g' — ускорение, которое электрическое поле сообщает каждому заряду. Так как $g' = \frac{F}{m}$, а $F = eE$, то $g' = \frac{eE}{m}$, поэтому $T = 2\pi\sqrt{\frac{lm}{2eE}} = 2\cdot10^{-11}$ с.

5. Обруч массой m и радиусом $r = 1$ см может катиться без проскальзывания по внутренней поверхности цилиндра радиусом $R = 4$ см. Определите период движения центра обруча, считая угол φ малым (рис. 2).

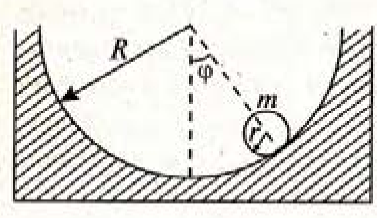


Рис. 2

Ответ: $T = 4{,}9$ с.

Решение. Сравним движение центра обруча с движением конца математического маятника длиной $R - r$. Обе эти точки описывают дугу окружности радиусом $R - r$. Пусть при угле φ_0 обруч и маятник находятся в состоянии покоя. На основании закона сохранения энергии для скорости υ_0 центра обруча и скорости $\upsilon_м$ конца маятника в зависимости от угла φ имеем: $\upsilon_0 = \sqrt{g(R-r)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$, $\upsilon_м = \sqrt{2gR(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$. Откуда следует $\upsilon_0 = \frac{\upsilon}{\sqrt{2}}$, так как центр обруча движется в $\sqrt{2}$ раз медленнее маятника, то период движения T его центра будет в $\sqrt{2}$ раз больше, чем период математического маятника длиной $R - r$ и равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}} = 4{,}9$ с. На первый взгляд может показаться, что при $r = 0$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. На самом же деле при $r \to 0$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$. Это связанно с тем, что при $r = 0$ энергия вращательного движения обруча не исчезает.

6. Капли воды падают через одинаковые промежутки времени с некоторой высоты на пластинку, закрепленную на пружине. Частота собственных колебаний пластинки $\omega_0 = 4$ с$^{-1}$. Амплитуда колебания при этом оказывается максимальной. Найдите расстояние между отрывающейся каплей и ближайшей к ней падающей каплей.

Решение. Расстояние h между отрывающей и близлежащей к ней падающей каплей $h = \frac{g\tau^2}{2}$, где τ — промежуток времени между падением двух последовательных капель. Так как наблюдаются колебания с максимальной амплитудой, то значит имеется место резонанс $\omega = \omega_0$, где ω — частота падения капель. Промежуток времени τ равен периоду собственных колебаний пластины $\tau = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Тогда $h = \frac{2\pi^2 g}{\omega_0^2} = 12$ м.

7. Два одинаковых упругих шарика подвешены в одной точке на нитях длиной $l = 1$ м каждая. Шарики отводят в противоположные стороны на один и тот же малый угол и отпускают по очереди: сначала один, а потом другой — в тот момент, когда первый проходит положение равновесия. Найдите интервал времени между последовательными ударами шариков.

Ответ: $\tau = 1$ с.

Решение. Начало отчета времени выбираем в момент, когда начинает двигаться второй шарик. Тогда уравнения движения шариков до удара имеют вид: $x_1 = A\sin\omega t$; $x_2 = A\cos\omega t$. В момент встречи $x_1 = x_2$, откуда для первой встречи получаем $\omega t_1 = \frac{\pi}{4}$; $t = \frac{\pi}{4\omega}$. При упругом ударе одинаковых шариков они просто обмениваются скоростями, т. е. первый шарик будет далее двигаться по закону $x_1 = A\cos\omega t$, а второй — по закону $x_2 = A\sin\omega t$. Моменту второй встречи соответствует следующее по порядку решение уравнения $x_1 = x_2$, т. е. $\omega t_2 = \frac{\pi}{4} + \pi$; или $t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\omega}$. Значит, интервал между первыми двумя, а также и всеми следующими последовательными соударениями равен $\tau = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1$ с.

8. Доска, на которой лежит брусок, совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости (рис. 3). Амплитуда колебаний равна A, коэффициент трения между доской и брусом μ. Какому условию должна удовлетворять частота колебаний, чтобы брусок не скользил по доске?

Ответ: $\omega < \sqrt{\mu g/A}$.

тического маятника. Поэтому заряды колеблются подобно математическим маятникам длиной $l/2$ с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g'}}$, где g' — ускорение, которое электрическое поле сообщает каждому заряду. Так как $g' = \frac{F}{m}$, а $F = eE$, то $g' = \frac{eE}{m}$, поэтому $T = 2\pi\sqrt{\frac{lm}{2eE}} = 2\cdot 10^{-11}$ с.

5. Обруч массой m и радиусом $r = 1$ см может катиться без проскальзывания по внутренней поверхности цилиндра радиусом $R = 4$ см. Определите период движения центра обруча, считая угол φ малым (рис. 2).

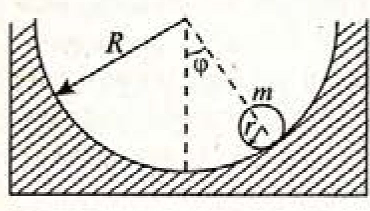


Рис. 2

Ответ: $T = 4{,}9$ с.

Решение. Сравним движение центра обруча с движением конца математического маятника длиной $R - r$. Обе эти точки описывают дугу окружности радиусом $R - r$. Пусть при угле φ_0 обруч и маятник находятся в состоянии покоя. На основании закона сохранения энергии для скорости υ_0 центра обруча и скорости $\upsilon_м$ конца маятника в зависимости от угла φ имеем: $\upsilon_0 = \sqrt{g(R-r)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$, $\upsilon_м = \sqrt{2gR(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$. Откуда следует $\upsilon_0 = \frac{\upsilon}{\sqrt{2}}$, так как центр обруча движется в $\sqrt{2}$ раз медленнее маятника, то период движения T его центра будет в $\sqrt{2}$ раз больше, чем период математического маятника длиной $R - r$ и равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}} = 4{,}9$ с. На первый взгляд может показаться, что при $r = 0$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. На самом же деле при $r \to 0$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$. Это связанно с тем, что при $r = 0$ энергия вращательного движения обруча не исчезает.

6. Капли воды падают через одинаковые промежутки времени с некоторой высоты на пластинку, закрепленную на пружине. Частота собственных колебаний пластинки $\omega_0 = 4$ с$^{-1}$. Амплитуда колебания при этом оказывается максимальной. Найдите расстояние между отрывающейся каплей и ближайшей к ней падающей каплей.

Решение. Расстояние h между отрывающей и близлежащей к ней падающей каплей $h = \frac{g\tau^2}{2}$, где τ — промежуток времени между падением двух последовательных капель. Так как наблюдаются колебания с максимальной амплитудой, то значит имеется место резонанс $\omega = \omega_0$, где ω — частота падения капель. Промежуток времени τ равен периоду собственных колебаний пластины $\tau = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Тогда $h = \frac{2\pi^2 g}{\omega_0^2} = 12$ м.

7. Два одинаковых упругих шарика подвешены в одной точке на нитях длиной $l = 1$ м каждая. Шарики отводят в противоположные стороны на один и тот же малый угол и отпускают по очереди: сначала один, а потом другой — в тот момент, когда первый проходит положение равновесия. Найдите интервал времени между последовательными ударами шариков.

Ответ: $\tau = 1$ с.

Решение. Начало отчета времени выбираем в момент, когда начинает двигаться второй шарик. Тогда уравнения движения шариков до удара имеют вид: $x_1 = A\sin\omega t$; $x_2 = A\cos\omega t$. В момент встречи $x_1 = x_2$, откуда для первой встречи получаем $\omega t_1 = \frac{\pi}{4}$; $t = \frac{\pi}{4\omega}$. При упругом ударе одинаковых шариков они просто обмениваются скоростями, т. е. первый шарик будет далее двигаться по закону $x_1 = A\cos\omega t$, а второй — по закону $x_2 = A\sin\omega t$. Моменту второй встречи соответствует следующее по порядку решение уравнения $x_1 = x_2$, т. е. $\omega t_2 = \frac{\pi}{4} + \pi$; или $t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\omega}$. Значит, интервал между первыми двумя, а также и всеми следующими последовательными соударениями равен $\tau = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1$ с.

8. Доска, на которой лежит брусок, совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости (рис. 3). Амплитуда колебаний равна A, коэффициент трения между доской и брусом μ. Какому условию должна удовлетворять частота колебаний, чтобы брусок не скользил по доске?

Ответ: $\omega < \sqrt{\mu g/A}$.

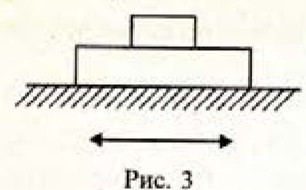


Рис. 3

Решение. Если брусок не проскальзывает, то он вместе с доской совершает гармонические колебания. При этом его смещение и ускорение изменяются по законам $x = A\cos\omega t$; $a = -\omega^2 A\cos\omega t$.

По второму закону Ньютона в горизонтальном направлении $F_{тр} = ma = -m\omega^2 A\cos\omega t$, где m — масса бруска, а $F_{тр} < \mu mg$ — сила трения покоя. Тогда получаем условие отсутствия скольжения бруска: $\omega < \sqrt{\frac{\mu g}{A}}$.

9. Найдите сдвиг фаз между напряжением $U = U_0\sin(\omega t + \varphi)$ и током $I = I_0\sin\omega t$ для цепи, состоящей из последовательного включенных резистора сопротивлением $R = 1$ кОм, катушки с индуктивностью $L = 0,5$ Гн и конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ. Найдите мощность, выделяющуюся в цепи, если амплитуда напряжения $U_0 = 100$ В, а частота тока $\nu = 50$ Гц.

Ответ: $\varphi = -72°40'$, $P = 0,5$ Вт.

Решение. Сдвиг фаз определим из соотношения $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$, где $\omega = 2\pi\nu$. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = -72°40'$, т. е. напряжение по фазе отстает от тока. Мощность, выделяющаяся в цепи, равна $P = \frac{1}{2}I_0 U_0\cos\varphi$, где $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$ — коэффициент мощности, Z — полное сопротивление цепи переменного тока равное $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

По закону Ома $I_0 = \frac{U_0^2}{Z}$, тогда $P = \frac{U_0^2 R}{2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]} = 0,5$ Вт.

10. Через нагревательную спираль, сопротивление которой постоянно, пропускают постоянный ток. На сколько процентов изменится среднее количество теплоты, выделяющееся в спирали в единицу времени, если через спираль пропускать одновременно с постоянным током переменный (синусоидальный) ток, амплитуда которого составляет 10% от силы постоянного тока.

Ответ: На 0,5 %.

Решение. Количество теплоты, выделяющееся в спирали в единицу времени в случае постоянного тока, $\frac{Q_1}{t} = I^2 R$, в случае одновременного прохождения по спирали постоянного тока и переменного тока $\frac{Q_2}{t} = I^2 R + \frac{1}{2}I_0 U_0\cos\varphi = I^2 R + \frac{1}{2}I_0^2 R = I^2 R(1 + 0,005)$ (см. предыдущую задачу). $\frac{Q_2}{t} - \frac{Q_1}{t} = I^2 R\cdot 0,005$ или $\frac{\Delta Q}{t} = 0,5\%\frac{Q_1}{t}$.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Уровень III

1. К маятнику *AB* с шариком массой *M* подвешен маятник *BC* с шариком массой *m* (рис. 1). Точка *A* совершает колебания в горизонтальном направлении с периодом *T*. Найдите длину нити *BC*, если известно, что нить *AB* все время остается вертикальной.

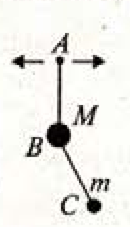


Рис. 1

Ответ: $l = \frac{gT^2(m+M)}{4\pi^2 M}$.

Решение. Так как нить *AB* остается вертикальной, то на шарик массой *M* во время движения системы не действуют горизонтальные силы. Это означает, что горизонтальные силы не действуют и на систему, состоящую из двух шариков *M* и *m*, и шарики должны двигаться так, чтобы их центр масс не перемещался в горизонтальном направлении (рис. 2, точка *D*). Поэтому шарик массой *m* движется так, как будто он прикреплен к нити длиной *x* (расстояние от шарика до центра масс системы). Период колебаний такого маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$. (1)

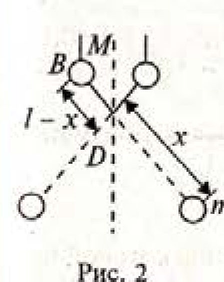


Рис. 2

Этот период равен периоду колебаний точки *A*. Найдем *x*. Для центра масс системы $mx = M(l - x)$, откуда

$$x = \frac{Ml}{m+M}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Ml}{g(m+M)}}$, отсюда $l = \dfrac{gT^2(m+M)}{4\pi^2 M}$.

2. Определите период колебаний шарика, скользящего вниз и вверх по двум наклонным плоскостям (рис. 3). Трение и потери скорости при ударе не учитывать.

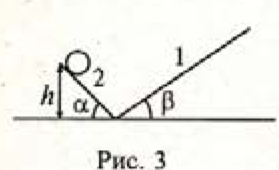


Рис. 3

Ответ: $T = 2\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\left(\dfrac{1}{\sin\beta} + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$.

Решение. Соскользнув с наклонной плоскости 2 высотой h, шарик имеет скорость $v_0 = \sqrt{2gh}$. (1)

На наклонную плоскость 1 шарик поднимается замедленно с ускорением $a_1 = g\sin\beta$, тогда время, в течение которого он будет подниматься наверх, $t_1 = \dfrac{v_0}{a_1} = \dfrac{v_0}{g\sin\beta}$.

Спускаться он будет то же время, т. е. полное время движения по наклонной плоскости с углом β: $T_1 = \dfrac{2v_0}{g\sin\beta}$. Аналогично для движения вверх и вниз по наклонной плоскости с углом α: $T_2 = \dfrac{2v_0}{g\sin\alpha}$.

Полный период колебаний шарика $T = T_1 + T_2 = \dfrac{2v_0}{g}\left(\dfrac{1}{\sin\beta} + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$.

Учитывая (1), получим $T = 2\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\left(\dfrac{1}{\sin\beta} + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$.

3. К стенке, наклоненной под углом α к вертикали, подвешен маятник длиной l (рис. 4). Маятник отклонили в плоскости, перпендикулярной к стенке, на небольшой угол β ($\beta > \alpha$) от вертикального положения и отпустили. Найдите период колебаний маятника, если удар шарика о стенку абсолютно упругий.

Рис. 4

Ответ: $T = 2\sqrt{\dfrac{l}{g}}\left(\pi - \arccos\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.

Решение. Без удара о стенку колебания маятника — гармонические с периодом $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ и угловой амплитудой β. Из-за абсолютно упругого удара о стенку, который меняет только направление скорости, но не ее величину, время отклонения маятника в левую сторону будет на время τ меньше. τ — это время, за которое маятник при свободных колебаниях отклонился бы от угла α до угла β и обратно. То есть период колебания маятника будет не T_0, а $T = T_0 - \tau$. Уравнение гармонических колебаний для углового перемещения $\varphi = \beta\cos\omega t$, где $\omega = \dfrac{2\pi}{T_0}$. При $t = 0$, $\varphi = \beta$; в некоторый момент $t_1 = \dfrac{\tau}{2}$ φ будет равно α, тогда $\alpha = \beta\cos\omega t_1$, откуда $t_1 = \dfrac{1}{\omega}\arccos\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Следовательно, $\tau = 2t_1 = \dfrac{2}{\omega}\arccos\dfrac{\alpha}{\beta}$ и

$$T = T_0 - \tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - 2\sqrt{\frac{l}{g}}\arccos\frac{\alpha}{\beta} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\pi - \arccos\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

4. На упругую стальную пластинку, закрепленную одним концом в горизонтальном положении, насыпали песчинки. После того, как свободный конец пластинки оттягивают вниз и отпускают, она совершает гармонические колебания с частотой ω. Какова амплитуда A колебаний пластинки в том месте, где песчинки подскакивают на высоту h по отношению к равновесному положению пластинки?

Ответ: $A = \dfrac{g}{\omega}\sqrt{\dfrac{2h}{g} - \dfrac{1}{\omega^2}}$.

Решение. Отклонение пластинки от положения равновесия равно $x = A\cos\omega t$, ее скорость $v = A\omega\sin\omega t$, ускорение $a = -A\omega^2\cos\omega t$.

Уравнение движения песчинки $N - mg = ma$, где N — сила реакции со стороны пластинки, m — масса песчинки. В момент отрыва $N = 0$, тогда $a = -g$; $-A\omega^2\cos\omega t_0 = -g$; $\cos\omega t_0 = \dfrac{g}{A\omega^2}$, t_0 — момент времени, когда песчинка оторвалась от пластинки.

Скорость пластинки и ее координата в момент t_0 равны $v_0 = -A\omega\sin\omega t_0$; $x_0 = A\cos\omega t_0 = \dfrac{g}{\omega^2}$.

Оторвавшись от пластинки со скоростью v_0, песчинка поднимается на высоту $\Delta x = \dfrac{v_0^2}{2g}$. $h = x_0 + \Delta x = \dfrac{g}{\omega^2} + \dfrac{v_0^2}{2g} = \dfrac{g}{\omega^2} + \dfrac{A^2\omega^2\sin^2\omega t_0}{2g}$, откуда $A = \dfrac{g}{\omega}\sqrt{\dfrac{2h}{g} - \dfrac{1}{\omega^2}}$. (Мы учли, что $\sin^2\omega t_0 = 1 - \cos^2\omega t_0 = 1 - \dfrac{g^2}{A^2\omega^4}$.)

5. ____ Как будет меняться период колебания маятника, состоящего из сосуда, подвешенного на длинной нити, если сосуд наполнен водой, которая постепенно вытекает через отверстие в дне сосуда?

Решение. При вытекании жидкости понижается центр тяжести жидкости, а значит, и центр тяжести маятника. При этом расстояние от центра тяжести до точки подвеса увеличится, что приведет к постепенному увеличению периода колебаний.

Однако, т. к. снижение центра тяжести сосуда с жидкостью происходит неравномерно, то при малом количестве воды центр тяжести может начать повышаться и период колебания маятника уменьшится. Этого можно избежать, если центр тяжести самого сосуда находится в дне сосуда.

6. ____ В *U*-образную стеклянную трубку налита ртуть, суммарная длина столба которой в обоих коленах и в изогнутой части равна *l*. Выведенная из равновесия ртуть совершает малые колебания, переходя из одного колена в другое и обратно. Найдите период этих колебаний.

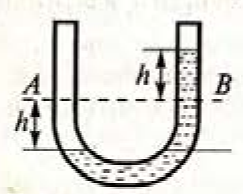


Рис. 5

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$.

Решение. Пусть *AB* начальный равновесный уровень ртути. Когда уровень ртути в левом колене понижается на *h*, в правом колене он выше на $2h = l$ по отношению к левому колену, что приводит к возникновению возвращающей силы *F*, равной силе тяжести ртутного столбика высотой $2h$. $F = 2\rho g S h$, где ρ — плотность ртути, S — площадь поперечного сечения трубки. С другой стороны, эта сила пропорциональна смещению $F = kh$, где $k = 2\rho g S$.

Под действием этой силы возникают колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2\rho g S}}$. $m = \rho S l$ масса всей колеблющейся системы (масса всей ртути). Следовательно, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$.

7. ____ Определите период колебаний маятника, изображенного на рис. 6. Стержень, на котором закреплены шары массой m_1 и m_2, считать невесомым.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{g(m_1 l_1 + m_1 l_2)}}$.

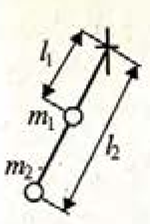


Рис. 6

Решение. Этот маятник является примером физического маятника, для которого период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, где $L = \dfrac{\Im}{ma}$ — приведенная длина, a — расстояние от точки подвеса до центра масс маятника, $\Im$ — момент инерции грузиков относительно точки подвеса $\Im = \Im_1 + \Im_2 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$.

Центр тяжести маятников найдем как $a = \dfrac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2}$.

Масса системы $m = m_1 + m_2$.

Тогда $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)(m_1 + m_2)}{g(m_1 + m_2)(m_1 l_1 + m_1 l_2)}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{g(m_1 l_1 + m_1 l_2)}}$.

Примечание. Приведенная длина физического маятника это такая длина математического маятника, при которой эти маятники имеют одинаковый период колебаний.

8. ____ Определить период колебаний тела, упавшего в шахту, пронизывающую Землю по одному из ее диаметров.

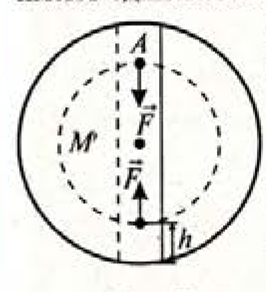


Рис. 7

Решение. На тело, находящееся на глубине *h* от поверхности, будет действовать сила притяжения *F* только со стороны слоев планеты, лежащей ниже этого тела (рис. 7).

$$F = G\frac{mM'}{(R_3 - h)^2};\quad M' = \frac{4}{3}\pi\rho(R_3 - h)^3;$$

$$F = G\frac{m\frac{4}{3}\pi\rho(R_3 - h)^3}{(R_3 - h)^2} = G\frac{mM_3}{R_3^3}(R_3 - h) = G\frac{mM_3}{R_3^3}x = kx,$$

где $x = R_3 - h$, $k = G\dfrac{mM_3}{R_3^3}$.

Сила *F* — восстанавливающая сила, направленная к центру Земли. Под действием этой силы тело совершает гармонические колебания около центра Земли. Период таких колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_3^3}{GM_3}}$.

9. ____ В электрической цепи из двух одинаковых конденсаторов емкостью *C* и катушки с индуктивностью *L*, соединенных последовательно (рис. 8), в начальный момент один конденсатор имеет

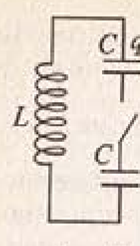


Рис. 8

заряд q_0, а второй не заряжен. Как будут изменяться со временем заряды конденсаторов и сила тока в контуре после замыкания ключа?

Ответ: $q_{1,2} = \frac{q_0}{2}(1 \pm \cos\omega t)$; $I = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}\sin\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}t\right)$.

Решение. Данная система является колебательным контуром, в котором сила тока изменяется по гармоническому закону $I = I_0 \sin\omega t$. В этом случае частота колебаний $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$. Учитывая, что конденсаторы соединены последовательно, их общая емкость равна $C_0 = \frac{C}{2}$. Отсюда $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$.

Найдем амплитуду тока I_0 используя закон сохранения энергии. Пусть заряд первого конденсатора q_1, тогда заряд второго конденсатора $q_2 = q_0 - q_1$, следовательно, $\frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI^2}{2} + \frac{q_1^2}{2C} + \frac{(q_0 - q_1)^2}{2C}$,

откуда $I^2 = \frac{2q_1}{LC}(q_0 - q_1)$. (1)

Условие максимума тока получим при выполнении соотношения $\frac{dI}{dq_1} = 0$, что дает значение $q_1 = \frac{q_0}{2}$. Подставляя это значение в (1), получаем амплитуду тока $I_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}$.

Тогда $I = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}\sin\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}t\right)$. (2)

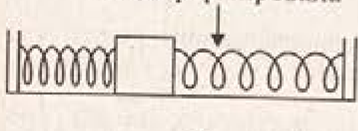
Из (2) и (1) получим квадратное уравнение, результатом решения которого будут величины зарядов конденсаторов:

$$4q_1^2 - 4q_1q_0 + q_0^2\sin^2\omega t = 0,\ \ q_1 = \frac{q_0}{2}(1 + \cos\omega t);\ \ q_2 = \frac{q_0}{2}(1 - \cos\omega t).$$

Можно провести механическую аналогию таким колебаниям (рис. 9).

не деформирована

одинаковая деформация



а)

б)

Рис. 9

В начальный момент одна из пружин не деформирована (рис. 9а), а в сочетании равновесия обе пружины деформированы одинаково (рис. 9б).

ОПТИКА

ОПТИКА

Уровень I

33. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

33.1. Какого наименьшего размера должно быть плоское зеркало, чтобы человек, став перед ним, смог увидеть себя во весь рост?

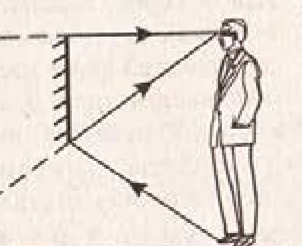


Рис. 33.1

Ответ: Половина роста человека.

Решение. Из рис. 33.1 видно, что плоское зеркало имеет размер равный половине роста человека.

33.2. Расположите два зеркала так, чтобы при любом угле падения луч падающий и луч, последовательно отраженный в двух зеркалах, были параллельны друг другу.

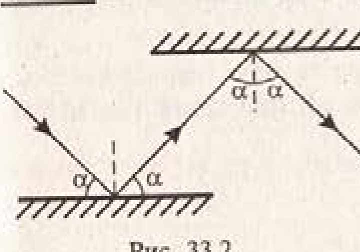


Рис. 33.2

Ответ: Расположить зеркала так, как показано на рис. 33.2.

33.3. Два зеркала наклонены друг к другу и образуют двугранный угол α. На них падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к ребру угла. Найдите на какой угол повернется отраженный луч после отражения от обоих зеркал.

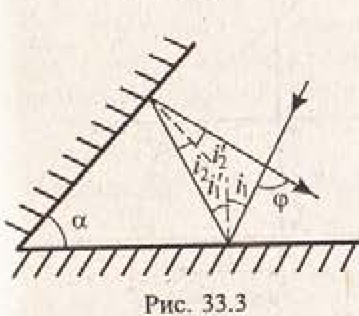


Рис. 33.3

Ответ: На 2α.

Решение. Угол поворота отраженного угла относительно падающего — φ (рис. 33.3). Из законов отражения $i_1 = i_1'$; $i_2 = i_2'$. Из геометрических соображений $\alpha = i_1 + i_2$. Угол $\varphi = 2i_1 + 2i_2 = 2(i_1 + i_2) = = 2\alpha$ и не зависит от угла падения первичного луча.

33.4. На плоское зеркало падает луч света. Зеркало поворачивается на угол $\alpha = 5°$ вокруг оси, находящейся в плоскости зеркала перпендикулярно к лучу. На какой угол при этом повернется отраженный луч?

Рис. 33.4

Ответ: на 10°.

Решение. Луч 1 падает на зеркало под углом i (см. рис. 33.4). Отражается луч под углом $i' = i$. Угол между падающим 1 и отраженным 2 лучами равен $\beta = i + i' = 2i$. При повороте зеркала Z вокруг оси, лежащей в плоскости зеркала и проходящей через точку O, на угол α перпендикуляр $\vec{n}$ к зеркалу повернется на угол α. Вследствие этого угол падения луча на зеркало уменьшается на угол α, т. е. $i_1 = i - \alpha$. Согласно закону отражения света угол между отраженным лучом 3 и перпендикуляром $\vec{n}_1$ (угол отражения) $i_1' = i - \alpha$. Угол между лучами 1 и 3 будет равен $\gamma = i_1 + i_1' = 2i_1 = 2(i - \alpha)$. Отраженный луч при переходе из положения 2 в положение 3 повернется на угол $\delta = \beta - \gamma = 2i - 2(i - \alpha) = 2\alpha$. Следовательно, при повороте плоского зеркала на угол α отраженный луч поворачивается на угол $\delta = 2\alpha = 10°$.

33.5. Дерево, освещенное солнцем, бросает тень длиной $L = 25$ м, а вертикальная палка высотой $h = 0{,}75$ м дает тень длиной $l = 1{,}25$ м. Определите высоту дерева H.

Ответ: $H = 15$ м.

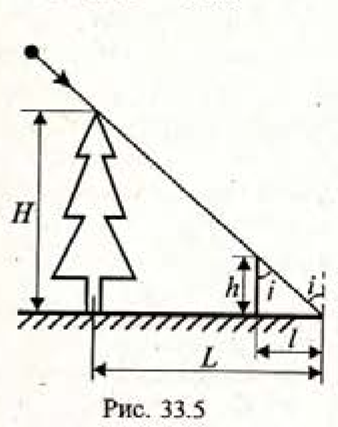


Рис. 33.5

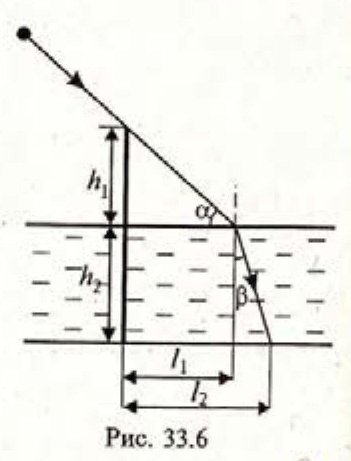


Рис. 33.6

Решение. Из рис. 33.5: $h = l\,\mathrm{tg}i$; $H = L\,\mathrm{tg}i$. Откуда $H = \dfrac{Lh}{l} = 15$ м.

33.6. Столб вбит в дно реки и $h_1 = 1$ м столба возвышается над водой. Найдите длину тени столба на поверхности l_1 и на дне реки l_2, если высота солнца над горизонтом $\varphi = 30°$, глубина реки $h_2 = 2м$, показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Ответ: $l_1 = 1{,}73$ м; $l_2 = 3{,}44$ м.

Решение. Из рис. 33.6 видно, что $l_1 = h_1\mathrm{ctg}\alpha = 1{,}73$ м. Согласно закону преломления света $\dfrac{\sin(90° - \alpha)}{\sin\beta} = n.$

Тогда $l_2 = h_1\mathrm{ctg}\alpha + h_2\mathrm{tg}\beta = 3{,}44$ м.

33.7. Угол падения луча на поверхность масла $\alpha = 60°$, а угол преломления $\beta = 36°$. Найдите показатель преломления масла.

Ответ: $n_2 = 1{,}47$.

Решение. По закону преломления света $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, где n_2 — показатель преломления масла, n_1 — показатель преломления воздуха ($n_1 = 1$). $n_2 = \dfrac{\sin 60°}{\sin 36°} = 1{,}47.$

33.8. На какой угол отклоняется луч от первоначального направления, если угол падения на поверхность стекла $\alpha = 45°$? Показатель преломления стекла $n = 1{,}6$.

Ответ: $\varphi = 19°$.

Решение. По закону преломления света $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$. Угол отклонения от первоначального направления $\varphi = \alpha - \beta = 45° - \arcsin\left(\dfrac{\sin 45°}{1{,}6}\right) = 19°.$

33.9. Луч падает на поверхность воды под углом $\alpha_1 = 40°$. Под каким углом должен упасть луч на поверхность стекла, чтобы угол преломления оказался таким же?

Ответ: $\alpha = 50{,}6°$.

Решение. По закону преломления света $n_1 = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta}$, $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha_1}{n_1}$, где β — угол преломления, n_1 — показатель преломления воды. $n_2 = \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\beta}$; $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha_2}{n_2}$. Таким образом, $\dfrac{\sin\alpha_1}{n_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{n_2}$,

$\sin\alpha_2 = \dfrac{n_2}{n_1}\sin\alpha_1,$

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_1'\right) = 50,6°.$$

33.10. Под каким углом α должен упасть луч на поверхность стекла, чтобы угол преломления β был в два раза меньше угла падения?

Ответ: $\alpha = 74°$.

Решение. По закону преломления света $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = n$;

$\sin\alpha = n\sin\frac{\alpha}{2}$; $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = n\sin\frac{\alpha}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$; $2\cos\frac{\alpha}{2} = n$; $\alpha = \arccos\frac{n}{2}$;

$\alpha = 2\arccos\frac{1,6}{2} = 74°$.

33.11. Под каким углом должен упасть луч на стекло, чтобы преломленный луч оказался перпендикулярным к падающему?

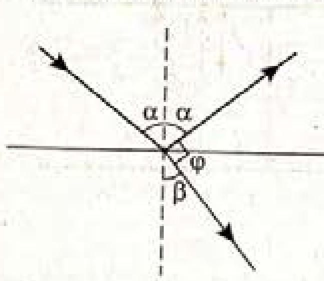


Рис. 33.7

Ответ: $\alpha = 58°$.

Решение. Из рис. 33.7 имеем $\varphi = 90° = 90° - \alpha + 90° - \beta$; $\beta = 90 - \alpha$. По закону преломления света $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$;

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\alpha;$$

$\alpha = \text{arctg}\,n = \text{arctg}1,6 = 58°$.

33.12. Взаимно перпендикулярные лучи идут из воздуха в жидкость. Каков показатель преломления жидкости, если один луч преломляется под углом 36°, а другой под углом 20° (рис. 33.8)?

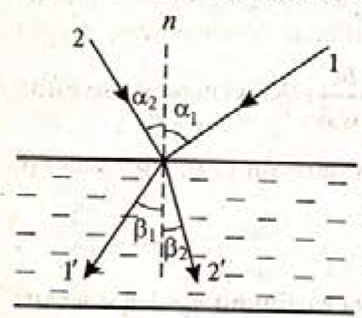


Рис. 33.8

Ответ: $n \approx 1,5$.

Решение. $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n$, $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = n$,

$\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$, $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin(90° - \alpha_1)}{\sin\beta_2}$,

$\sin(90° - \alpha_1) = \sin 90°\cos\alpha_1 - \cos 90°\sin\alpha_1 = \cos\alpha_1$. $\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$,

$$\text{tg}\,\alpha_1 = \frac{\sin 36°}{\sin 20°} = \frac{0,5877}{0,3420} = 1,72.$$

$\alpha_1 = \text{arctg}1,72$, $\alpha_1 = 59,8°$, $n = \frac{\sin 59,8°}{\sin 36°} = 1,47 \approx 1,5$.

33.13. На дно сосуда, наполненного водой до высоты 15 см, помещен точечный источник света. Какого наименьшего диаметра непрозрачную пластинку надо поместить на поверхности воды, чтобы свет не выходил из нее (рис. 33.9)?

Ответ: $d = 34$ см.

Решение. Пластинку необходимо поместить так, чтобы ее центр находился над источником света. $\sin\alpha \geq \frac{1}{n}$, $\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}}$,

$\frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \geq \frac{1}{n}$. $R^2n^2 \geq h^2 + R^2$, $R^2(n^2 - 1) \geq h^2$, $R \geq \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}$, $\alpha = 2R$,

$\alpha \geq \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}} \geq 34$ см.

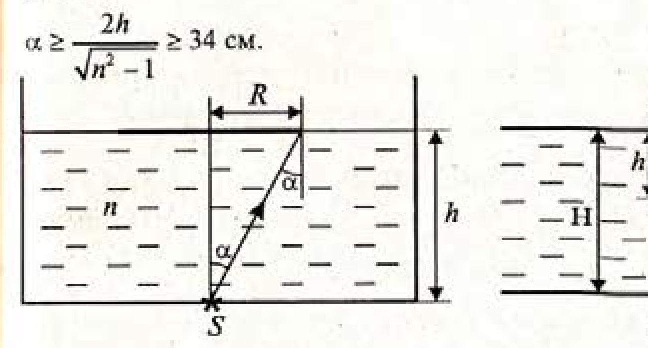


Рис. 33.9 Рис. 33.10

33.14. Какова истинная глубина бассейна, если при определении «на глаз» по вертикальному направлению глубина его кажется равной $n = 2$м? $n = 1,33$.

Ответ: $H = 2,7$ м.

Решение. На рис. 33.10 показаны 2 луча AB и AC, исходящие из точки A, расположенной на дне бассейна и попадающие в глаз наблюдателя. Глубина бассейна $H = \frac{BC}{\text{tg}\beta}$. Кажущаяся глубина $h = \frac{BC}{\text{tg}\alpha}$. Углы α и β очень малы, поэтому $\text{tg}\alpha = \sin\alpha = \alpha$, $\text{tg}\beta = \sin\beta = \beta$.

Тогда $\frac{\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{n}$, то $H = hn = 2,7$ м.

33.15. На горизонтальном дне бассейна глубиной $h = 1,5$ м лежит плоское зеркало. Луч света входит в воду под углом $\alpha = 45°$. Определите расстояние S от места вхождения луча в воду до места выхода его на поверхность воды после отражения от зеркала. Показатель преломления воды $n = 1,33$.

Ответ: $S = 1,88$ м.

Решение. $S = AB = 2h\,\mathrm{tg}\beta$ (рис. 33.11), $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$,

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{n\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}};\quad S = \frac{2h\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = 1{,}88\text{ м}.$$

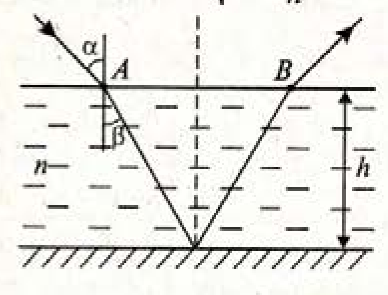


Рис. 33.11

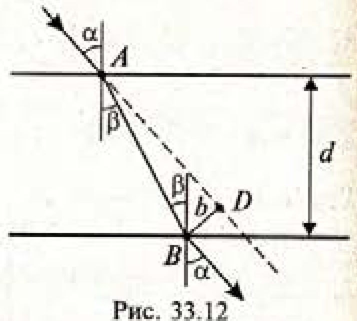


Рис. 33.12

33.16. На плоскопараллельную стеклянную пластинку ($n = 1{,}5$) толщиной $d = 5$ см падает под углом $\alpha = 30°$ луч света. Определите боковое смещение b луча, прошедшего сквозь эту пластинку.

Ответ: $b = 9{,}6$ мм.

Решение. Расстояние между лучами (боковое смещение) найдем из ΔABD (рис. 33.12). $b = AB\sin(\alpha-\beta)$, где $AB = \frac{d}{\cos\beta}$, $b = d\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$.

Из закона преломления $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ найдем $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}33$,

$$\beta = 19°30',\ b = d\frac{\sin(30°-19°30')}{\cos 19°30'} = 0{,}96\text{ см} = 9{,}6\text{ мм}.$$

33.17. Луч света падает на стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 1{,}7$ под углом α, для которого $\sin\alpha = 0{,}8$. Вышедший из пластинки луч оказался смещенным относительно падающего луча на расстояние $b = 2$ см. Какова толщина d пластинки?

Ответ: $d = 4{,}2$ см.

Решение. Вышедший из пластинки луч параллелен падающему (рис. 33.12), поэтому $\frac{d}{\cos\beta} = \frac{b}{\sin(\alpha-\beta)}$. Так как $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, то

$$d = \frac{b\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha(\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}-\sqrt{1-\sin^2\alpha})} = 4{,}2\text{ см}.$$

33.18. Между двумя стеклянными пластинками с показателями преломления n_1 и n_2 находится тонкий слой жидкости с показателем преломления n (рис. 33.13). Луч света, распространяющийся в первой пластинке под углом α_1 (меньше предельного), выходя из слоя жидкости, входит во вторую пластинку под углом α_2. Докажите, что в данном случае выполняется закон преломления $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ независимо от присутствия слоя жидкости.

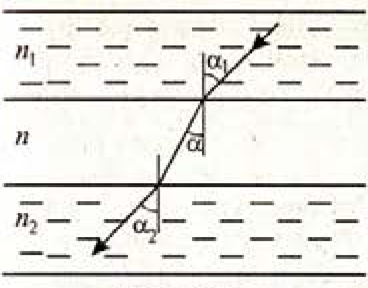


Рис. 33.13

Решение. $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = \frac{n}{n_1}$, $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n}$, $\sin\alpha = \sin\alpha_2\frac{n_2}{n}$; $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{n}{n_2} = \frac{n}{n_1}$;

$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$, что и требовалось доказать.

33.19. Предельный угол полного отражения на границе стекло—жидкость $\alpha_{пр} = 65°$. Определите показатель преломления жидкости, если показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Ответ: $n_ж = 1{,}36$.

Решение. При переходе световой волны из оптически более плотной в менее плотную среду угол падения не может превышать предельного значения $\alpha_{пр}$, так как синус угла преломления не может быть больше единицы. $\frac{\sin\alpha_{пр}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{n_ж}{n}$, $n_ж = n\sin\alpha_{пр} = 1{,}36$.

33.20. Луч света выходит из стекла в вакуум. Предельный угол $\alpha_{пр} = 42°$. Определите скорость света в стекле.

Ответ: $v = 201$ Мм/с.

Решение. $\sin\alpha_{пр} = \frac{1}{n}$, $v = \frac{c}{n} = c\sin\alpha_{пр} = 201$ Мм/с.

33.21. С повышением температуры показатель преломления воды несколько уменьшается. Как при этом изменяется граничный угол полного отражения для воды?

Решение. Граничный угол полного отражения $\sin\alpha_{гр} = \frac{1}{n}$. При повышении температуры воды $t_2 > t_1$ показатель преломления воды уменьшается $n_2 < n_1$, тогда $\sin\alpha_{гр_2} > \sin\alpha_{гр_1}$ и $\alpha_{гр_2} > \alpha_{гр_1}$, т. е. граничный угол полного отражения увеличивается.

33.22. Водолаз, стоящий на дне реки, видит отражение от поверхности воды ближайшего предмета, лежащего на дне, на расстоянии $S = 9{,}4$ м. Определите глубину реки, если расстояние от дна до глаз водолаза $l = 1{,}7$ м.

Ответ: $h = 5$ м.

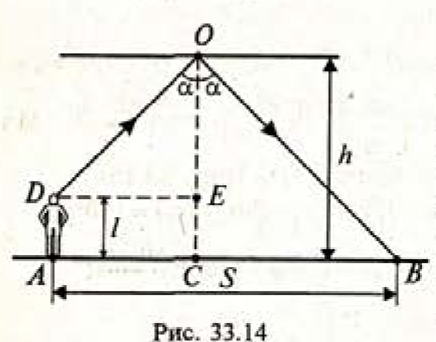


Рис. 33.14

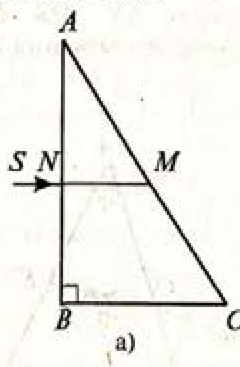
Решение. Лучи света, идущие от освещенных предметов, находящихся на дне, попадая на поверхность воды, полностью отражаются и попадают в глаз наблюдателя, если угол падения равен углу полного внутреннего отражения или больше его.

$\dfrac{\sin\alpha}{\sin 90°} = \dfrac{1}{n}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{n}$, $S = AB$ — расстояние от водолаза до ближайших к нему предметов (рис. 33.14), которые он видит отраженными от поверхности воды. $AB = BC + AC$; $AC = DE = (h - l)\operatorname{tg}\alpha$, $S - AC = h\operatorname{tg}\alpha$. Решив систему двух уравнений, получим:

$$h = \frac{l}{2} + \frac{S}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ \text{где}\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}},\quad h = \frac{l}{2} + \frac{S}{2}\sqrt{n^2-1} = 5\ \text{м}.$$

33.23. При каком наименьшем значении преломляющего угла A стеклянной призмы BAC (рис. 33.15а) луч SN будет претерпевать полное отражение? $n_{ст} = 1{,}6$.

Ответ: $\angle A = 39°$.



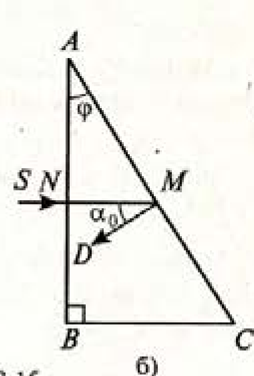


Рис. 33.15

Решение. Граничный угол полного отражения $\sin\alpha_0 = \dfrac{1}{n}$;

$\alpha_0 = \arcsin\dfrac{1}{n}$; $\alpha_0 = \arcsin\dfrac{1}{1{,}6} = 39°$. Угол $\alpha_0 = \varphi$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами: $AM \perp DM$ и $AN \perp NM$ (рис. 33.15б), поэтому угол преломления $\angle A = \varphi = \alpha_0 = 39°$.

33.24. Луч падает под углом $\alpha_1 = 50°$ на прямую треугольную стеклянную призму ($n = 1{,}6$) с преломляющим углом $\varphi = 60°$. Найдите угол преломления луча при выходе из призмы.

Ответ: $\beta_2 = 56°$.

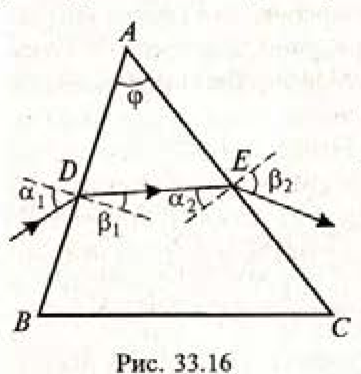


Рис. 33.16

Решение. По закону преломления света $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n$, $\beta_1 = \arcsin\dfrac{\sin\alpha_1}{n}$. Из треугольника ADE (рис. 33.16)

$\varphi + (90° - \beta_1) + (90° - \alpha_2) = 180°$;

$\alpha_2 = \varphi - \beta_1 = \varphi - \arcsin\dfrac{\sin\alpha_1}{n}$;

$\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \dfrac{1}{n}$; $\sin\beta_2 = n\sin\alpha_2$;

$$\beta_2 = \arcsin[n\sin(\varphi - \beta_1)] = \arcsin[n\sin(\varphi - \arcsin\frac{\sin\alpha_1}{n})] = 56°.$$

33.25. На грань стеклянной призмы ($n_1 = 1{,}5$) нормально падает луч света. Определите угол отклонения луча, если преломляющий угол призмы $\varphi = 30°$.

Ответ: $\theta = 19°$.

Решение. По закону преломления света $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1}{n_1}$, $\beta = \arcsin(n_1\sin\alpha)$. Угол $\angle DKM = \angle DBK$, т. е. $\alpha = \varphi = 30°$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами $BK \perp MK$, $BD \perp DK$, рис. 33.17). $\beta = \arcsin(1{,}5 \cdot \sin 30°) = 49°$. Угол отклонения луча при выходе из призмы $\theta = \beta - \alpha = 19°$.

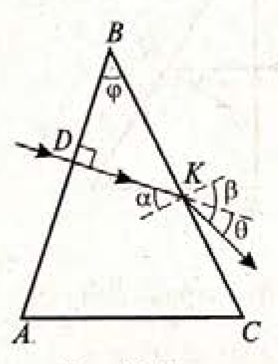


Рис. 33.17

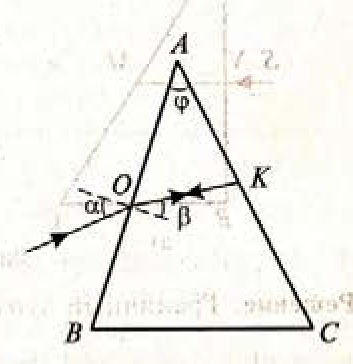


Рис. 33.18

33.26. В призме с преломляющим углом $\varphi = 30°$ боковая грань AC посеребрена. Луч света падает на грань AB под углом $\alpha = 45°$ и после отражения от посеребренной грани выходит по тому же направлению. Определите показатель преломления призмы.

Ответ: $n = 1{,}41$.

Решение. Луч света после отражения от посеребренной грани AC пойдет по тому же направлению в случае, когда угол OKA равен 90° (рис. 33.18). Тогда угол преломления равен преломляющему углу $\beta = \varphi$. Откуда $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin 45°}{\sin 30°} = 1{,}41$.

33.27. Луч света падает под углом $\alpha = 45°$ на боковую грань призмы с преломляющим углом $\varphi = 60°$. Определите показатель преломления призмы, если после двойного преломления выходящий луч распространяется вдоль второй боковой грани призмы.

Ответ: $n = 1{,}7$.

Решение. Ход луча показан на рис. 33.19. $\beta_1 + \beta_2 = \varphi$, $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} = n$;

$\sin\beta_2 = \dfrac{1}{n}$, тогда $\cos\varphi = \cos(\beta_1 + \beta_2) = \cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2$. Так как

$\cos\beta_1 = \dfrac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}$ и $\cos\beta_2 = \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}$, то $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{n}\cdot\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} -$

$-\dfrac{\sin\alpha}{n^2}$, откуда $n = \dfrac{\sqrt{1+\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi}}{\sin\varphi} = 1{,}7$.

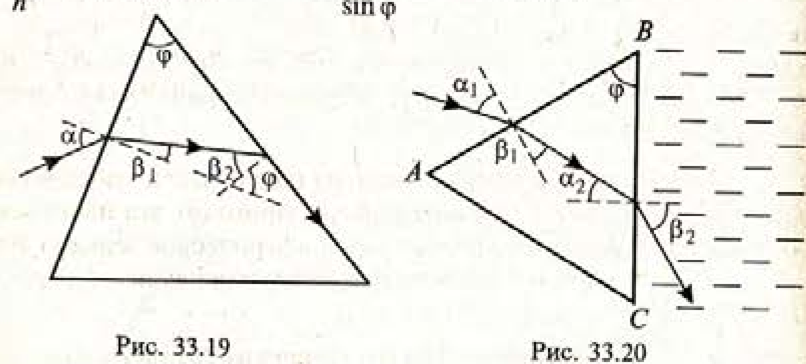


Рис. 33.19 Рис. 33.20

33.28. Равнобочная призма с показателем преломления $n_1 = 1{,}6$ прилегает одной гранью к сосуду с водой $n_2 = 1{,}33$. Луч света падает из воздуха на грань призмы под углом $\alpha_1 = 40°$ и после двукратного преломления входит в воду. Чему равен угол преломления β_2 в воде?

Ответ: $\beta_2 = 46°$.

Решение. Из закона преломления $n_1 = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}$ находим угол преломления β_1. $\sin\beta_1 = \dfrac{\sin\alpha_1}{n_1}$; $\beta_1 = 23°30'$. Угол падения на грань BC (рис. 33.20) $\alpha_2 = \varphi - \beta_1 = 60° - 23°30' = 36°30'$. Аналогично $\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$, откуда $\sin\beta_2 = \dfrac{n_1}{n_2}\sin\alpha_2 = 0{,}716$; $\beta_2 = 46°$.

33.29. В условии предыдущей задачи найдите угол, под которым нужно направить луч света на грань призмы, чтобы он не проник в воду.

Ответ: $\alpha_{тр} = 6°30'$.

Решение. Луч света не попадет в воду, если угол $\beta_2 = 90°$. $\sin\alpha_{2_{тр}} = \dfrac{n_2}{n_1} = 0{,}829$; $\alpha_{2_{тр}} = 56°$. Откуда $\beta_{1_{тр}} = 60° - 56° = 4°$. Но $\dfrac{\sin\alpha_{тр}}{\sin\beta_{1_{тр}}} = n_1$, поэтому $\sin\alpha_{тр} = n_1\sin\beta_{1_{тр}}$; $\alpha_{тр} = 6°30'$.

33.30. Луч света падает на трехгранную призму из кварцевого стекла ($n = 1{,}5$) под углом $\alpha_1 = 36°$. Преломляющий угол призмы $\varphi = 40°$. Под каким углом β_2 луч выйдет из призмы и каков его угол отклонения θ от первоначального направления?

Ответ: $\beta_2 = 27{,}4°$; $\theta = 23{,}4°$.

Указание. См. решение задач 33.24, 33.25. Ход лучей через призму изображен на рис. 33.21.

Рис. 33.21

33.31. Посеребренная сфера рассечена на две части плоскостью. На каком расстоянии b от центра сферы проходит эта плоскость, если меньшая часть представляет собой сферическое зеркало диаметром $a = 0{,}64$ м с фокусным расстоянием $F = 0{,}65$ м?

Ответ: $b = 1{,}26$ м.

Решение. Радиус кривизны сферического зеркала $R = 2F$. По теореме Пифагора $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + b^2 = R^2$ (рис. 33.22); отсюда $b = \sqrt{4F^2 - \dfrac{a^2}{4}} = 1{,}26$ м.

Рис. 33.22

33.32. На каком расстоянии d от вогнутого зеркала с фокусным расстоянием $F = 1$ м необходимо поместить источник света, чтобы его изображение совпало с самим источником?

Ответ: $d = 2$ м.

Решение. $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. По условию $f = d$, т. е. $d = 2$ м.

33.33. Расстояние от предмета до вогнутого зеркала $d = 0,5$ м, расстояние от зеркала до изображения $f = 2$ м. Найдите радиус кривизны зеркала.

Ответ: $R = 0,8$ м.

Решение. $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R}$, т. е. $R = \frac{2df}{d+f} = 0,8$ м.

33.34. Расстояние от предмета до вогнутого зеркала равно двум радиусам кривизны. Определите положение изображения предмета и постройте это изображение.

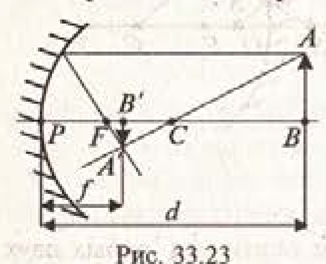


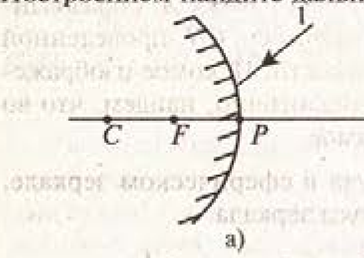
Рис. 33.23

Ответ: $f = \frac{2}{3}R$.

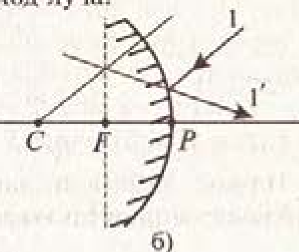
Решение. $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R}$, $d = 2R$;

$\frac{1}{2R} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$, $\frac{1}{f} = \frac{1}{R}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2R}$, $f = \frac{2}{3}R$ (рис. 33.23).

33.35. На выпуклое зеркало падает луч, как показано на рис. 33.24а. Построением найдите дальнейший ход луча.



а)



б)

Рис. 33.24

Решение. 1. Построим точку $F = \frac{R}{2}$ — фокус зеркала.

2. Через фокус проведем фокальную плоскость.

3. Через точку C проведем побочную оптическую ось, параллельную направлению заданного луча. Через точку пересечения этой оси и фокальной плоскости пройдет продолжение 1′ отраженного луча 1 (рис. 33.24б).

33.36. Светящаяся точка S находится на главной оптической оси вогнутого зеркала (рис. 33.25а, 33.25б), фокусное расстояние которого равно F. Найдите графическим построением изображение. Какое оно: действительное или мнимое?

Ответ: а) Действительное; б) мнимое.

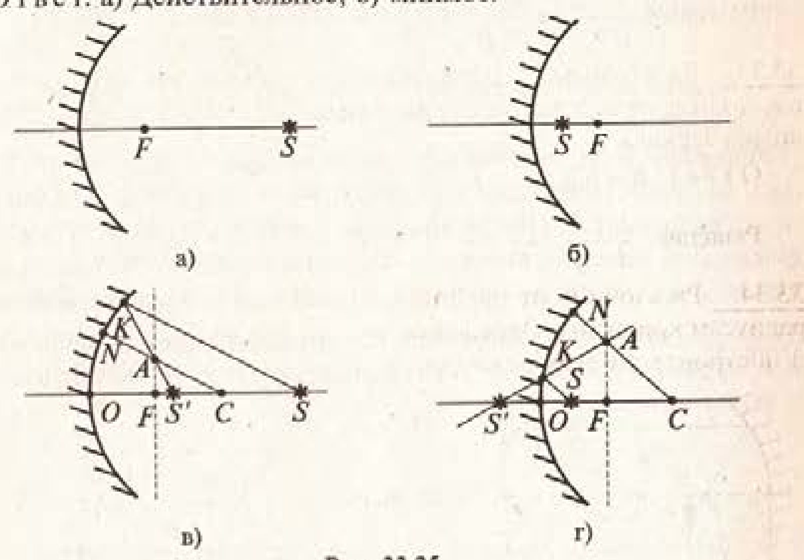


Рис. 33.25

Решение. Для построения необходимо найти ход любых двух лучей, исходящих из точки S. Луч SO, отразившись, идет вдоль главной оптической оси. Построим точку C — радиус зеркала ($R = 2F$). Луч SK после отражения пойдет через точку A, образованную от пересечения побочной оптической оси CN, проведенной параллельно лучу SK и фокальной плоскости. Искомое изображение S' — действительное. Рассуждая аналогично, найдем, что во втором случае изображение S' — мнимое.

33.37. На рис. 33.26(а, б) дан ход луча в сферическом зеркале. Найдите построением положение фокуса зеркала.

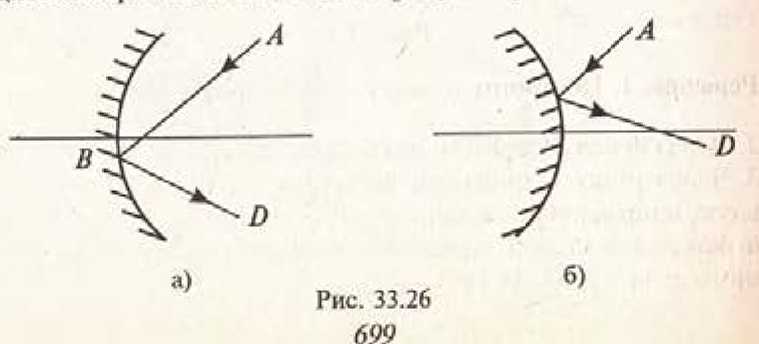


Рис. 33.26

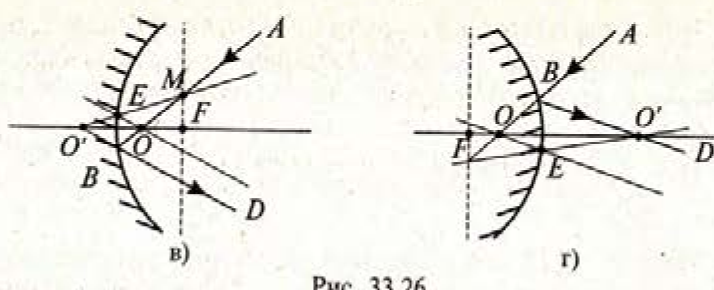


Рис. 33.26

Решение. Если бы точка *O* была источником света, то *O'* являлась бы ее изображением (рис. 33.26в, 33.26г). *OE* — побочная ось параллельная *BO'*. Соединим точки *O'* и *E*. Точка *M* лежит на фокальной плоскости зеркала. Опустив из точки *M* перпендикуляр на главную оптическую ось, определим положение фокуса *F*.

33.38. С помощью сферического зеркала получено изображение A_1B_1 предмета *AB* (рис. 33.27а). Определите построением положение и фокус зеркала.

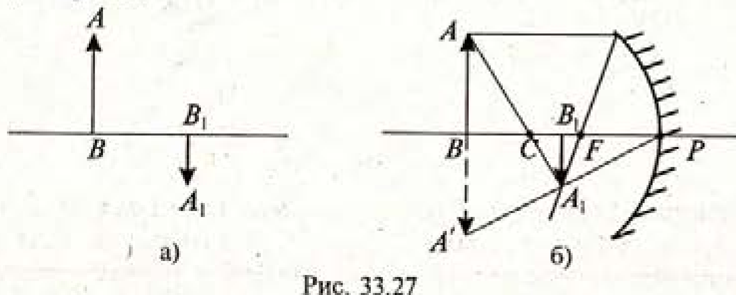


Рис. 33.27

Решение. Прямая AA_1 пересекает главную оптическую ось в точке *C* — оптический центр кривизны зеркала. Отложим *A'B* = *AB*. Прямая $A'A_1$ пересекает ось в точке *P* — полюс зеркала. Из построения видно, что зеркало вогнутое. Из вершины предмета *A* проведем на зеркало луч, параллельный главной оптической оси. Точку пересечения этого луча и зеркала соединим с вершиной изображения A_1B_1. Этот луч пересечет главную оптическую ось в фокусе *F* (рис. 33.27б).

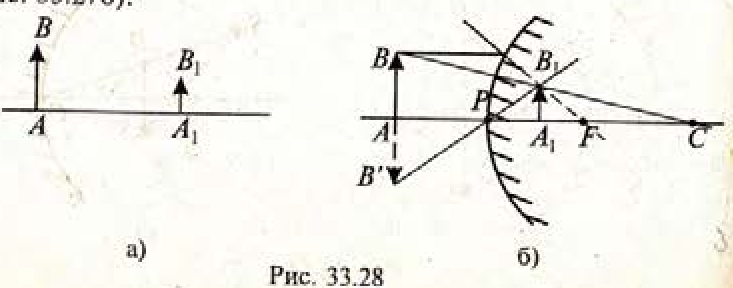


Рис. 33.28

33.39. С помощью сферического зеркала получено изображение A_1B_1 предмета *AB*. Определите построением положение зеркала и его фокус (рис. 33.28а).

Решение. Построение выполняется аналогично построению в задаче 33.38. Зеркало оказывается выпуклым, изображение мнимым (рис. 33.28б).

33.40. На рис. 33.29 даны положения главной оптической оси сферического зеркала, светящейся точки *S* и ее изображение *S'*. Найдите построением положение центра кривизны и полюса зеркала. Какое использовано зеркало: вогнутое или выпуклое?

Ответ: а), б), в) вогнутое; в), г) выпуклое.

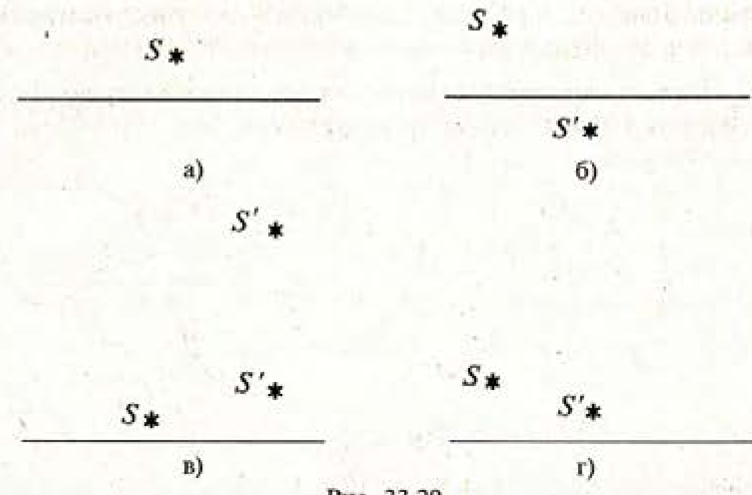


Рис. 33.29

Решение. На рис. 33.30 точка пересечения прямой *SS'* с главной оптической осью дает центр кривизны — *C*. Соединив симметричную *S'* точку *D* с *S* и продолжив линию *DS* до пересечения с главной оптической осью, получим вершину (полюс) зеркала *O*. О типе зеркала можно судить по расположению точек *C*, *O* и *S*.

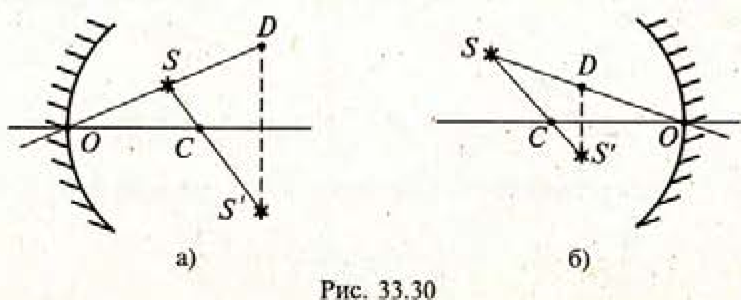


Рис. 33.30

В случаях а), б) зеркало вогнутое, т. к. выпуклое дает только прямое изображение. Изображение — действительное.

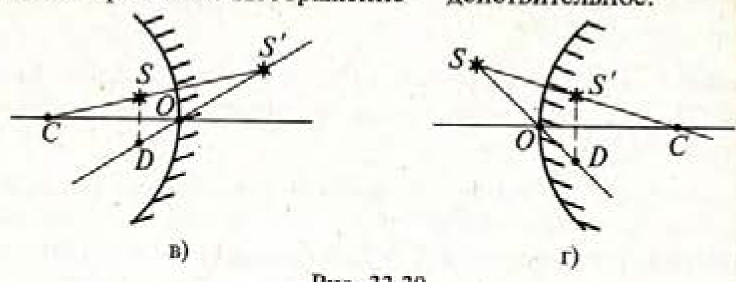


Рис. 33.30

В случаях в), г) зеркало может быть вогнутым (если S ближе к оптической оси чем S') и выпуклым (если S дальше от оптической оси чем S'). Изображение — мнимое.

33.41. На выпуклое зеркало падает луч, как показано на рис. 33.31а. Построением найдите дальнейший ход луча.

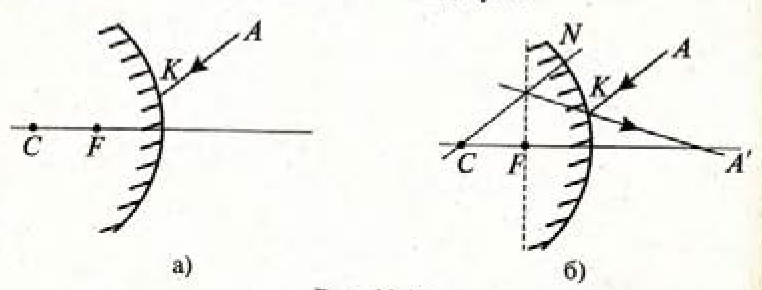


Рис. 33.31

Решение. Через точку C проводим побочную оптическую ось CN параллельную падающему лучу AK. Через точку пересечения CN с фокальной плоскостью должно пройти продолжение отраженного луча KA'.

33.42. Пламя свечи находится на расстоянии $d = 1{,}5$ м от выпуклого зеркала с фокусным расстоянием $F = 0{,}5$ м. Найдите уменьшение k изображения пламени свечи.

Ответ: $k = \frac{1}{4}$.

Решение. Увеличение, даваемое зеркалом, $k = \frac{f}{d}$. В данном случае (f и F — отрицательные) формула зеркала имеет вид: $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$, откуда $f = \frac{dF}{F+d}$, тогда $k = \frac{dF}{(F+d)d} = \frac{F}{F+d} = \frac{1}{4}$.

33.43. Вогнутое зеркало дает изображение предмета с увеличением $k = 2$. Найдите радиус кривизны R зеркала, если расстояние между предметом и изображением $a = 18$ см.

Ответ: $R = 24$ см.

Решение. Увеличенное изображение может быть действительным или мнимым. В этих случаях должны быть выполнены соотношения: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$, $\frac{f}{d} = k$, $f - d = a$; $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$, $\frac{f}{d} = k$, $f + d = a$.

Обе системы уравнений дают $R = \frac{2ka}{k^2 - 1} = 24$ см.

33.44. Доказать, что для сферического зеркала произведение расстояний предмета a и изображения b до главного фокуса всегда равно квадрату главного фокусного расстояния F.

Решение. $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, $F = \frac{fd}{f+d}$; $d = F + a$, $f = F + b$ (по условию). Тогда $F = \frac{(F+a)(F+b)}{F+a+F+b}$, откуда $F^2 = ab$.

33.45. Светящаяся точка лежит на главной оптической оси вогнутого зеркала на расстоянии $d = \frac{4}{3}F$ (F — фокусное расстояние), считая от вершин зеркала. Найдите расстояние от вершины зеркала до изображения точки.

Ответ: $f = 4F$.

Решение. $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$; $f = \frac{Fd}{d-F} = \frac{F \cdot \frac{4}{3}F}{\frac{4}{3}F - F} = 4F$.

33.46. На вогнутое зеркало с фокусным расстоянием $F = 20$ см падают сходящиеся лучи. Если их продолжить за зеркалом, то они пересекутся на расстоянии $f = 10$ см от зеркала (рис. 33.32а). На каком расстоянии от зеркала соберутся лучи после отражения?

Ответ: $d = 6{,}7$ см.

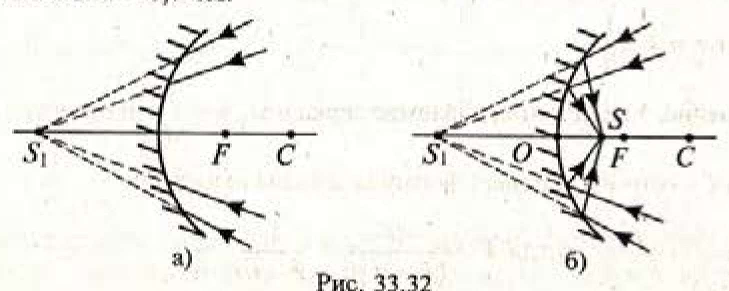


Рис. 33.32

Решение. Пусть все сходящиеся лучи после отражения сойдутся в точке S (рис. 33.32б). Если предположить, что S — светящаяся точка, то S_1 — ее мнимое изображение. $S_1O = f$, $OS = d$. Из формулы для вогнутого зеркала с мнимым изображением $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ найдем $d = \frac{fF}{f+F} = 6{,}7$ см.

33.47. Где нужно поставить предмет, чтобы получить действительное изображение в $k = 0{,}5$ натуральной величины в вогнутом сферическом зеркале, радиус кривизны которого $R = 40$ см?

Ответ: На расстоянии $d = 60$ см от зеркала.

Решение. $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$; $k = \frac{f}{d}$, откуда $f = kd$. Тогда $\frac{1}{d} + \frac{1}{kd} = \frac{2}{R}$, что дает $d = \frac{k+1}{2k} R = 60$ см.

33.48. На вогнутое зеркало, радиус кривизны которого $R = 30$ см, падают сходящиеся лучи света так, что их продолжения пересекаются в точке, находящейся за зеркалом на расстоянии $a_1 = 30$ см. На каком расстоянии от зеркала сойдутся эти лучи после отражения? Будет ли точка их пересечения действительной?

Ответ: $a_2 = 10$ см; да.

Решение. Точку пересечения лучей, продолженных за зеркало, можно рассматривать как мнимый источник. Тогда $a_1 = d$, а $a_2 = f$.

$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, откуда $f = a_2 = \frac{Fd}{d+F} = \frac{Fa_1}{a_1+F}$, т. к. $F = \frac{R}{2}$, $f = \frac{Ra_1}{2a_1+R} = 10$ см.

33.49. Сходящиеся лучи падают на выпуклое зеркало так, что их продолжения пересекаются на оси зеркала на расстоянии $a_1 = 30$ см. После отражения от зеркала лучи расходятся так, что их продолжения пересекаются в точке, отстоящей от зеркала на расстоянии $a_2 = 60$ см. Определите радиус кривизны зеркала.

Ответ: $R = 40$ см.

Решение. Точку пересечения лучей можно рассмативать как действительный источник света: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ или с учетом $F = \frac{R}{2}$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$, откуда $R = \frac{2fd}{f+d}$. Согласно условию задачи $d = a_1, f = a_2$, тогда $R = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} = 40$ см.

33.50. Через круглое отверстие в экране, имеющее диаметр $d = 4$ см, на выпуклое зеркало, находящееся на расстоянии $a = 16$ см от экрана, падает параллельный пучок света (вдоль главной оптической оси зеркала перпендикулярно к экрану). Отразившись от зеркала, пучок света, попадая на тот же экран, образует вокруг отверстия светлое пятно диаметром $D = 6$ см. Найдите радиус кривизны R зеркала.

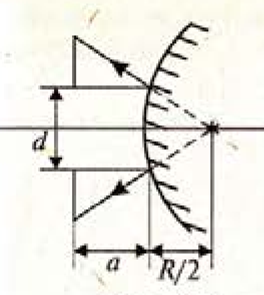


Рис. 33.33

Ответ: $R = 64$ см.

Решение. Отраженные лучи идут пучком, расходящимся как бы из фокуса зеркала, расположенного от зеркала на расстоянии $F = \frac{R}{2}$. Из подобия треугольников (рис. 33.33) следует

$$\frac{D}{d} = \frac{a + \frac{R}{2}}{\frac{R}{2}} = \frac{2a+R}{R}, \text{ откуда } R = \frac{2ad}{D-d} = 64 \text{ см.}$$

33.51. Пучок параллельных лучей, пройдя через круглое отверстие в листе бумаги, образует на экране, параллельном листу и расположенном от него на расстоянии $a = 45$ см, светлый круг диаметром $d = 6$ см. Когда экран заменили выпуклым зеркалом, то на листе бумаги появился светлый круг диаметром $D = 33$ см. Найдите радиус кривизны R зеркала.

Ответ: $R = 20$ см.

Указание. См. решение предыдущей задачи. $R = \frac{2ad}{D-d} = 20$ см.

33.52. На рис. 33.34 дан луч, падающий на линзу (а, б) и прошедший сквозь линзу (в, г) с фокусным расстоянием F. Постройте ход луча после линзы и до линзы.

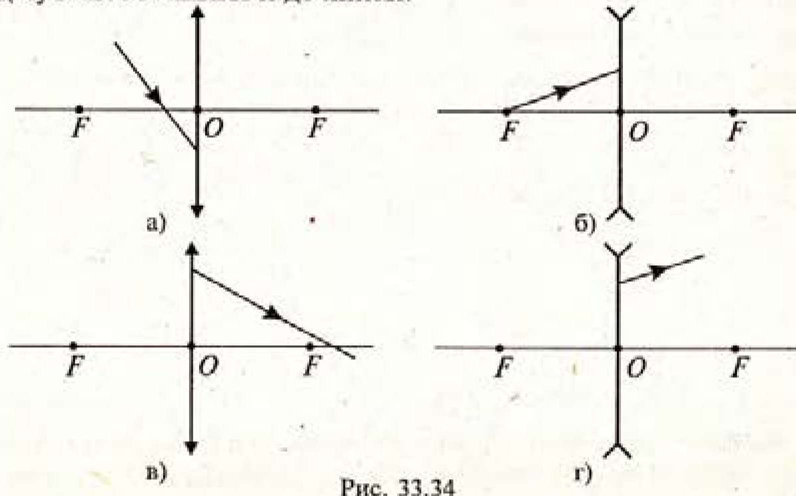


Рис. 33.34

Решение. См. рис. 33.35. а) Через оптический центр линзы проводим побочную оптическую ось, параллельную падающему лучу. Соединив точку B пересечения побочной оси с фокальной плоскостью с точкой A падения луча на линзу, получим направление преломленного луча.

б) Луч, вышедший из фокуса, после прохождения через линзу идет параллельно главной оптической оси.

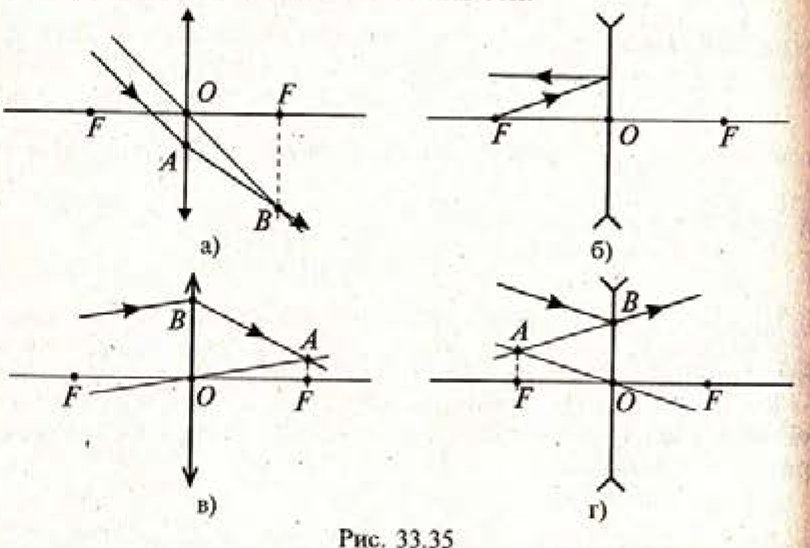


Рис. 33.35

в) Через точку A пересечения преломленного луча и фокальной плоскости и центр линзы O проводим побочную оптическую ось. Луч, параллельный этой оси и проведенный в точку B начала преломленного луча, и будет падающим лучом.

г) Аналогично пункту в).

33.53. На рис. 33.36 дан ход луча 1 в линзе. Найдите построением положения главных фокусов линзы.

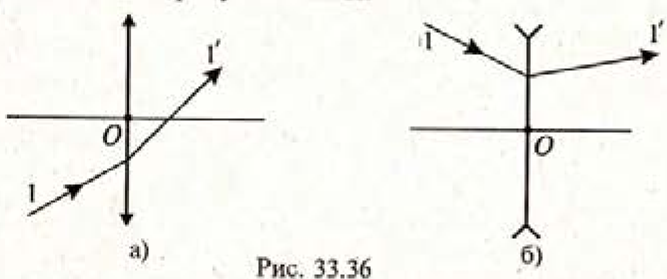


Рис. 33.36

Решение. См. рис. 33.37. а) Положение фокусов можно найти, опустив на главную оптическую ось перпендикуляры из точек пересечения с данным лучом побочных оптических осей, параллельных падающему 1 и преломленному 1′ лучам.

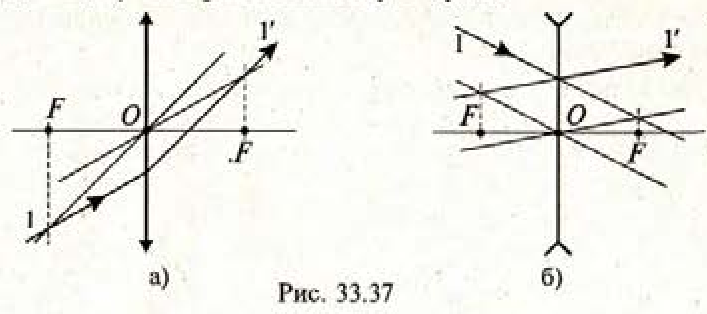


Рис. 33.37

б) В случае рассеивающей линзы берут точки пересечения побочных осей с продолжением лучей.

33.54. На рис. 33.38 дан ход луча 1 в линзе. Найдите построением ход луча 2.

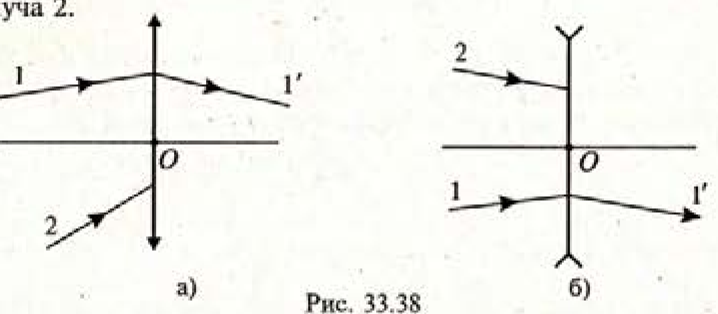


Рис. 33.38

Решение. См. рис. 33.39. Ход луча 1 дан для того, чтобы найти фокус линзы. Зная фокус, строим ход луча 2 по выходе его из линзы.

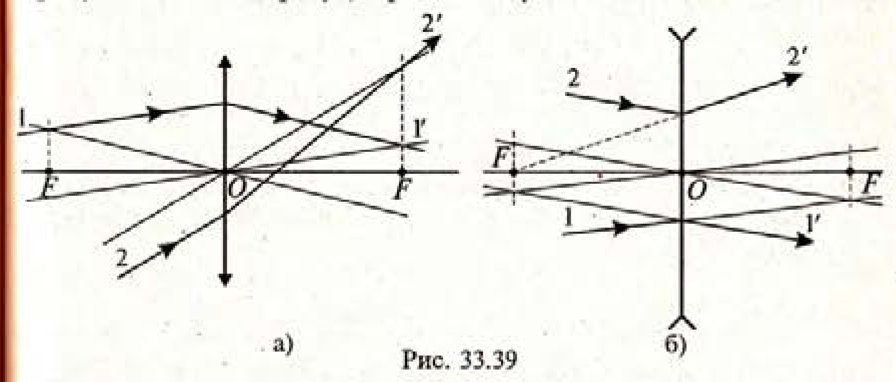


Рис. 33.39

33.55. Собирающая линза вставлена в круглое отверстие в непрозрачной ширме. Точечный источник света находится на главной оптической оси линзы на расстоянии d = 10 см от нее. По другую

сторону линзы на таком же расстоянии d от нее поставлен перпендикулярно к оси экран. На экране виден светлый круг, диаметр которого в $n = 2$ раза меньше диаметра линзы. Найдите фокусное расстояние F линзы.

Ответ: Возможны два случая: а) $F = 4$ см; б) $F = 6,7$ см.

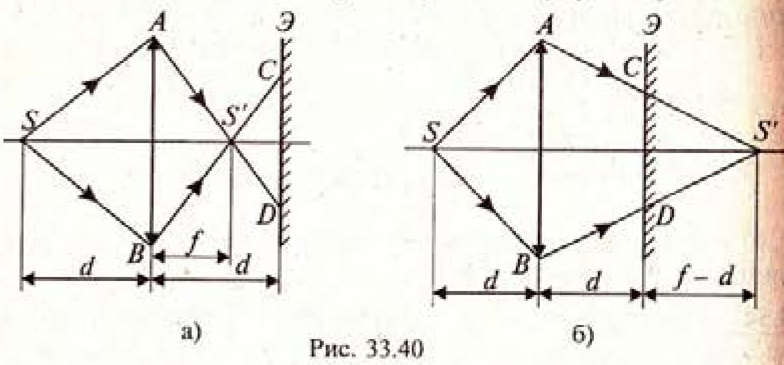


Рис. 33.40

Решение. Возможны два случая. а) Если расстояние d от линзы до экрана больше расстояния f от линзы до изображения S' источника S, лучи падают на экран расходящимся пучком (рис. 33.40а). Из подобия треугольников ABS' и CDS' находим $\frac{f}{d-f} = n$. Используя формулу линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, получим $F = \frac{nd}{2n+1} = 4$ см.

б) Если расстояние d от линзы до экрана меньше расстояния f до изображения, лучи падают на экран сходящимся пучком (рис. 33.40б). Из подобия треугольников ABS' и CDS' находим $\frac{f}{f-d} = n$. Используя формулу линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, получим $F = \frac{nd}{2n-1} = 6,7$ см.

33.56. Изображение миллиметрового деления шкалы, расположенной перед линзой на расстоянии $d = 2,5$ см, имеет на экране длину $L = 8$ см. На каком расстоянии f от линзы находится экран?

Ответ: $f = 10$ м.

Решение. Увеличение $k = \frac{L}{l} = \frac{f}{d}$, откуда $f = \frac{Ld}{l} = 10$ м.

33.57. Собирающая линза с оптической силой $D = 8$ дптр дает изображение предмета, равное размеру предмета. Как нужно изменить расстояние между линзой и предметом, чтобы его изображение уменьшилось в 3 раза?

Ответ: Увеличить на величину $a = 0,25$ м.

Решение. Увеличение $k = \frac{1}{3}$. Расстояние между линзой и предметом нужно увеличить на величину $a = \frac{1-k}{kD} = 0,25$ м.

33.58. Постройте изображение отрезка AB, параллельного главной оптической оси собирающей линзы (рис. 33.41а).

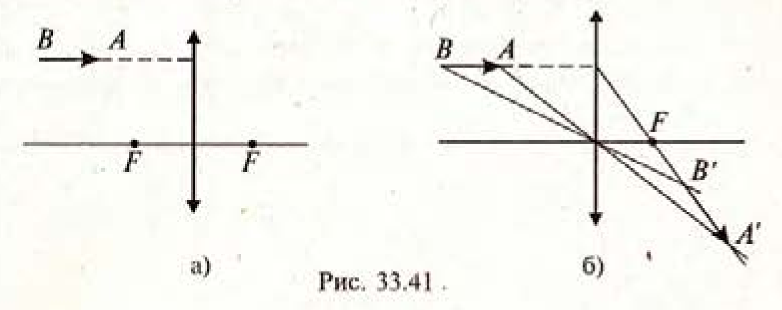


Рис. 33.41

Решение. Для построения изображения из точек достаточно определить ход любых двух лучей, исходящих из точки, после преломления в линзе (рис. 33.41б).

33.59. Шарик поочередно помещают в точки A и B, находящиеся на главной оптической оси собирающей линзы по одну сторону от нее. Расстояние $AB = l$. Линза дает поочередно два изображения шарика с увеличениями $k_А$ и $k_В$. Найти расстояние L между изображениями шариков.

Ответ: $L = k_А k_В l$.

Указание. Решить самостоятельно.

33.60. Какое увеличение k может дать лупа с оптической силой $D = 8$ дптр? Расстояние наилучшего зрения $d_0 = 25$ см.

Ответ: $2 \le k \le 3$.

Решение. Если рассматривать предмет через лупу, то угол зрения φ_1 определяется из условия $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{h}{d} = \frac{H}{f}$, где h и H — размеры предмета и изображения. Так как мнимое изображение должно лежать от линзы, приставленной вплотную к глазу, на расстоянии $f \ge d_0$, то из формулы линзы $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = D$ получаем, что $\frac{d_0}{1+Dd_0} \le d \le \frac{1}{D}$. Если рассматривать предмет без лупы, то угол зрения φ_2 находится

по формуле $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{h}{d_0}$. Увеличение лупы $k = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{d_0}{d}$; следовательно, $Dd_0 \le k \le Dd_0 + 1$ или $2 \le k \le 3$.

33.61. Фокусное расстояние собирающей линзы $F = 10$ см, расстояние от предмета до фокуса $b = 5$ см, высота предмета $h = 2$ см. Найдите высоту H действительного и мнимого изображений.

Ответ: $H = 4$ см.

Решение. Если d — расстояние от предмета до линзы, а f — от линзы до изображения, то в случае действительного изображения $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, $\frac{H}{h}=\frac{f}{d}$ и $d = F + b$. В случае мнимого изображения $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, $\frac{H}{h}=\frac{f}{d}$ и $d = F - b$. Обе системы уравнений дают $H = \frac{Fh}{b} = 4$ см.

33.62. Две собирающие линзы одинаковой формы сделаны из разных сортов стекла с показателями преломления $n_1 = 1{,}5$ и $n_2 = 1{,}7$. Найдите отношение фокусных расстояний линз в воздухе ($n = 1$) и в воде ($n_в = 1{,}33$).

Ответ: В воздухе $\frac{F_1}{F_2} = 1{,}4$; в воде $\frac{F_1'}{F_2'} = 2{,}2$.

Решение. В воздухе $\frac{F_1}{F_2} = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} = 1{,}4$. В воде $\frac{F_1'}{F_2'} = \frac{n_2 - n_в}{n_1 - n_в} = 2{,}2$.

33.63. Две линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2, приставленные вплотную друг к другу, дают изображение источника, расположенного на некотором расстоянии перед линзами. Обе линзы заменяют одной, помещенной на том же месте. Какова должна быть оптическая сила D этой линзы, чтобы положение изображения источника не изменилось?

Ответ: $D = \pm\frac{1}{F_1} \pm \frac{1}{F_2}$.

Решение. Лучи, прошедшие первую линзу, дадут изображение (действительное или мнимое) на расстоянии a от линзы, определяемом формулой линзы $\frac{1}{d} \pm \frac{1}{a} = \pm\frac{1}{F_1}$. Это изображение служит источником (мнимым или действительным) для второй линзы, т. е.

$\mp\frac{1}{a}+\frac{1}{f}=\pm\frac{1}{F_2}$. Для заменяющей линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f} = D$. Сравнивая сумму первых двух уравнений с третьим, убеждаемся, что $D = \pm\frac{1}{F_1} \pm \frac{1}{F_2}$.

33.64. Точечный источник света находится на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на главной оптической оси. Плоское зеркало расположено на таком расстоянии за линзой, что лучи, отразившись от зеркала и вторично пройдя через линзу, идут параллельным пучком. Найдите диаметр l пучка, если диаметр линзы равен L.

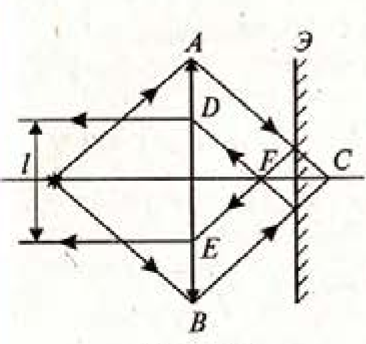


Рис. 33.42

Ответ: $l = \frac{L}{2}$.

Решение. В отсутствие зеркала линза дала бы изображение источника в точке C на расстоянии f, определяемом из формулы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ (рис. 33.42). Чтобы лучи после вторичного преломления шли параллельным пучком, они должны после отражения сойтись в фокусе F. Треугольники ABC и DEF подобны. $\frac{l}{L}=\frac{F}{f}$ или $l = \frac{(d-F)L}{d}$, но $d = 2F$, поэтому $l = \frac{L}{2}$.

33.65. Зрительная труба с фокусным расстоянием объектива $F = 24$ см установлена на бесконечность. После того, как окуляр трубы был передвинут на некоторое расстояние, стали ясно видны предметы, удаленные от объектива на расстояние $d = 6$ м. На какое расстояние a передвинули окуляр?

Ответ: $a = 1$ см, дальше от объектива.

Указание. Решить самостоятельно.

33.66. Фокусное расстояние окуляра микроскопа $F_2 = 4$ см, расстояние между объективом и окуляром $l = 16$ см. Увеличение микроскопа $k = 300$. Найдите фокусное расстояние F_1 объектива микроскопа, если расстояния наилучшего зрения $d_0 = 25$ см.

Ответ: $F_1 = 2{,}45$ мм.

Решение. Увеличение микроскопа $k = \frac{d_0\delta}{F_1F_2}$, $\delta = l - F_1 - F_2$ — длина тубуса микроскопа, отсюда $F_1 = \frac{(l - F_2)d_0}{kF_2 + d_0} = 2,45$ мм.

33.67. Фокусные расстояния объектива и окуляра микроскопа $F_1 = 8$ мм и $F_2 = 5$ см, расстояние между объективом и окуляром $l = 21$ см. Найдите увеличение k микроскопа, если расстояние наилучшего зрения $d_0 = 25$ см.

Ответ: $k = 120$.

Решение. Для ненапряженного глаза $k = \frac{(l - F_1 - F_2)d_0}{F_1F_2} = 95$ (см. задачу 33.66). Если же окончательное изображение рассматривается с расстояния наилучшего зрения, то

$$k = \frac{(l - F_1 - F_2)d_0}{F_1F_2} + \frac{l - F_1}{F_2} = 120.$$

33.68. Ученик привык читать книгу, держа ее на расстоянии $d = 20$ см от глаз. Какова должна быть оптическая сила D очков, которые должен носить ученик, чтобы читать книгу, держа ее на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 25$ см?

Ответ: $D = -1$ дптр.

Решение. Для глаза без очков имеем $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D$, с очками $\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} = D + D_{очк}$. Отсюда $D_{очк} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = -1$ дптр. Пройдя такую линзу, лучи от предмета, находящегося на расстоянии $d_0 = 25$ см, идут так, как если бы они исходили из точек, отстоящих на расстоянии $d = 20$ см от глаза.

34. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

34.1. Вода освещена зеленым светом, для которого длина волны в воздухе 0,5 мкм. Какой будет длина волны в воде? Какой цвет видит человек, открывший глаза под водой?

Ответ: $\lambda = 0,38$ мкм; зеленый.

Решение. Длина волны в воде $\lambda = \frac{v}{\nu}$, где v — скорость электромагнитной волны в воде, ν — частота волны. Частота волны одинакова в любой среде. В воздухе $\nu = \frac{c}{\lambda_0}$, в воде $\lambda = \frac{v}{c}\lambda_0$. Так как $n = \frac{c}{v}$, то $\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = 0,38$ мкм. Человек под водой видит зеленый цвет, так как цвет определяется частотой, а не длиной волны.

34.2. На белом фоне написан текст синими буквами. Через стекло какого цвета нельзя увидеть надпись? Какими будут казаться буквы, если их рассматривать через красное стекло?

Решение. Надпись нельзя увидеть через стекло черного цвета, потому что это стекло поглощает весь спектр белого света. Если буквы рассматривать через красное стекло, то они будут казаться черными, так как красное стекло поглощает все длины волн кроме красных.

34.3. Какими будут казаться красные буквы, если их рассматривать через зеленое стекло?

Решение. Красные буквы, если их рассматривать через зеленое стекло будут казаться черными, так как через зеленое стекло пройдет свет только той частоты, которая соответствует зеленым лучам, а красные лучи поглотятся.

34.4. Через призму смотрят на большую белую стену. Будет ли эта стена казаться окрашеной в цвета спектра?

Решение. От большой белой стены на призму падает рассеянный свет (разные углы падения лучей), соответственно разные углы преломления будут иметь лучи по выходе из призмы. Результирующий свет белый.

34.5. На черную классную доску наклеили горизонтальную полоску белой бумаги. Как окрасятся верхний и нижний края этой полоски, если на нее смотреть сквозь призму, обращенную преломляющим ребром вверх?

Рис. 34.1

Решение. Зависимость показателя преломления от длины волны показана на рис. 34.1. Для коротких длин волн (фиолетовый цвет) показатель преломления больше, чем для длинных (красный цвет). Ход лучей показан на рис. 34.2. Верхняя часть полоски будет окрашена в фиолетовый цвет, а нижняя — в красный.

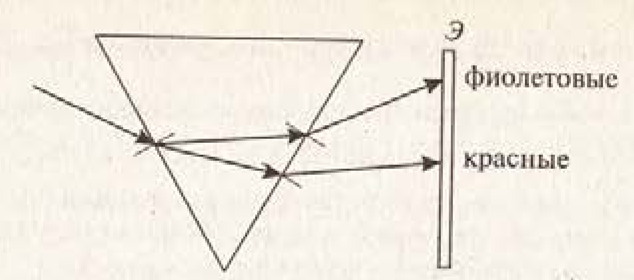


Рис. 34.2

34.6. Луч белого света падает на поверхность воды под углом $\alpha = 60°$. Чему равен угол между направлениями крайних красных и крайних фиолетовых лучей в воде, если показатели преломления их равны соответственно $n_к = 1{,}329$ и $n_ф = 1{,}344$?

Ответ: $\Delta\beta = 0{,}55°$.

Решение. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} = n_к$. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2} = n_ф$. $\sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha}{n_к} = 0{,}6516$;

$\sin\beta_2 = \frac{\sin\alpha}{n_ф} = 0{,}6443$. $\beta_2 = 40{,}1°$; $\beta_1 = 40{,}65°$; $\beta_1 - \beta_2 = \Delta\beta = 0{,}55°$.

34.7. Определите длину волны в воде для зеленого света (в вакууме $\lambda = 560$ нм), если скорость света в воде равна $\frac{3}{4}c$, где c — скорость света в вакууме.

Ответ: $\lambda = 0{,}42$ мкм.

Указание. См. решение задачи 34.1. $\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = 0{,}42$ мкм.

34.8. В некоторую точку пространства попадают когерентные волны с разностью хода 1,2 мкм (длина волны в вакууме $\lambda_0 = 600$ нм). Определите, что будет в этой же точке вследствие интерференции: 1) в воздухе; 2) в воде; 3) в стекле с показателем преломления $n = 1{,}5$?

Ответ: 1) усилятся; 2), 3) ослабятся.

Решение. Оптическая разность хода $\Delta = \delta n$, где δ — геометрическая разность хода, n — показатель преломления среды. Условие интерференционного максимума $\Delta = k\lambda$ $(k = 0, 1, 2, ...)$. Длина волны в среде $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$.

1) $n_1 = 1$, $\delta n = k\lambda_0$, $k = \frac{\delta n_1}{\lambda_0} = 2$. Так как k — целое, то будет усиление волн.

2) $n_2 = 1{,}33$, $k = \frac{\delta n_2}{\lambda} = \frac{\delta n_2^2}{\lambda_0} = 3{,}54$, k — не целое — ослабление волн.

3) $n_3 = 1{,}5$, $k = \frac{\delta n_3^2}{\lambda_0} = 4{,}5$, k — не целое — ослабление волн.

34.9. Сколько длин волн монохроматического света с частотой колебаний $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$ уложится на пути длиной $l = 2{,}4$ мм: 1) в вакууме; 2) в стекле; 3) в алмазе?

Ответ: 1) $N_1 = 4 \cdot 10^3$; 2) $N_2 = 6 \cdot 10^3$; 3) $N_3 = 9{,}7 \cdot 10^3$.

Решение. Количество длин волн $N = \frac{l}{\lambda} = \frac{l \cdot n}{\lambda_0} = \frac{l \cdot n\nu}{c}$.

1) $n_1 = 1$, $N_1 = \frac{l \cdot \nu n_1}{c} = 4 \cdot 10^3$. 2) $n_2 = 1{,}5$, $N_2 = \frac{l \cdot \nu n_2}{c} = 6 \cdot 10^3$.

3) $n_3 = 2{,}43$, $N_3 = \frac{l \cdot \nu n_3}{c} = 9{,}7 \cdot 10^3$.

34.10. Две когерентные световые волны приходят в некоторую точку пространства с разностью хода $\Delta = 2{,}25$ мкм. Какой результат интерференции в этой точке, если свет: а) красный ($\lambda = 750$ нм); б) зеленый ($\lambda = 500$ нм).

Ответ: $k_1 = 3$; $k_2 = 4{,}5$.

Решение. Условие интерференционного максимума $\Delta = k\lambda$ $(k = 0, 1, 2, ...)$. Для красного света $k_1 = \frac{\Delta}{\lambda_1} = 3$ — максимум. Для зеленого света $k_2 = \frac{\Delta}{\lambda_2} = 4{,}5$, число не целое, т. е. выполняется условие интерференционного минимума ($\Delta = (k + 1/2)\lambda$, $k = 0, 1, 2, ...$), $k_2 = k + 1/2 = 4{,}5$.

Примечание: $k \neq 0$, т. к. в условии задачи указано, что имеет место разность хода лучей.

34.11. Два когерентных источника белого света S_1 и S_2 освещают экран AB, плоскость которого параллельна направлению S_1S_2 (рис. 34.3а). Докажите, что на экране в точке O, лежащей на перпендикуляре, опущенном на экран из середины отрезка S_1S_2, соединяющего источники, будет максимум освещенности.

Ответ: Наблюдается максимум.

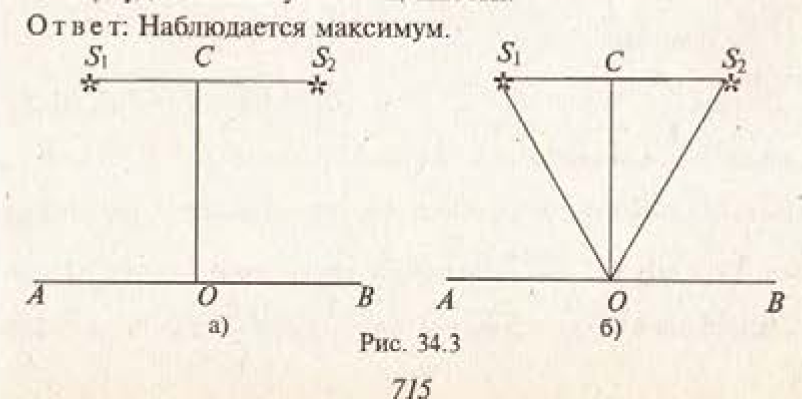


Рис. 34.3

Решение. Для наблюдения на экране максимума освещенности, оптическая разность хода $\Delta = S_2O - S_1O = k\lambda$, где $k = 0, 1, 2, ...$ (рис. 34.3б). Из треугольников S_1OC и S_2OC: $S_1C = S_2C$, OC — общая сторона, т. е. треугольники равны и $S_1O = S_2O$. В таком случае оптическая разность хода $\Delta = S_2O - S_1O = 0$, а это значит, что $k = 0$ и для когерентных источников в точке O наблюдается интерференционный максимум.

34.12. Расстояние S_2C (рис. 34.3а) больше расстояния S_1C на 900 нм. Что будет наблюдаться в точке C, если источники имеют одинаковую интенсивность и излучают свет с частотой $5\cdot10^{14}$ Гц?

Ответ: Полное гашение света.

Решение. Условие интерференционного максимума $\Delta = S_2C - S_1C = k\lambda$, $k = 0, 1, 2, ...$; $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $\lambda = \frac{c}{\nu}$, тогда $\Delta = \frac{kc}{\nu}$, а $k = \frac{\Delta\cdot\nu}{c} = 1{,}5$; k — не целое, выполняется условие интерференционного минимума. Принимая во внимание, что источники имеют одинаковую интенсивность, ясно, что будет наблюдаться полное гашение света.

34.13. Два когерентных источника S_1 и S_2 испускают монохроматический свет с длиной волны 560 нм. Определите расстояние между двумя соседними интерференционными максимумами на экране, если расстояние между источниками $S_1S_2 = d = 10^{-4}$ м, а расстояние до экрана $L = 1$ м.

Рис. 34.4

Ответ: $x = 5{,}6$ мм.

Решение. В произвольной точке экрана будет наблюдаться интерференционный максимум при выполнении условия $L_2 - L_1 = k\lambda$. Из рис. 34.4 видно, что

$$L_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,$$

$L_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$, тогда $L_2^2 - L_1^2 = 2xd$; $(L_2 - L_1)(L_2 + L_1) = 2xd$; В случае, когда $x \ll L$ можно считать приблизительно $L_2 + L_1 \approx 2L$, тогда $L_2 - L_1 = \frac{xd}{L}$. Используя условие максимума интерференции, получаем $\frac{xd}{L} = m\lambda$, $x_m = \frac{mL\lambda}{d}$ — положение m-го максимума. Расстояние между соседними максимумами $\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda L}{d} = 5{,}6\cdot10^{-3}$ м $= 5{,}6$ мм.

34.14. Разность хода интерферирующих волн от двух когерентных источников света равна $\Delta r = 0{,}4\lambda$. Определите разность фаз этих волн.

Ответ: $\Delta\varphi = 0{,}8\pi$ рад.

Решение. Разность фаз между волнами в некоторой точке, где встречаются волны, равна $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r = 0{,}8\pi$ рад.

34.15. Разность хода интерферирующих лучей белого света ($0{,}76$ мкм $\le \lambda \le 0{,}4$ мкм) $\Delta = 2$ мкм. Найдите все длины волн видимого излучения, которые будут: а) максимально усилены; б) максимально ослаблены.

Решение. а) Максимально усилены волны, для которых выполняется условие максимума интерференции $\Delta = k\lambda$, откуда $\lambda = \frac{\Delta}{k}$ ($k \ne 0$, т. к. имеет место разность хода лучей). При $k = 1, 2, 3, ...$ определим λ, которые попадут в заданный интервал длин волн $0{,}76$ мкм $\le \lambda \le 0{,}4$ мкм. Это $\lambda_3 = \frac{2}{3}$ мкм $= 0{,}67$ мкм, $\lambda_4 = 0{,}5$ мкм, $\lambda_5 = 0{,}4$ мкм.

б) Максимально ослаблены волны, для которых выполняется условие минимума интерференции $\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, откуда $\lambda = \frac{2\Delta}{2k+1}$. Очевидно, что в заданный интервал попадает лишь волна с $k = 3$, это $\lambda = 0{,}555$ мкм. Следовательно, эта волна будет максимально ослаблена.

34.16. Экран освещается двумя точечными когерентными источниками, колеблющимися в одной фазе и находящимися на расстоянии $l = 0{,}5$ мм друг от друга. Источники дают монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Расстояние от плоскости источников света до экрана $L = 1{,}5$ м (рис. 34.5). Определите расстояние первого и второго интерфереционных максимумов от центрального максимума; расстояние между двумя соседними максимумами.

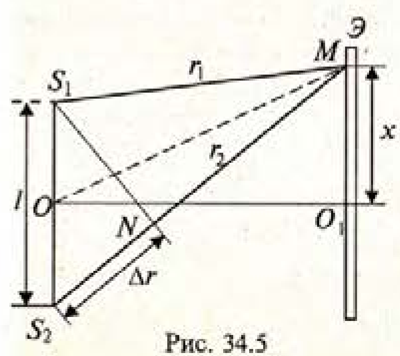


Рис. 34.5

Ответ: $x_1 = \pm1{,}5\cdot10^{-3}$ м; $x_2 = \pm3\cdot10^{-3}$ м; $\Delta x = 1{,}5\cdot10^{-3}$ м.

Решение. Разность фаз между точками, приходящими в любую точку экрана, $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r$. Из подобия треугольников OO_1M и S_2NS_1 $\frac{S_1S_2}{S_2N} = \frac{OM}{O_1M}$. Так как l и x намно-

го меньше L, то $\frac{l}{\Delta r} = \frac{L}{x}$, откуда $\Delta r = \frac{l}{L}x$.

Тогда $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{l}{L}x = \pm 2k\pi$. Откуда, $x = \pm k\frac{\lambda L}{l}$, где $k = 0, 1, 2, ...$ Центральный интерференционный максимум будет при $k = 0$, т. е. он проходит через точку O_1. Для первого максимума $k = 1$, для второго $k = 2$, т. е. $x_1 = \pm\frac{\lambda L}{l} = \pm 1{,}5\cdot 10^{-3}$ м, $x_2 = \pm\frac{2\lambda L}{l} = \pm 3\cdot 10^{-3}$ м. Расстояние между соседними максимумами

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \left|\pm(k+1)\frac{\lambda L}{l} - \left(\pm k\frac{\lambda L}{l}\right)\right| = \frac{\lambda L}{l} = 1{,}5\cdot 10^{-3}\text{ м}.$$

34.17. На пути одного из интерферирующих лучей помещена тонкая стеклянная пластинка, вследствие чего центральная светлая полоса смещается в положение, первоначально занимаемое шестой светлой полосой (не считая центральной). Луч падает на пластинку перпендикулярно. Показатель преломления пластинки $n = 1{,}6$, длина волны $\lambda = 6{,}6\cdot 10^{-7}$ м. Какова толщина пластинки?

Ответ: $d = 6{,}6\cdot 10^{-6}$ м.

Решение. В результате внесения стеклянной пластинки разность хода между интерферирующими лучами изменится на величину $\Delta = nd - d = d(n-1)$, где d — толщина пластинки, n — показатель преломления материала пластинки. С другой стороны произошло смещение на k полос. Следовательно, добавочная разность хода, введенная пластинкой равна $k\lambda$. Таким образом, $d(n-1) = k\lambda$, откуда $d = \frac{k\lambda}{n-1} = 6{,}6\cdot 10^{-6}$ м.

34.18. На пленку под углом $\alpha = 52°$ ($n = 1{,}4$) падает белый свет. При какой толщине пленка в проходящем свете будет казаться красной? Длина волны красного света $\lambda = 6{,}7\cdot 10^{-7}$ м.

Ответ: $d = 2{,}89\cdot 10^{-5}$ см.

Решение. Условие максимума интерференции в проходящем свете $2dn\cos\beta = k\lambda$, $(k = 0, 1, 2, ...)$, β — угол преломления. $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$, т. к. $\frac{\sin\lambda}{\sin\beta} = n$. При $k = 1$ имеем

$$d = \frac{\lambda}{2n\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = 2{,}89\cdot 10^{-5}\text{ см}.$$

34.19. В пленках какой толщины пропадают интерференционные линии при освещении светом с длиной волны $6\cdot 10^{-7}$ м? Показатель преломления $n = 1{,}5$.

Ответ: $d = 10^{-7}$ м.

Решение. Условие минимума интерференционной картины в проходящем свете $2dn\cos r = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, где r — угол преломления. Интерференционные полосы отсутствуют при $k = 0$, $\cos r = 1$, $d = \frac{\lambda}{2\cdot 2n} = \frac{\lambda}{4n} = 10^{-7}$ м.

34.20. На мыльную пленку падает нормально пучок лучей белого света. Какова наименьшая толщина пленки, если в отраженном свете она кажется зеленой ($\lambda = 532$ нм)?

Ответ: $d_{\min} = 0{,}1$ мкм.

Указание. Аналогично предыдущей задаче $d_{\min} = \frac{\lambda}{4n} = 0{,}1$ мкм.

34.21. На тонкий стеклянный клин ($n = 1{,}5$) падает нормально пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 698$ нм. Найдите угол клина, если расстояние между интерференционными полосами $\Delta x = 2$ мм.

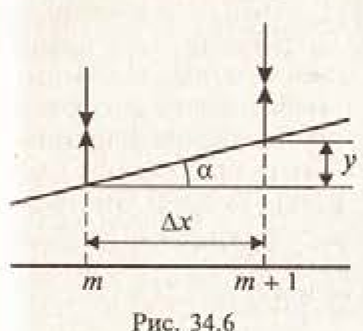


Рис. 34.6

Ответ: $\alpha = 24''$.

Решение. Угол клина $\alpha \approx tg\alpha = \frac{y}{\Delta x}$ (рис. 34.6). Оптическая разность хода $\Delta = 2y\cdot n$. С другой стороны,

$$\Delta = \left[2(m+1)+1)\frac{\lambda}{2} - (2m+1)\frac{\lambda}{2}\right] = \lambda,$$

$(m = 0, 1, 2, ...)$. Тогда $2y\cdot n = \lambda$, $y = \frac{\lambda}{2n}$, $\alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x} = 5\cdot 10^{-5}$ рад $= 24''$.

34.22. Монохроматический свет падает нормально на поверхность воздушного клина, причем расстояние между интерференционными полосами $\Delta x_1 = 0{,}4$ мм. Определите расстояние Δx_2 между интерференционными полосами, если пространство между пластинками, образующими клин, заполнить прозрачной жидкостью с показателем преломления $n_2 = 1{,}33$. ($n_1 = 1$ — воздух.)

Ответ: $\Delta x_2 = 0{,}3$ мм.

Решение. $\alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x}$ (см. задачу 34.21), $\alpha_1 = \alpha_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$,

$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{n_2}{n_1}$, $\Delta x_2 = \frac{n_1}{n_2}\Delta x_1 = 0{,}3$ мм.

34.23. Воздушный клин образован двумя плоскопараллельными пластинами, на которые нормально падает монохроматический свет

с длиной волны λ = 500 нм. Определите угол α между пластинами, если ширина интерференционных полос, наблюдаемая в отраженном свете, составляет $\Delta x = 5\cdot10^{-4}$ м.

Ответ: $\alpha = 1'40''$.

Указание. См. решение задачи 34.21. Для малых углов $\alpha = \mathrm{tg}\alpha$, где $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\lambda}{2n\Delta x}$, $n = 1$. Тогда $\alpha = \dfrac{\lambda}{2\Delta x} = 5\cdot10^{-4}$ рад $= 1'40''$.

34.24. На стеклянный клин (рис. 34.7) нормально его грани падает монохроматический свет с длиной волны λ = 0,66 мкм. Число интерференционных полос на 1 см $N = 10$. Определите преломляющий угол клина.

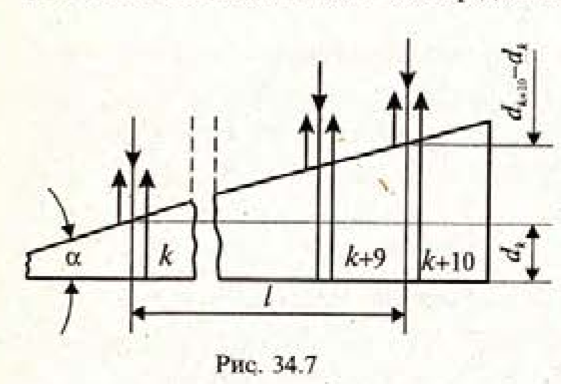


Рис. 34.7

Ответ: $\alpha = 2{,}2\cdot10^{-4}$ рад $= 45{,}3''$.

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти пучки когерентны, и поэтому наблюдается интерференционная картина. Интерференционные полосы наблюдаются при малых углах клина, поэтому отраженные пучки света 1 и 2 будут практически параллельны. Условие минимума для интерференции (темные полосы) $\Delta = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Разность хода $\Delta = 2dn\cos\beta + \dfrac{\lambda}{2}$, где β — угол преломления. Согласно условию, угол падения равен нулю, следовательно, и угол преломления равен нулю, а $\cos\beta = 1$. Величина $\dfrac{\lambda}{2}$ — добавочная разность хода, возникающая при отражении волн от оптически более плотной среды. Приравняв два выражения для Δ, получим $2d_k n = k\lambda$.

Очевидно, $\alpha = \dfrac{d_{k+10} - d_k}{l} = \dfrac{5\lambda}{nl} = 2{,}2\cdot10^{-4}$ рад $= 45{,}3''$.

34.25. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны λ = 0,6 мкм, падающим нормально. Найдите толщину воздушного слоя между линзой и стеклянной пластинкой в том месте, где наблюдается пятое темное кольцо в отраженном свете.

Ответ: $d = 1{,}5$ мкм.

Решение. Толщина слоя d между линзой и пластинкой связана с соответствующим радиусом наблюдаемого кольца $d = \dfrac{r_k^2}{2R}$, где R — радиус кривизны линзы. Радиус темного кольца Ньютона в отраженном свете $r_k = \sqrt{kR\lambda}$. Тогда $d = \dfrac{k\lambda}{2} = 1{,}5$ мкм.

34.26. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны 4 мм и 4,38 мм соответственно. Радиус кривизны линзы 6,4 м. Найдите порядковые номера колец и длину волны падающего света.

Ответ: $k = 5$; $k + 1 = 6$; $\lambda = 5\cdot10^{-7}$ м.

Решение. Радиус темного кольца в отраженном свете $r_k = \sqrt{kR\lambda}$.

Тогда $r_{k+1} = \sqrt{(k+1)R\lambda}$. $\dfrac{r_k^2}{r_{k+1}^2} = \dfrac{k}{k+1} = 0{,}83$. Откуда $k = 5$, тогда $k + 1 = 6$. Длина волны $\lambda = \dfrac{r_k^2}{kR} = 5\cdot10^{-7}$ м.

34.27. В установке для наблюдения колец Ньютона пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью. Определите показатель преломления жидкости, если радиус третьего светлого кольца равен 3,65 м. Наблюдение ведется в проходящем свете. Радиус кривизны линзы 10 м. Длина волны света $5{,}89\cdot10^{-5}$ см.

Ответ: $n = 1{,}33$.

Решение. Условие максимума в проходящем свете $2dn = k\lambda$. Толщина слоя между линзой и пластинкой $d = \dfrac{r_k^2}{2R}$. Тогда $\dfrac{nr_k^2}{R} = k\lambda$, а $n = \dfrac{k\lambda R}{r_k^2} = 1{,}33$.

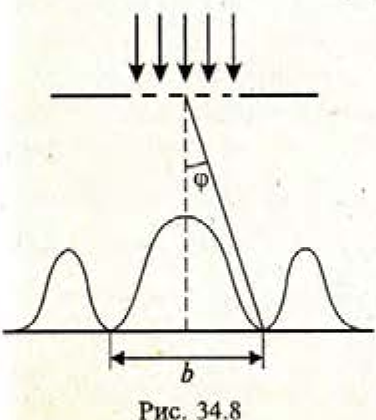


Рис. 34.8

34.28. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны λ = 0,5 мкм. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели. Определите расстояние l от щели до экрана, если ширина цент-

рального дифракционного максимума $b = 1$ см.

Ответ: $l = 1$ м.

Решение. Ширина центрального максимума равна расстоянию между минимумами первого порядка. Условие минимума $a\sin\varphi = \pm m\lambda$, $m = 1$, $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, $\varphi = \arcsin\frac{\lambda}{a}$. Из рис. 34.8 $b = 2l\,\mathrm{tg}\varphi$, откуда $l = \frac{b}{2\mathrm{tg}\varphi} = 1$ м.

34.29. Найдите наибольший порядок спектра m_{max} желтой линии натрия с длиной волны $\lambda = 589$ мкм, если период дифракционной решетки $d = 2$ мкм.

Ответ: $m_{max} = 3$.

Решение. $d\sin\varphi = m\lambda$, $d\sin\varphi_{max} = m_{max}\lambda$, $\sin\varphi_{max} = 1$, $m_{max} = \frac{d}{\lambda} = 3$.

34.30. На дифракционную решетку в направлении нормали к ее поверхности падает монохроматический свет. Период решетки 2 мкм. Дифракционный максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка в случае красного ($\lambda_1 = 0{,}7$ мкм) и фиолетового ($\lambda_2 = 0{,}45$ мкм) света?

Ответ: $m_1 = 2$; $m_2 = 4$.

Решение. $d\sin\varphi = m\lambda$, $m_1 = \frac{d}{\lambda_1} = 2{,}85$, $m_2 = \frac{d}{\lambda_2} = 4{,}44$. Так как максимум должен быть целым числом, то $m_1 = 2$; $m_2 = 4$.

34.31. Дифракционная решетка имеет 400 штрихов на 1 мм. На решетку падает красный свет с длиной волны 650 нм. Под каким углом виден первый максимум? Сколько всего максимумов даст эта решетка?

Ответ: $\varphi = 15°$; $N = 7$.

Решение. Постоянная дифракционной решетки $d = \frac{1}{n}$, где n — число штрихов на единице длины дифракционной решетки. Условие максимума $d\sin\varphi = m\lambda$, где m — порядок максимума. $\sin\varphi = \frac{\lambda}{d} = \lambda n$, $\varphi = \arcsin\lambda n = 15°$. Для определения числа максимумов, даваемых решеткой, находим m_{max} при условии $\varphi_{max} = 90°$. $m_{max} = \frac{d\sin 90°}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{\lambda n} = 3{,}8$. Число m — целое, т. е. $m_{max} = 3$. Тогда $N = 2\,m_{max} + 1 = 7$.

34.32. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия ($\lambda = 6{,}7\cdot10^{-5}$ см) спектра второго порядка.

Ответ: $\lambda_1 = 4{,}46\cdot10^{-7}$ м.

Решение. Условие максимума дифракционной решетки с учетом наложения двух линий дает $m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$, откуда

$$\lambda_1 = \frac{m_2\lambda_2}{m_1} = 4{,}46\cdot10^{-7}\text{ м.}$$

34.33. Определите число штрихов на 1 см дифракционной решетки, если при нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 600$ нм решетка дает первый максимум на расстоянии $l = 3{,}3$ см от центрального. Расстояние от решетки до экрана $L = 110$ см.

Ответ: $n = 500$.

Решение. $d\sin\varphi = m\lambda$. Для малых углов $\sin\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{l}{L}$, тогда $d\frac{l}{L} = m\lambda$. Учитывая, что $d = \frac{1}{n}$, а $m = 1$, получим $n = \frac{l}{L\lambda} = 500$.

34.34. Дифракционная решетка содержит 120 штрихов на 1 мм. Найдите длину волны монохроматического света, падающего на решетку, если угол между двумя спектрами первого порядка равен 8°.

Ответ: $\lambda = 5{,}8\cdot10^{-7}$ м.

Решение. Из условия задачи ясно, что угол дифракции $\varphi = 4°$. $d\sin\varphi = m\lambda$, $m = 1$, $d = \frac{1}{n}$, $\frac{\sin\varphi}{n} = m\lambda$; $\lambda = \frac{\sin\varphi}{n} = 5{,}8\cdot10^{-7}$ м.

34.35. Какова ширина спектра всего первого порядка (длины волн заключаются в пределах 0,38 Σ 0,76 мкм), полученного на экране, отстоящем на 3 м от дифракционной решетки с периодом 0,01 мм?

Ответ: $\Delta b = 0{,}342$ м.

Решение. Ширина спектра первого порядка — это расстояние между минимумами второго и первого порядков. $\Delta b = b_2 - b_1$. $d\sin\varphi_1 = m_1\lambda_1$, $d\sin\varphi_2 = m_2\lambda_2$. Но $\sin\varphi_1 = \frac{b_1}{L}$, а $\sin\varphi_2 = \frac{b_2}{L}$, тогда

$$\Delta b = \frac{(m_2\lambda_2 - m_1\lambda_1)L}{d} = 0{,}342\text{ м.}$$

34.36. Чему равна постоянная дифракционной решетки, если для того, чтобы увидеть красную линию ($\lambda = 0{,}7$ мкм) в спектре третьего порядка, зрительную трубку пришлось установить под углом $\varphi = 48°36'$ к оси коллиматора? Сколько штрихов нанесено на 1 см длины этой решетки? Свет падает на решетку нормально.

Ответ: $d = 2{,}8 \cdot 10^{-4}$ см; $n = 3570$.

Решение самостоятельное.

34.37. На каком расстояние от дифракционной решетки нужно поставить экран, чтобы расстояние между нулевым максимумом и спектром четвертого порядка было равно $l = 50$ мм для света с длиной волны $\lambda = 500$ нм? Постоянная дифракционной решетки $d = 0{,}02$ мм.

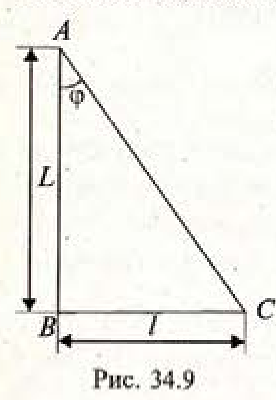


Рис. 34.9

Ответ: $L = 0{,}5$ м.

Решение. $d\sin\varphi = m\lambda$, откуда $\sin\varphi = \frac{m\lambda}{d}$.

Из рис. 34.9 видно, что $\sin\varphi = \frac{l}{\sqrt{l^2 + L^2}}$. Из сравнения двух последних уравнений, получим $L = \frac{1}{m\lambda}\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2} = 0{,}5$ м.

ОПТИКА

Уровень II

1. На каком минимальном расстоянии могли бы быть расположены на Луне два ярких источника света, чтобы их можно было видеть с Земли в телескоп отдельно? Фокусное расстояние объектива телескопа $F_1 = 8$ м, окуляра $F_2 = 1$ см. Глаз человека может видеть отдельно два предмета, которые наблюдают под углом не менее $\varphi_0 = 0{,}001$ рад. Расстояние от Земли до Луны $r = 3{,}8 \cdot 10^8 =$ м.

Ответ: $l = 475$ м.

Решение. В телескопе фокальная плоскость объектива совпадает с фокальной плоскостью окуляра. Параллельный пучок света, пройдя через такую систему линз, остается параллельным, но образует уже другой угол с осью трубы. Угловое увеличение телескопа $k = \frac{F_1}{F_2}$. Угол, под которым глаз видит отрезок l между двумя яркими источниками, $\varphi = \frac{l}{r}$. Так как $l = r\varphi$, а $k\varphi = \varphi_0$, то $l = \frac{r\varphi_0 F_2}{F_1} = 475$ м.

2. Утром через маленькое отверстие в шторе, закрывающей окно, на противоположную стену падает луч солнечного света. Оцените, на какое расстояние за минуту переместится пятно света по стене. Расстояние до стены $L = 5$ м.

Ответ: $l = 2$ см.

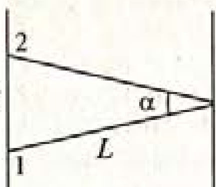


Рис. 1

Решение. Угол между начальным и конечным положениями луча равен $\alpha = \omega t = \frac{2\pi t}{T}$, где ω — угловая скорость, T — период вращения Земли. Путь, который пройдет пятно за время t, равен $l = \alpha L = 2\pi t L/T = 2$ см (рис. 1).

3. В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиусом $r_1 = 5$ мкм при содержании массы вещества $m_1 = 0{,}04$ г в 1 м³ воздуха дальность видимости составляет $l_1 = 50$ м. Сколько вещества в 1 м³ воздуха распыляется другим источником завесы, который создает частицы радиусом $r_2 = 10$ мкм, если видимость сокращается до $l_2 = 20$ м?

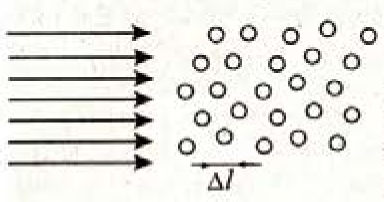


Рис. 2

Ответ: $m_2 = 0{,}2$ г/м³.

Решение. Рассмотрим слой воздуха с дымом на пути светового пучка (рис. 2). Выберем Δl настолько малым, чтобы в пределах этого слоя практически не было затемнения одних частиц другими. Такой слой поглотит долю света, определяемую поперечным сечением ΔS всех частиц, находящихся в этом слое. В расчете на единицу поперечного сечения пучка получим $\Delta S = N\Delta l\pi r^2 = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}\Delta l\pi r^2 = \frac{3m\Delta l}{4r\rho}$, где N — число частиц в единице объема, ρ — плотность распыленного вещества. Записав данное соотношение для двух рассматриваемых случаев, найдем отношение толщины слоев, в которых поглощается одинаковая доля света $\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{m_2 r_1}{m_1 r_2}$. Дальность видимости связана с выбранным Δl соотношением $l_1 = n\Delta l_1$ и $l_2 = n\,\Delta l_2$, где n — показатель преломления среды. Очевидно, $\frac{l_1}{l_2} = \frac{n\Delta l_1}{n\Delta l_2} = \frac{m_2 r_1}{m_1 r_2}$, откуда $m_2 = m_1\frac{r_2 l_1}{r_1 l_2} = 0{,}2$ г/м³.

4. На торец стеклянного стержня падает свет под углом α. Каким должен быть наименьший показатель преломления стекла, чтобы свет, вошедший в стержень, не мог выйти через его боковую стенку независимо от угла α падения луча (рис. 3)?

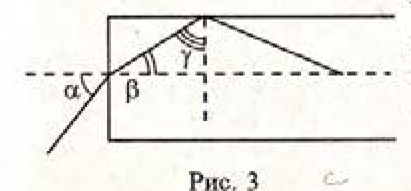


Рис. 3

Ответ: $n \geq \sqrt{2}$.

Решение. Угол преломления β определяется законом преломления $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$. (1)

На боковую поверхность луч должен падать под углом γ не меньше предельного $\left(\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \beta\right)$, $\sin\gamma = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta \geq \dfrac{1}{n}$. (2)

Максимальное значение β при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ согласно (1) равно $\sin\beta = \dfrac{1}{n}$. (3)

Возведем в квадрат (2) и (3) и сложим, тогда $1 \geq \dfrac{2}{n^2}$, откуда $n \geq \sqrt{2}$.

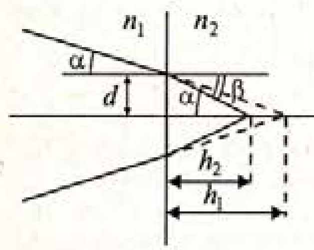


Рис. 4

5. На плоскую границу раздела оптических сред с показателями преломления n_1 и n_2 падает узкий сходящийся пучок света (рис. 4). Если бы $n_1 = n_2$, то точка схождения была бы на расстоянии h_1 от границы. Определите действительное расстояние h_2 точки схождения лучей от границы при $n_2 \neq n_1$. (На рис. 4 $n_1 > n_2$).

Ответ: $h_2 = h_1 \dfrac{n_2}{n_1}$.

Решение. Пучок света узкий, лучи падают на поверхность под малыми углами, тогда закон преломления $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n_2}{n_1}$ можно записать в виде $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{n_2}{n_1}$, $\beta = \alpha\dfrac{n_1}{n_2}$. Из рис. 4 очевидно, что $d = h_2\beta = h_1\alpha$, откуда $h_2 = h_1\dfrac{n_2}{n_1}$.

6. Какие очки следует прописать человеку, если в воде он видит нормально?

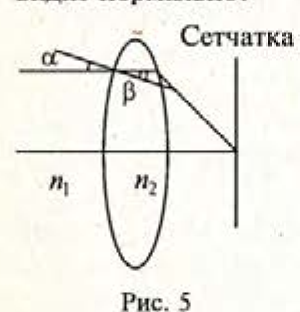


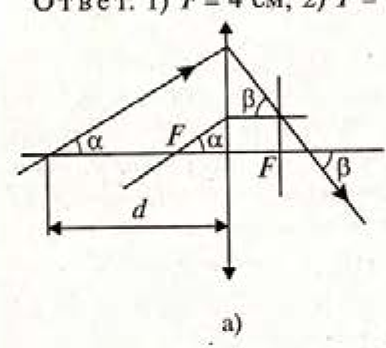
Рис. 5

Решение. Нарисуем ход луча от бесконечно удаленного источника через глаз. Этот луч испытывает два преломления на двух поверхностях хрусталика (рис. 5). Согласно закону преломления $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n_2}{n_1}$, где n_1 — показатель преломления первой среды (воды или воздуха), n_2 — абсолютный показатель преломления вещества хрусталика. При уменьшении n_1 (замене воды на воздух) угол β уменьшается. Это означает, что после преломления на входной

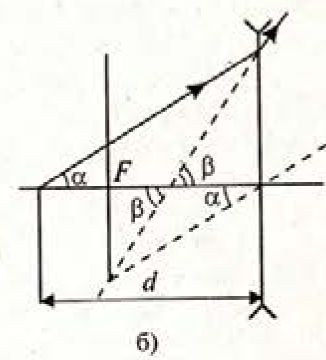
поверхности хрусталика в том случае, когда перед глазом воздух, лучи идут ниже, чем в том случае, когда перед глазом вода. Поэтому, если в воде изображение удаленного предмета при ненапряженном глазе образуется на сетчатке, то в воздухе изображение этого предмета при ненапряженном глазе будет получаться перед сетчаткой. Человек близорук.

7. Падающий на тонкую линзу луч пересекает главную оптическую ось под углом $\alpha = 4°$ на расстоянии $d = 12$ см от линзы и выходит из нее под углом $\beta = 8°$ к главной оптической оси. Найдите фокусное расстояние линзы.

Ответ: 1) $F = 4$ см; 2) $F = 12$ см.



а)



б)

Рис. 6

Решение. Возможны два случая.

1) Линза собирающая (рис. 6а). Из построения лучей получим $d\,\mathrm{tg}\alpha = F\,\mathrm{tg}\alpha + F\,\mathrm{tg}\beta$. Отсюда следует $F = \dfrac{d}{1 + \mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha} = 4$ см.

2) Линза рассеивающая. Построение показано на рис. 6б.

$F\,\mathrm{tg}\beta = F\,\mathrm{tg}\alpha + d\,\mathrm{tg}\alpha$, откуда $F = \dfrac{d}{\mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha - 1} = 12$ см, т. е. луч выходит из фокуса линзы.

8. Интерферометр Рэлея используется для точного измерения показателя преломления газов. Для этого на пути одного из интерферирующих лучей ставится кювета Г прямоугольной формы и длиной $L = 10$ см с исследуемым газом, а на пути другого — компенсатор *K*, с помощью которого добиваются, чтобы в центре плоскости наблюдения *P* разность хода между лучами равнялась нулю (рис. 7). Чему равен показатель преломления газообразного азота, если после замены в кювете воздуха на азот интерференционная картинка сместилась ровно на одну полосу в сторону, соответствующую увеличению показателя преломления? Показатель преломления воздуха $n_в = 1{,}000292$. Измерения проводились на длине волны $\lambda = 500$ нм.

Ответ: $n_а = 1{,}000297$.

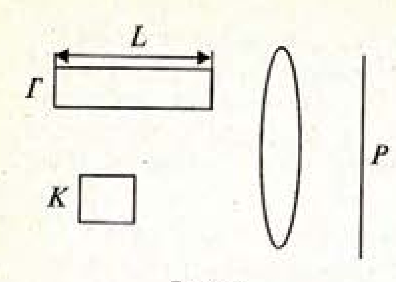


Рис. 7

Решение. В среде с показателем преломления n длина волны становится в n раз меньше, т. е. в воздухе $\lambda_B = \frac{\lambda}{n_B}$, а в азоте $\lambda_a = \frac{\lambda}{n_a}$, где λ — длина волны в вакууме. На длине кюветы L укладывается число длин волн: для воздуха $N_в = L/\lambda_в = Ln_в/\lambda$; для азота $N_а = Ln_а/\lambda$.

При замене воздуха на азот $N_а - N_в = 1$, $Ln_а - Ln_в = \lambda$, откуда $n_а = n_в + \lambda/L = 1{,}000297$.

9. ____ Два плоских зеркала образуют двухгранный угол $\gamma = 178°$. На расстоянии $d = 8$ см от линии соприкосновения зеркал и на одинаковом расстоянии от каждого из них находится точечный источник света S. Определите расстояние между мнимыми изображениями источника в зеркалах.

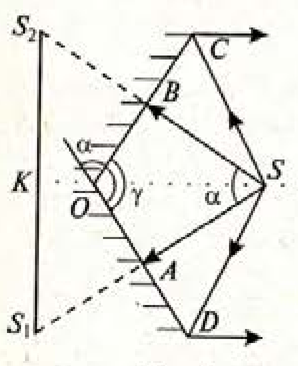


Рис. 8

Ответ: $S_1S_2 = 0{,}0056$ м.

Решение. Построим изображение в каждом из зеркал (рис. 8). Для этого воспользуемся двумя парами лучей SB и SA, перпендикулярных к зеркалу, и по одной паре лучей SC и SD — косых к зеркалам. Полученные изображения S_1 и S_2 будут мнимыми. Обозначим расстояние $OS = d$, а $\angle ASB = \alpha$, тогда из ΔASO следует $AS = d\cos(\alpha/2)$.

Учитывая, что $AS = AS_1$, находим $S_1K = SS_1\sin(\alpha/2) = 2AS\sin(\alpha/2) = 2d\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2) = d\sin\alpha$.

Четырехугольник $SBOA$ выпуклый, поэтому сумма внутренних углов равна 360° или $\gamma + \alpha + 90° + 90° = 360°$, откуда $\alpha = 180° - \gamma$, тогда $S_1S_2 = 2d\sin(180° - \gamma)$, $S_1S_2 = 2\cdot 0{,}08\sin(180° - 178°) = 0{,}0056$ м.

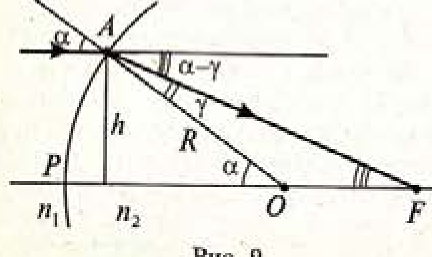


Рис. 9

10. ____ Вывести формулу оптической силы сферической границы раздела между средами с показателями преломления n_1 и n_2. Радиус кривизны поверхности R.

Решение. Точку A выбираем достаточно близко к оптической

оси так, что $h << R$, тогда (рис. 9) $\sin\alpha \approx \alpha = \frac{h}{R}$. (1)

Из закона преломления следует $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}$; или $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{n_2}{n_1}$;

$\gamma = \frac{n_1}{n_2}\alpha$. $\angle AFP = \alpha - \gamma = \alpha\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$. (2)

PF — фокусное расстояние сферической границы раздела F_1;

$\frac{h}{F_1} = \mathrm{tg}(\alpha - \gamma) = \alpha - \gamma$. (3)

Тогда из (3) с учетом (1) и (2) получаем $\frac{h}{F_1} = \frac{h}{R}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$;

$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$. Если луч падает с вогнутой стороны поверхности, то $\frac{1}{F_1} = -\frac{1}{R}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$. Для обратного перехода $\frac{1}{F_1} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)$.

11. ____ Вывести формулу оптической силы тонкой двояковыпуклой линзы, ограниченной сферическими поверхностями R_1 и R_2. Показатель преломления среды n_1, линзы — n_2.

Решение. Оптическая сила тонкой линзы равна сумме оптических сил двух сферических поверхностей (см. задачу 10).

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{R_1}\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) - \frac{1}{R_2}\left(1 - \frac{n_2}{n_2}\right) = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

12. ____ Вывести формулу оптической силы тонкой линзы для случая, изображенного на рис. 10.

Рис. 10

Решение. а) Для падения лучей слева

$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{R_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$;

$\frac{1}{F_2} = -\frac{1}{R_2}\left(1 - \frac{n_2}{n_3}\right) = \frac{1}{R_2}\left(\frac{n_2}{n_3} - 1\right)$. $\frac{1}{F_1}$ приведем к среде n_3 (см. задачу 10):

$\frac{1}{F_1'} = \frac{n_2}{n_3}\frac{1}{F_1} = \frac{1}{R_1}\left(\frac{n_2 - n_1}{n_3}\right)$.

Оптическая сила линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{n_3}\left(\frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2}\right)$.

б) Лучи падают справа: $\frac{1}{F_1} = \frac{1}{R_2}\left(1 - \frac{n_3}{n_2}\right)$; $\frac{1}{F_1'} = \frac{n_2}{n_1}\frac{1}{F} = \frac{1}{R_2}\frac{(n_2 - n_3)}{n_1}$;

$$\frac{1}{F_2} = -\frac{1}{R_1}\left(1-\frac{n_2}{n_1}\right) = \frac{1}{R_1}\frac{(n_2-n_1)}{n_1};\quad \frac{1}{F} = \frac{1}{n_1}\left(\frac{n_2-n_1}{R_1}+\frac{n_2-n_3}{R_2}\right).$$

13. Плосковыпуклая стеклянная линза погружается в воду так, что одна из ее поверхностей граничит с водой, а вторая — с воздухом. На линзу со стороны воздуха нормально падает пучок параллельных лучей. Вычислить глубину, на которой они сойдутся, если $R = 20$ см и показатель преломления стекла $n_2 = 1{,}6$. Зависит ли глубина от того, какой стороной погружена линза в воду?

Решение. См. задачу 12.

Глубину находим, как фокусное расстояние по формуле $\frac{1}{F} = \frac{1}{n_3}\left(\frac{n_2-n_1}{R_1}+\frac{n_2-n_3}{R_2}\right)$, откуда $F = \dfrac{n_3}{\dfrac{n_2-n_1}{R_1}+\dfrac{n_2-n_3}{R_2}}$. Здесь $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}6$; $n_3 = 1{,}33$.

При погружении в воду выпуклой стороны $R_1 = \infty$; $R_2 = 20$ см, тогда $F_1 = 98{,}5$ см. При погружении плоской стороны $R_1 = 20$ см, $R_2 = \infty$, $F_2 = 44{,}3$ см.

14. При нормальном падении света на бипризму Френеля (рис. 11) пучки света, преломленные каждой из половинок бипризмы, интерферируют между собой. На каком максимальном расстоянии от бипризмы еще будет наблюдаться интерференционная картина? Расстояние между вершинами бипризмы $S = 4$ см, показатель преломления материала бипризмы $n = 1{,}4$, преломляющий угол $\alpha = 0{,}001$ рад.

Ответ: $L = 50$ м.

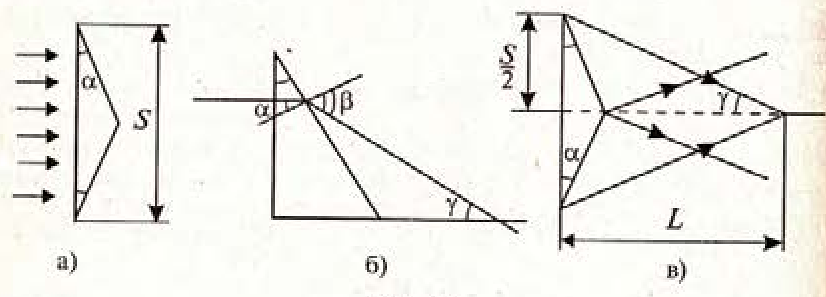


Рис. 11

Решение. При прохождении луча через призму (рис. 11) на ее задней грани будет происходить преломление луча по закону $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}$. Отсюда получаем $\sin\beta = n\sin\alpha$. Так как угол α очень мал, можно записать $\beta = n\alpha$.

Из построения (рис. 11б) видно, что $\gamma = \beta - \alpha = (n-1)\alpha$.

Интерференционная картина будет наблюдаться в области перекрытия преломленных пучков от обеих половинок бипризмы (рис. 11в). Максимальное расстояние, на котором это еще происходит, равно $L = \frac{S/2}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{S}{2\gamma} = \frac{S}{2(n-1)\alpha} = 50$ м.

15. Тонкая двояковыпуклая линза получена из двух часовых стекол, пространство между которыми заполнено водой. Оптическая сила такой линзы $D_1 = 4$ дптр. Определите оптическую силу D_2 тонкой плоско-вогнутой линзы (рис. 12), полученной из одного такого часового стекла, которое касается дна тонкостенного цилиндрического прозрачного сосуда, если пространство между часовым стеклом и сосудом также заполнено водой.

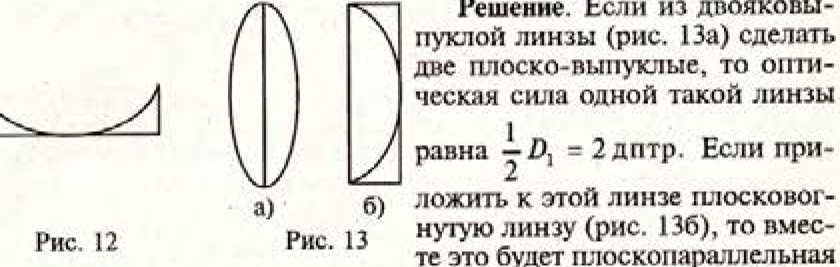


Рис. 12 Рис. 13

Решение. Если из двояковыпуклой линзы (рис. 13а) сделать две плоско-выпуклые, то оптическая сила одной такой линзы равна $\frac{1}{2}D_1 = 2$ дптр. Если приложить к этой линзе плосковогнутую линзу (рис. 13б), то вместе это будет плоскопараллельная пластинка, оптическая сила которой равна нулю. Это значит $D_2 = 2$ дптр.

16. На дне сосуда находится небольшой предмет, прикрытый сверху воронкой с углом при вершине 2φ, которая плотно прилегает ко дну сосуда. Сосуд наполнен жидкостью с показателем преломления n. При каких условиях предмет будет виден?

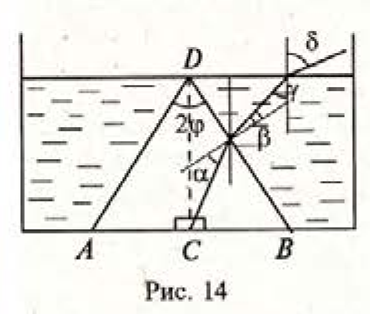


Рис. 14

Решение. Пусть из точки C выходит луч, который падает на воронку под углом α. Этот луч после преломления войдет в жидкость под углом β к воронке. Он упадет на поверхность жидкости под углом γ, и после преломления выйдет в воздух под углом δ. По закону преломления (рис. 14) $\sin\alpha = n\sin\beta$; $\sin\delta = n\sin\gamma$.

Предмет будет виден в том случае, если не произойдет полного внутреннего отражения от поверхности жидкости. Условие видимости предмета выражается следующим образом: $\delta \le 90°$.

Тогда $\sin\gamma_{пр} = \frac{1}{n}$. Так как угол $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi - \gamma$, то

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi-\gamma\right) = \cos(\varphi+\gamma) = \cos\varphi\cdot\cos\gamma - \sin\varphi\cdot\sin\gamma.$$

Граничное условие для α запишется следующим образом:

$\sin\alpha_{гр} = n(\cos\varphi\cdot\cos\gamma_{гр} - \sin\varphi\cdot\sin\gamma_{гр})$ или

$\sin\alpha_{гр} = n\left(\cos\varphi\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \sin\varphi\cdot\frac{1}{n}\right)$. После небольших преобразований получим $\sin\alpha_{гр} = \cos\varphi\sqrt{n^2-1} - \sin\varphi$.

Так как даже вертикальному лучу *CD* соответствует угол падения на боковую поверхность, равный $\frac{\pi}{2} - \varphi$, то $\alpha_{гр} = \frac{\pi}{2} - \varphi$, тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi\sqrt{n^2-1} - \sin\varphi \text{ или } \operatorname{tg}\varphi_{гр} = \sqrt{n^2-1} - 1.$$

И условие видимости предмета может быть записано в виде $\operatorname{tg}\varphi_{гр} \geq \sqrt{n^2-1} - 1$. Для углов больших, чем $\varphi_{гр}$, предмет будет виден, для меньших — невидим.

17. На прозрачную плоскопараллельную пластину под очень малым углом к нормали падает узкий пучок света (рис. 15). Какую зависимость должен иметь показатель преломления пластины $n(y)$, чтобы траектория пучка света в пластине была парабола?

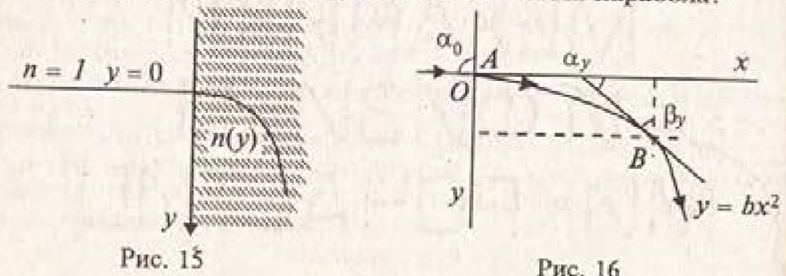


Рис. 15

Рис. 16

Решение. Запишем соотношения $n\sin\alpha = \text{const}$ в виде $n(y)\sin\alpha_y = \text{const}$ (рис. 16). В точке $x = 0$ парабола должна касаться Ox. Уравнение параболы в этой системе координат запишется: $y = bx^2$, где b — коэффициент, характеризующий крутизну параболы. Запишем соотношение для точек A и B: $n(y)\sin\beta_y = n(0)\sin\alpha_0$ однако $\sin\alpha_0$ $\sin 90° = 1$, а $n(0) = n_0$. Тогда $\sin\beta_y = \frac{n_0}{n(y)}$.

Тангенс угла наклона касательной в точке B равен производной функции $y = bx^2$: $\operatorname{tg}\alpha_y = 2bx = 2b\sqrt{\frac{y}{b}} = 2\sqrt{by}$.

Зная, что $\operatorname{tg}\beta_y = \operatorname{ctg}\alpha_y$, можно получить: $\sin\beta_y = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta_y}} = \frac{1}{\sqrt{1+4by}}$, тогда $\frac{n_0}{n(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+4by}}$, и окончательно $n(y) = n_0\sqrt{1+4by}$.

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ МИКРОЧАСТИЦ

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ МИКРОЧАСТИЦ

Уровень I

35. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

35.1. При какой относительной скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 0,25?

Ответ: $v = 1{,}98 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Длина l тела, движущегося со скоростью v относительно некоторой системы отсчета, связана с длиной l_0 тела, неподвижного в этой системе, соотношением $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$, где $\beta = \frac{v}{c}$.

По условию задачи $\frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0} = 0{,}25$. Тогда $\frac{l}{l_0} = 0{,}75$ и $\sqrt{1-\beta^2} = 0{,}75$, откуда $\beta = 0{,}6615$, а $v = \beta c = 1{,}98 \cdot 10^8$ м/с.

35.2. Тело движется с постоянной скоростью v относительно инерциальной системы отсчета K. При каком значении v продольные размеры тела уменьшатся в n раз для наблюдателя в этой системе? Вычислить v при $n = 1{,}5$.

Ответ: $v = 2{,}3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Так как в системе K длина тела $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ и дано $\frac{l_0}{l} = n$, то $l_0 = nl$, следовательно, $l = nl\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Отсюда $\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$; $v = c\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$. При $n = 1{,}5$, получим $v = c\sqrt{1-\frac{1}{1{,}5^2}} \approx 0{,}75\,c \approx 2{,}3 \cdot 10^8$ м/с.

35.3. Во сколько раз увеличивается продолжительность существования нестабильной частицы, если она начинает двигаться со скоростью, составляющей 99% скорости света?

Ответ: $\frac{\tau}{\tau_0} = 7{,}1$ раз.

Решение. Промежуток времени τ в системе, движущейся со скоростью v по отношению к наблюдателю, связан с промежутком времени τ_0 в неподвижной для наблюдателя системе соотношением $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0,99c}{c}\right)^2}} = 7,1$.

35.4. Собственное время жизни частицы отличается на $k = 1\%$ от времени жизни по неподвижным часам. Определите β.

Ответ: $\beta = 0,141$.

Решение. Согласно условию $\frac{\tau - \tau_0}{\tau} = 1 - \frac{\tau_0}{\tau} = k$.

Так как $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, а $\frac{\tau_0}{\tau} = \sqrt{1-\beta^2}$, то $1 - \beta^2 = (1-k)^2$, откуда $\beta = \sqrt{k(2-k)} = 0,141$.

35.5. Сколько времени пройдет на Земле, если в ракете, движущейся со скоростью $0,99c$ относительно Земли, пройдет 10 лет?

Ответ: $\tau = 71$ год.

Решение. Время, прошедшее по часам неподвижного наблюдателя $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{10}{\sqrt{1-\left(\frac{0,99c}{c}\right)^2}} = 71$ год.

35.6. Исходя из условия предыдущей задачи, найдите как изменятся линейные размеры тел в ракете (по линии движения) для неподвижного наблюдателя.

Ответ: $l \approx 0,14 l_0$.

Решение. Длина тел вдоль линии движения $l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2} = \sqrt{1-(0,99c/c)^2} \approx 0,14 l_0$.

35.7. Мюоны, рождаясь в верхних слоях атмосферы, при скорости $v = 0,995$ с пролетают до распада $l = 6$ км. Определите: 1) собственную длину пути l_0, пройденную мюоном до распада; 2) время жизни мюона для наблюдателя на Земле; 3) собственное время жизни мюона.

Ответ: $l_0 = 599$ м; $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$с; $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ с.

Решение. 1) $l_0 = l\sqrt{1-(v/c)^2} = 599$ м. 2) $\tau = l/v = 2 \cdot 10^{-5}$ с. 3) $\tau_0 = l_0/v = 2 \cdot 10^{-6}$ с.

35.8. Космический корабль движется со скоростью $v = 0,8c$ по направлению к Земле. Определите расстояние, пройденное им в системе отсчета, связанной с Землей (системе K), за $\tau_0 = 5$ с, отсчитанное по часам в космическом корабле (системе K').

Ответ: $l = 200$ Мм.

Решение. $l = v\tau = v \cdot \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2 \cdot 10^8$ м.

35.9. Две ракеты движутся равномерно и прямолинейно с относительной скоростью $v = 0,6c$. Какое время пройдет для наблюдателя во второй ракете за $\tau_0 = 8$ ч, прошедших для наблюдателя в первой ракете? Как изменится промежуток времени между двумя событиями во второй ракете Δt_2 с точки зрения наблюдателя, находящегося в первой ракете?

Ответ: $\tau_0 = 8$ ч; $\Delta t_2 = 10$ ч.

Решение. Относительно неподвижного наблюдателя время, прошедшее в любой из ракет, движущихся равномерно, прямолинейно с одной и той же скоростью, будет одно и то же, т. е. 8 часов. Для наблюдателя, находящегося в первой ракете, промежуток времени между событиями во второй ракете

$$\Delta t_2 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(0,6c/c)^2}} = 10 \text{ ч}.$$

35.10. Какую скорость должно иметь движущееся тело, если его продольные размеры уменьшились в два раза?

Ответ: $v = 2,6 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. $l = l_0\sqrt{1-(v^2/c^2)}$. По условию $l_0 = 2l$, тогда $l = 2\sqrt{1-(v^2/c^2)}$; $v^2/c^2 = 3/4$; $v = c\sqrt{3/4} = 2,6 \cdot 10^8$ м/с.

35.11. На основании релятивистского закона сложения скоростей найти v, если $v' = c$.

Ответ: $v = c$.

Решение. Релятивистский закон сложения скоростей $v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v' v_0}{c^2}}$,

где v_0 — скорость движения системы K' относительно системы K.

При $v' = c$, имеем $v = \dfrac{c + v_0}{1 + \dfrac{v_0 c}{c^2}} = c.$

35.12. Ионизированный атом, вылетев из ускорителя со скоростью $v' = 0{,}8c$, испустил фотон в направлении своего движения. Определите скорость фотона относительно ускорителя.

Ответ: $v = c$.

Решение. $v = \dfrac{v' + v_0}{1 + \dfrac{v' v_0}{c^2}} = \dfrac{0{,}8c + c}{1 + \dfrac{0{,}8c \cdot c}{c^2}} = c.$

35.13. Две ракеты движутся навстречу друг другу относительно неподвижного наблюдателя с одинаковой скоростью, равной $0{,}5c$. Определите скорость сближения ракет, исходя из закона сложения скоростей: 1) в классической механике; 2) в специальной теории относительности.

Ответ: 1) $v_{кл} = c$; 2) $v_{рел} = 0{,}8\,c$.

Решение. $v_{кл} = v_1 + v_2 = 0{,}5c + 0{,}5c = c$; $v_{рел} = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}} = \dfrac{c}{1 + 0{,}25} = 0{,}8c.$

35.14. Два тела движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = v_2 = 2 \cdot 10^5$ км/с относительно неподвижного наблюдателя. Насколько отличаются скорости их движения относительно друг друга, вычисленные по классической и релятивистской формулам сложения скоростей?

Ответ: $\Delta v = 1{,}2 \cdot 10^5$ км/с.

Решение. $v_{кл} = v_1 + v_2 = 4 \cdot 10^5$ км/с. $v_{рел} = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}} = 2{,}8 \cdot 10^5$ км/с,

$\Delta v = 1{,}2 \cdot 10^5$ км/с.

35.15. С какой скоростью сближаются два фотона, каждый из которых относительно неподвижного наблюдателя движется со скоростью c? Какой ответ получится по классической формуле сложения скоростей?

Ответ: $v_{рел} = c$; $v_{кл} = 2\,c$.

Решение. $v_{рел} = \dfrac{c + c}{1 + \dfrac{cc}{c^2}} = c.$ $v_{кл} = c + c = 2c$, что противоречит теории относительности.

35.16. При какой скорости масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя?

Ответ: $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Релятивистская масса $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$,

$\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = 2.$ Откуда $v = c\sqrt{3/4} = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

35.17. На сколько увеличится масса α-частицы при ускорении ее до скорости, составляющей 0,9 скорости света? Масса α-частицы $m_0 = 6{,}6446 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: На $8{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг.

Решение. $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$; $\Delta m = m - m_0 = \dfrac{m_0(1 - \sqrt{1 - (v^2/c^2)})}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$;

$\Delta m = m_0 \dfrac{(1 - \sqrt{1 - (0{,}9c^2/c^2)})}{\sqrt{1 - (0{,}9c^2/c^2)}} = 8{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг.

35.18. Исходя из условия задачи 35.5, найдите, как изменится для неподвижного наблюдателя плотность вещества в ракете. $v = 0{,}99c$

Ответ: Плотность увеличится в 50 раз.

Решение. Плотность вещества в ракете для неподвижного наблюдателя $\rho = \dfrac{m}{V}$, где $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$, $V = lS$. Так как поперечные (по отношению к линии движения) размеры тел не изменяются, то $V = l_0 S\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, $\rho = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)} \cdot l_0 S\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} =$

$= \dfrac{m_0}{V_0(1 - \dfrac{v^2}{c^2})} = \dfrac{\rho_0}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{\rho_0}{1 - \left(\dfrac{0{,}99c}{c}\right)^2} \approx 50\rho_0.$

35.19. Определите релятивистский импульс протона, если скорость его движения $v = 0{,}8\,c$, масса покоя протона $m_0 = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: $p = 6{,}69 \cdot 10^{-19}$ кг м/с.

Решение. Релятивистский импульс $p = mv = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} v =$

$= 6{,}69 \cdot 10^{-19}$ кг м/с.

35.20. Определите скорость, при которой релятивистский импульс частицы превышает ее ньютоновский импульс в $n = 3$ раза.

Ответ: $v = 0{,}943\ c$.

Решение. $p_{рел} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}v$, $p_{кл} = m_0 v$, $\dfrac{p_{рел}}{p_{кл}} = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\cdot m_0 v} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$; $\dfrac{p_{рел}}{p_{кл}} = n$. $\dfrac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = n$; $\dfrac{c}{\sqrt{c^2-v^2}} = n^2$.

Откуда $v = c\sqrt{1-(1/n^2)} = 0{,}943\ c$.

35.21. Какая энергия выделилась бы при полном превращении 1 г вещества в излучение?

Ответ: $E = 9\cdot 10^{13}$ Дж.

Решение. Полная энергия свободно движущейся релятивистской частицы $E = mc^2 = 9\cdot 10^{13}$ Дж.

35.22. Найдите скорость частицы, если ее кинетическая энергия составляет половину энергии покоя.

Ответ: $v = 2{,}22\cdot 10^8$ м/с.

Решение. Кинетическая энергия релятивистской частицы $T = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2$. Согласно условию задачи $\dfrac{E_0}{T} = 2$,

т. е. $\dfrac{m_0c^2}{(m-m_0)c^2} = 2$; $\dfrac{m_0}{m-m_0} = 2$, $\dfrac{m_0}{\dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - m_0} = \dfrac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2$;

$\sqrt{1-(v^2/c^2)} = 2 - 2\sqrt{1-(v^2/c^2)}$; $3\sqrt{c^2-v^2} = 2c$; $3v = c\sqrt{5}$;

$v = \dfrac{c\sqrt{5}}{3} = 2{,}23\cdot 10^8$ м/с.

35.23. Найдите скорость космической частицы, если ее полная энергия в k раз превышает энергию покоя.

Ответ: $v = \dfrac{\sqrt{(k^2-1)}\cdot c}{k}$.

Решение. $E = mc^2$; $E_0 = m_0c^2$, $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$; $\dfrac{E}{E_0} = k$;

$\dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}\cdot m_0} = k$; $k = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$; $k\sqrt{c^2-v^2} = c$;

$k^2(c^2 - v^2) = c^2$; $k^2v^2 = (k^2-1)c^2$ или $v = \dfrac{\sqrt{(k^2-1)}\cdot c}{k}$.

35.24. При какой скорости кинетическая энергия любой элементарной частицы равна ее энергии покоя?

Ответ: $v = 0{,}866\ c$.

Решение. Кинетическая энергия элементарной частицы

$T = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1\right)$. Энергия покоя частицы $E_0 = m_0c^2$.

Следовательно, $\dfrac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1 = 1$ или $1 = 2\sqrt{1-(v^2/c^2)}$;

$v = c\sqrt{3/4} = 0{,}866c$.

35.25. На сколько увеличится масса пружины жесткостью $k = 10$ кН/м при ее растяжении на $\Delta x = 3$ см?

Ответ: $\Delta m = 5\cdot 10^{-17}$ кг.

Решение. Изменение полной энергии растянутой пружины равно ее потенциальной энергии при упругой деформации пружины: $\Delta E = mc^2 - m_0c^2 = \Delta mc^2$; $E_п = \dfrac{k(\Delta x)^2}{2}$; $\Delta mc^2 = \dfrac{k\Delta x^2}{2}$; $\Delta m = \dfrac{k(\Delta x^2)}{2c^2} =$

$= 5\cdot 10^{-17}$ кг.

35.26. Вычислите изменение энергии, соответствующее изменению массы на величину массы покоящегося протона.

Ответ: $\Delta E \approx 1{,}5\cdot 10^{-10}$ Дж.

Решение. Согласно закону взаимосвязи массы и энергии $\Delta E = c^2\Delta m$, где $c = 3\cdot 10^8$ м/с, $\Delta m = m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг. Следовательно, $\Delta E = (3\cdot 10^8)^2 \cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}$ Дж $\approx 1{,}5\cdot 10^{-10}$ Дж.

35.27. Ускоритель разгоняет протоны до кинетической энергии $T = 76$ ГэВ. Найти: 1) массу; 2) скорость ускоренного протона.

Ответ: $m = 82m_0$; $v = 0{,}9999c$.

Решение. 1) Полная энергия ускоренного протона $T + E_0 = mc^2$. Разделив обе части этого равенства на $E_0 = m_0c^2$, найдем

$\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{T+E_0}{E_0}$; $m = \left(1 + \dfrac{T}{E_0}\right)m_0$. Для протона энергия покоя $E_0 = m_0c^2 =$

$= 15\cdot 10^{-11}$ Дж $\approx$ 938 МэВ $= 0{,}938$ ГэВ и $T = 76$ ГэВ, тогда

$$m = \left(1 + \frac{76}{0,938}\right) m_0 = 82 m_0.$$

2) $T + E_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, тогда $\beta^2 = 1 - \dfrac{E_0^2}{(T+E_0)^2} = \dfrac{2E_0T + T^2}{(E_0+T)^2}$ и

$$\upsilon = \frac{c}{E_0 + T}\sqrt{T(2E_0 + T)} = 0,9999c.$$

35.28. Определите энергию, массу и импульс фотона с $\lambda = 0,016 \cdot 10^{-10}$ м.

Ответ: $E = 1,24 \cdot 10^{-13}$ Дж; $m = 1,38 \cdot 10^{-30}$ кг; $p = 4,1 \cdot 10^{-22}$ кг м/с.

Решение. $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda} = 1,24 \cdot 10^{-13}$ Дж, $m = \dfrac{h\nu}{c^2} = 1,38 \cdot 10^{-30}$ кг, $p = \dfrac{h}{\lambda} = 4,1 \cdot 10^{-22}$ кг м/с.

35.29. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его скорость составила 90% скорости света?

Ответ: $U = 1,22 \cdot 10^9$ В.

Решение. Кинетическая энергия $T = m_p c^2 \left[\dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)}} - 1\right]$, и $T = eU$, где U — ускоряющая разность потенциалов.

$$U = \frac{m_p c^2}{e}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)}} - 1\right] = 1,22 \cdot 10^9 \text{ В}.$$

35.30. На сколько увеличится масса частицы, заряд которой равен Ze, после прохождения ускоряющей разности потенциалов U?

Ответ: $\Delta m = \dfrac{ZeU}{c^2}$.

Решение. $\Delta E = \Delta mc^2$; $\Delta E = ZeU$; $\Delta mc^2 = ZeU$, откуда $\Delta m = \dfrac{ZeU}{c^2}$.

35.31. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его продольные размеры уменьшились в два раза?

Ответ: $U = 512$ кВ.

Решение. $l = l_0\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)}$; $l = l_0/2$; $\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)} = \dfrac{1}{2}$, $T = eU$;

$$T = m_e c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)}} - 1\right],\ U = \frac{T}{e} = \frac{m_e c^2}{e} = 512 \text{ кВ}.$$

35.32. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы от 0,5 c до 0,7 c.

Ответ: $A = 0,245mc^2$.

Решение. $A = T_2 - T_1 = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon_2^2}{c^2}}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon_1^2}{c^2}}}\right) = 0,245mc^2.$

35.33. Мощность излучения Солнца $4 \cdot 10^{26}$ Вт. На сколько ежесекундно уменьшается масса Солнца?

Ответ: $\Delta m = 4,44 \cdot 10^9$ кг.

Решение. Энергия $E = mc^2$, откуда $m = \dfrac{E}{c^2}$. Энергия излучения Солнца $E = Pt$. Ежесекундно масса Солнца уменьшается на $\Delta m = \dfrac{Pt}{c^2} = 4,44 \cdot 10^9$ кг.

35.34. Докажите, что при малых скоростях релятивистская формула кинетической энергии переходит в классическую.

Указание. При доказательстве в выражении для кинетической энергии $T = m_0 c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)}} - 1\right)$ числитель и знаменатель домножить на $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)}} + 1\right)$.

35.35. Какова должна быть кинетическая энергия частицы с массой покоя m_0, чтобы ее собственное время стало в n раз меньше лабораторного?

Ответ: $T = m_0c^2(n-1)$.

Решение. Согласно условию задачи $\tau_0 = \dfrac{\tau}{n}$, но $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)}}$, откуда $\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)} = \dfrac{\tau_0}{\tau} = \dfrac{1}{n}$. $T = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)}} - 1\right) = m_0c^2(n-1)$.

35.36. Определите релятивистский импульс электрона, кинетическая энергия которого $T = 10^9$ эВ. ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Ответ: $p = 5{,}34 \cdot 10^{-19}$ кг м/с.

Решение. Релятивистский импульс

$$p = \frac{\sqrt{T(T+2mc^2)}}{c} = 5{,}34 \cdot 10^{-19} \text{ кг м/с.}$$

35.37. Какова должна быть энергия частицы, чтобы ее продольный размер стал в k раз меньше поперечного?

Ответ: $T = m_0c^2(k-1)$.

Решение.

Введем $k = \frac{l_0}{l} = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$; $T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1\right) = m_0c^2(k-1)$.

35.38. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его масса была такой же, как у α-частицы с кинетической энергией 10^3 МэВ?

Ответ: $U = 3{,}78 \cdot 10^9$ В.

Решение. Если массы частиц равны, то равны и их полные энергии. $T_p + m_{0p}c^2 = T_\alpha + m_{0\alpha}c^2$. $T_p = eU$. Откуда $U = \frac{T_\alpha + (m_{0\alpha} - m_{0p})c^2}{e} = 3{,}78 \cdot 10^9$ В.

35.39. Протон и а-частица проходят одинаковую ускоряющую разность потенциалов U, после чего масса протона составила треть массы а-частицы. Определите разность потенциалов.

Ответ: $U = 912$ МэВ.

Решение. Полная энергия частицы пропорциональна ее массе. Поэтому $E_p = \frac{1}{3}E_\alpha$; $eU + m_{0p}c^2 = \frac{1}{3}(2eU + m_{0\alpha}c^2)$; $\frac{1}{3}eU = (\frac{m_{0\alpha}}{3} - m_{0p})c^2$;

$$U = \frac{(m_{0\alpha} - 3m_{0p})c^2}{e} = 1{,}45 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = 912 \text{ МэВ.}$$

35.40. В предыдущей задаче найти конечные скорости протона и α-частицы.

Ответ: 1) $v = 2{,}59 \cdot 10^8$ м/с; 2) $v = 2{,}22 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. 1) Для протона $eU = m_{0p}c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1\right)$;

$$\sqrt{1-(v^2/c^2)} = \frac{m_{0p}c^2}{eU + m_{0p}c^2} = 0{,}507; \quad v/c = 0{,}863;$$

$v = 0{,}863c = 2{,}59 \cdot 10^8$ м/с.

2) Для α-частицы $2eU = m_{0\alpha}c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1\right)$;

$$\sqrt{1-(v^2/c^2)} = \frac{m_{0\alpha}c^2}{2eU + m_{0\alpha}c^2} = 0{,}671; \quad \frac{v}{c} = 0{,}742;$$

$v = 0{,}742c = 2{,}22 \cdot 10^8$ м/с.

36. КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

36.1. Определите энергию и массу фотонов, соответствующих красной ($\lambda_1 = 0{,}76$ мкм) и фиолетовой ($\lambda_2 = 0{,}38$ мкм) границам видимого спектра.

Ответ: $E = 2{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж, $E_2 = 5{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж; $m_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-36}$ кг, $m_2 = 5{,}8 \cdot 10^{-36}$ кг.

Решение. Энергия фотона $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. Для красной границы $E_1 = h\frac{c}{\lambda_1} = 2{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж. Здесь $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света. Для фиолетовой границы $E_2 = h\frac{c}{\lambda_2} = 5{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Масса фотона $m = \frac{E}{c^2}$; $m_1 = \frac{E_1}{c^2} = 2{,}9 \cdot 10^{-36}$ кг, $m_2 = \frac{E_2}{c^2} = 5{,}8 \cdot 10^{-36}$ кг.

36.2. Определите массу и импульс фотона, соответствующего рентгеновскому излучению с частотой $3 \cdot 10^{17}$ Гц.

Ответ: $m = 2{,}2 \cdot 10^{-33}$ кг, $p = 6{,}6 \cdot 10^{-25}$ кг $\cdot$ м/с.

Решение. Импульс фотона $p = \frac{h\nu}{c} = 6{,}63 \cdot 10^{-25}$ кг $\cdot$ м/с. Масса фотона $m = \frac{p}{c} = 2{,}21 \cdot 10^{-33}$ кг.

36.3. Какой импульс фотона, энергия которого равна 3 эВ?

Ответ: $p = 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг $\cdot$ м/с.

Решение. Установим связь между энергией и импульсом фотона $E = mc^2 = pc$; $p = \frac{E}{c} = 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг $\cdot$ м/с.

36.4. Определите длину волны, соответствующую фотону, масса которого равна массе покоящегося электрона.

Ответ: $\lambda = 2{,}42$ пм.

Решение. $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$; $E = m_0c^2$. Таким образом, $\lambda = \frac{h}{m_0c^2} = 2{,}42 \cdot 10^{-12}$ м $= 2{,}42$ пм.

36.5. Определите длину волны, соответствующую фотону, энергия которого равна энергии покоя протона.

Ответ: $\lambda = 1{,}32 \cdot 10^{-15}$ м.

Указание. См. решение предыдущей задачи. Масса покоя протона $m_{0(p)} = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг.

36.6. Определите длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, пролетевшего разность потенциалов $U = 4{,}9$ В.

Ответ: $\lambda = 0{,}55$ нм.

Решение. Импульс фотона $p_ф = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{h}{\lambda}$. Импульс электрона связан с энергией соотношением $E = \frac{p_e^2}{2m}$, но $E = eU$, где U — ускоряющаяся разность потенциалов. $p_e = \sqrt{2meU}$. $p_e = p_ф$ (по условию). $\frac{h}{\lambda}\sqrt{2meU}$, отсюда $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = 0{,}55$ нм.

36.7. На идеально отражающую поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм. Мощность светового потока $P = 0{,}45$ Вт. Определите число фотонов N, падающих на поверхность за время $t = 3$ с.

Ответ: $N = 3{,}73 \cdot 10^{18}$.

Решение. Мощность светового потока $P = \frac{E}{t} = \frac{hc}{\lambda t}N$, откуда $N = \frac{P\lambda t}{hc} = 3{,}73 \cdot 10^{18}$.

36.8. Солнечные лучи в течение года приносят на Землю $\Delta E_1 = 5{,}4 \cdot 10^{24}$ Дж энергии. На сколько изменилась бы масса Земли за 100 лет, если бы она эту энергию не излучала в пространство?

Ответ: $\Delta M = 6 \cdot 10^9$ кг.

Решение. Из закона взаимосвязи энергии и массы $\Delta E = \Delta M \cdot c^2$, $\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2}$, где $\Delta E = \Delta E_1 \cdot 100$, $\Delta M = \frac{\Delta E_1 \cdot 100}{c^2} = 6 \cdot 10^9$ кг.

36.9. Под каким напряжением работает рентгеновская трубка, если минимальная длина волны в спектре рентгеновского излучения равна 60 нм?

Ответ: $U = 20{,}5$ В.

Решение. $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$; $E = eU$; $h\frac{c}{\lambda} = eU$, откуда $U = \frac{hc}{e\lambda} = 20{,}5$ В.

36.10. Определить красную границу фотоэффекта для калия и платины.

Ответ: $\lambda_к = 0{,}577$ мкм, $\lambda_{пл} = 0{,}235$ мкм.

Решение. Красная граница фотоэффекта $\nu = \frac{A}{h}$, где A — работа выхода электрона из металла. Так как $\nu = \frac{c}{\lambda}$, то $\lambda = \frac{hc}{A}$. Для калия — $\lambda_к = \frac{h}{A_к} = 0{,}577$ мкм, для платины — $\lambda_{пл} = \frac{h}{A_{пл}} = 0{,}235$ мкм.

36.11. Произойдет ли фотоэффект, если медь облучать светом с длиной волны 400 нм? Работа выхода электрона из меди $A = 4{,}47$ эВ.

Ответ: Нет.

Решение. Определим, достаточно ли энергии падающего света для преодоления работы выхода $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 4{,}97 \cdot 10^{-19}$ Дж. Работа выхода $A = 4{,}47 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 7{,}15 \cdot 10^{-19}$ Дж. $E < A$, фотоэффект не наблюдается.

36.12. С какой максимальной скоростью вылетают электроны из цинка, если его облучать ультрафиолетовым светом ($\lambda = 320$ нм)?

Ответ: $\upsilon = 2{,}2 \cdot 10^5$ м/с.

Решение. Из формулы Эйнштейна для фотоэффекта $h\nu = A_{вых} + \frac{m\upsilon_{max}^2}{2}$ с учетом $\nu = \frac{c}{\lambda}$ следует $\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(h\frac{c}{\lambda} - A\right)} = 2{,}2 \cdot 10^5$ м/с.

36.13. Какой частоты свет следует направить на поверхность лития, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была равна 2500 км/с?

Ответ: $\nu = 4{,}87 \cdot 10^{15}$ Гц.

Решение. $h\nu = A + \frac{m\upsilon_{max}^2}{2}$, $\nu = \frac{2A + m\upsilon_{max}^2}{2h} = 4{,}87 \cdot 10^{15}$ Гц.

36.14. Фотоны с энергией $E = 5$ эВ вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода $A = 4{,}7$ эВ. Определите максимальный

импульс, передаваемый поверхности этого металла при вылете электрона?

Ответ: $p_{max} = 2{,}96 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с.

Решение. $p_{max} = mv_{max}$. $E = A + \frac{mv^2_{max}}{2}$; $v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - A)}$.

$p_{max} = \sqrt{2m(E - A)} = 2{,}96 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с.

36.15. Определите работу выхода электрона из вольфрама, если красная граница фотоэффекта для него $\lambda_0 = 275$ нм.

Ответ: $A = 4{,}52$ эВ.

Решение. $E = h\nu$; $A = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0} = 7{,}23 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 4{,}52$ эВ.

36.16. Калий освещается монохроматическим светом с длиной волны 400 нм. Определите наименьшее задерживающее напряжение, при котором фототок прекратится. Работа выхода электронов из калия равна 2,2 эВ.

Ответ: $U_0 = 0{,}91$ В.

Решение. $h\nu = A_{вых} + \frac{mv^2_{max}}{2}$, $\frac{mv^2_{max}}{2} = eU_0$, $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $\frac{hc}{\lambda} = A + eU_0$,

$U_0 = \frac{hc - \lambda A}{e\lambda} = 0{,}91$ В.

36.17. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла $\lambda_0 = 500$ нм. Определите работу выхода электронов из этого металла и максимальную скорость электронов, вырывающихся из этого металла светом с частотой $\nu = 7{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц.

Ответ: $A = 2{,}49$ эВ, $v_{max} = 468$ км/с.

Решение. $A = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0} = 3{,}98 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 2{,}49$ эВ. $h\nu = h\frac{c}{\lambda_0} + \frac{mv^2_{max}}{2}$.

$v_{max} = \sqrt{\frac{2h}{m}\left(\nu - \frac{c}{\lambda_0}\right)} = 4{,}68 \cdot 10^5$ м/с.

36.18. Каким светом облучали цезий, если для прекращения эмиссии электронов потребовалось приложить задерживающую разность потенциалов 1,75 В?

Ответ: $\lambda = 340$ нм.

Решение. $h\nu = A + \frac{mv^2_{max}}{2}$; $\nu = \frac{c}{\lambda}$; $\frac{mv^2_{max}}{2} = eU$. $h\frac{c}{\lambda} = A + eU$,

$\lambda = \frac{hc}{A + eU} = 3{,}4 \cdot 10^{-7}$ м $= 340$ нм.

36.19. Уединенный шарик радиусом 0,5 см осветили светом с длиной волны 250 нм. Сколько электронов покинет шарик, если его дополнительно осветить светом с длиной волны 200 нм?

Ответ: $N = 4{,}3 \cdot 10^7$.

Решение. При освещении шарика светом с длиной волны $\lambda_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ м энергии света было достаточно только для преодоления работы выхода электрона из металла $\frac{hc}{\lambda_0} = A$, тогда как $\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mv^2}{2}$. Так как $\frac{mv^2}{2} = e\varphi$, то $\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + e\varphi$, отсюда $\varphi = \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$. Потенциал уединенного шарика $\varphi = k\frac{Ne}{r}$, где $Ne = q$ — заряд шарика, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м). Таким образом, $N = \frac{\varphi r}{ke} = \frac{hc}{ke^2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = 4{,}3 \cdot 10^7$.

36.20. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла $\lambda_{кр} = 275$ нм. Найти работу выхода электрона из этого металла и максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны 180 нм.

Ответ: $v = 9{,}1 \cdot 10^5$ м/с.

Указание. См. решение задачи 36.17.

36.21. Найдите частоту света, вырывающего из поверхности металла электроны, полностью задерживающиеся обратным потенциалом в 2 В. Фотоэффект у этого металла начинается при частоте падающего света $\nu_{кр} = 6 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$. Найдите работу выхода электрона из этого металла.

Ответ: $A = 2{,}48$ эВ, $\nu = 1{,}09 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$.

Решение. $h\nu = h\nu_{кр} + eU$, $A = h\nu_{кр} = 2{,}48$ эВ.

$\nu = \frac{h\nu_{кр} + eU}{h} = 1{,}09 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$.

36.22. Определите, до какого потенциала зарядится уединенный серебряный шарик при облучении его ультрафиолетовым светом длиной волны $\lambda = 208$ нм. Работа выхода электрона из серебра $A = 4{,}7$ эВ.

Ответ: $\varphi = 1{,}28$ В.

Решение. $h\nu = A + e\varphi$, $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $\frac{hc}{\lambda} = A + e\varphi$, $\varphi = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{A}{e} = 1{,}28$ В.

36.23. Плоский серебряный электрод освещается монохроматическим излучением с длиной волны $\lambda = 83$ нм. Определите, на какое максимальное расстояние от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью $E = 10$ В/см. Красная граница фотоэффекта для серебра $\lambda_0 = 264$ нм.

Ответ: $S = 1{,}03$ см.

Решение. $\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + eES;\ S = \frac{hc}{eE}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = 1{,}03$ см.

36.24. При освещении катода вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны $\lambda_1 = 310$ нм фототок прекращается при некотором задерживающим напряжении. При увеличении длины волны на 25% задерживающее напряжение оказывается меньше на $\Delta U = 0{,}8$ В. Определите по этим экспериментальным данным постоянную Планка.

Ответ: $h = 6{,}61 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Решение. $\frac{hc}{\lambda_1} = A + eU_1,\ \frac{hc}{\lambda_2} = A + eU_2.\ hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = e(U_1 - U_2);$

$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = e\Delta U$, где, согласно условию задачи, $\lambda_2 = 1{,}25\lambda_1$.

Постоянная Планка равна:

$$h = \frac{eU \cdot \lambda_1\lambda_2}{c(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{e\Delta U\lambda_1 \cdot 1{,}25\lambda_1}{c\lambda_1(1{,}25 - 1)} = \frac{5e\Delta U\lambda_1}{c} = 6{,}61 \cdot 10^{-34}\text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

36.25. Сколько фотонов попадает за 1 с в глаз человека, если глаз воспринимает свет с длиной волны 0,5 мкм при мощности светового потока $P = 2 \cdot 10^{-17}$ Вт?

Ответ: $N = 50$.

Решение. Полная энергия света, попавшего в глаз, $E = Pt$. Энергия одного фотона $E_1 = \frac{hc}{\lambda}$. Число фотонов, попавших в глаз, $N = \frac{E}{E_1} = \frac{Pt\lambda}{hc} = 50$.

36.26. Капля воды объемом 0,2 мл нагревается светом с длиной волны 0,75 мкм, поглощая ежесекундно 10^{10} фотонов. Определите скорость нагревания воды.

Ответ: $\frac{\Delta T}{\Delta t} = 3{,}15 \cdot 10^{-9}$ К/с.

Решение. Количество теплоты, полученное водой, $Q = c_в m\Delta T$. Количество энергии, отданное светом за время Δt, $E = NE_1\Delta t$, где N — число фотонов, $E_1 = \frac{hc}{\lambda}$ — энергия одного фотона. Считая, что вся энергия, полученная каплей, идет на ее нагревание, найдем скорость нагревания воды $\frac{\Delta T}{\Delta t}$. $NE_1\Delta t = mc_в\Delta T$, откуда

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{NE_1}{mc_в} = \frac{Nhc}{\lambda\rho Vc_в} = 3{,}15 \cdot 10^{-9}\text{ К/с}.$$

36.27. Найдите давление света на стены колбы электронной лампы мощностью $P = 100$ ВТ. Колба лампы — сфера радиусом $R = 5$ см, стенки которой отражают 10% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая лампой мощность идет на изучение.

Ответ: $p = 12$ мкПа.

Решение. Световое давление $p = \frac{J}{c}(1 + \rho)$, где J — интенсивность света, равная $J = \frac{P}{S}$, $S = 4\pi R^2$ — площадь поверхности лампы. Согласно условию, коэффициент отражения $\rho = 0{,}1$.

$$p = \frac{P}{4\pi R^2 c}(1 + \rho) = 12 \cdot 10^{-6}\text{ Па} = 12\text{ мкПа}.$$

36.28. Пучок света с длиной волны $\lambda = 0{,}49$ мкм, падая перпендикулярно поверхности, производит на нее давления 5 мкПа. Сколько фотонов падает ежесекундно на 1 м² этой поверхности? Коэффициент отражения света от данной поверхности $\rho = 0{,}25$.

Ответ: $N = 2{,}9 \cdot 10^{21}\text{ м}^{-2}\text{с}^{-1}$.

Решение. Интенсивность света, т. е. световая энергия, падающая на поверхность тела в 1 с, отнесенная к единице поверхности, $J = pc(1 + \rho)$. Энергия одного фотона $E_1 = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. Ежесекундно на 1 м² падает количество фотонов $N = \frac{J}{E_1} = \frac{p\lambda}{h(1 + \rho)} = 2{,}9 \cdot 10^{21}\text{ м}^{-2}\text{с}^{-1}$.

36.29. На поверхность площадью $S = 10^{-2}$ м² ежеминутно падает $E = 63$ Дж световой энергии. Найдите световое давление в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает все излучение.

Ответ: 1) 0,7 мкПа; 2) 0,35 мкПа.

Решение. 1) Так как $\rho = 1$, то световое давление $p = \frac{2J}{c}$, но интенсивность света $J = \frac{E}{St}$ (по определению), поэтому $p = \frac{2E}{cSt} = 0{,}7$ мкПа.

2) Так как $\rho = 0$, то световое давление $p = \frac{J}{c}$ или $p = \frac{E}{cSt} = 0{,}35$ мкПа.

36.30. Давление p монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, составляет 0,1 мкПа. Определите концентрацию n фотонов в световом пучке, а также число N фотонов, падающих ежесекундно на 1 м² поверхности.

Ответ: $n = 3{,}02 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$; $N = 9{,}06 \cdot 10^{19}$.

Решение. $p = \frac{J}{c}(1+\rho) = (1+\rho)w$, где w — объемная плотность энергии электромагнитного поля волны. $n = \frac{w}{E}$; $w = \frac{p}{1+\rho}$; $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. $n = \frac{\lambda p}{hc(1+\rho)} = 3{,}02 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$. $E = E_1 St = \frac{hc}{\lambda}N$, $E_1 = \frac{pc}{(1+\rho)}$,

$N = \frac{E_1 St\lambda}{hc} = \frac{pcSt\lambda}{(1+\rho)hc} = \frac{pSt\lambda}{h(1+\rho)}$. $N = ncSt = 9{,}06 \cdot 10^{19}$.

36.31. Найти изменения длины волны рентгеновских лучей при комптоновском рассеивании под углом 60°? Комптоновская длина волны $\lambda_к = 2{,}4263 \cdot 10^{-12}$ м.

Ответ: $\Delta\lambda_к = 1{,}21$ пм.

Решение. Вследствие рассеяния рентгеновского излучения на свободных электронах (эффект Комптона) происходит увеличение длины волны излучения на величину $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2}$, где m — масса электрона, c — скорость света в вакууме, h — постоянная Планка, θ — угол рассеяния (угол между направлениями падающего и рассеянного фотонов). Так как комптоновская длина волны $\lambda_к = \frac{h}{mc}$, то $\Delta\lambda = 2\lambda_к \sin^2\frac{\theta}{2} = 1{,}21$ пм.

36.32. Найти длину волны λ_2 рентгеновских лучей ($\lambda_1 = 20$ пм) после комптоновского рассеивания под углом 90°.

Ответ: $\lambda_2 = 22{,}43$ пм.

Решение. Увеличение длины волны вследствие эффекта Комптона $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_к \sin^2\frac{\theta}{2}$, откуда $\lambda_2 = \lambda_1 + 2\lambda_к \sin^2\frac{\theta}{2} = 22{,}43$ пм.

36.33. При облучении графита рентгеновскими лучами длина волны излучения рассеянного под углом $\theta = 45°$ равнялась $\lambda_2 = 10{,}7$ пм. Чему равна длина волны λ_1 падающих лучей?

Ответ: $\lambda_1 = 10$ пм.

Решение. См. задачу 36.32. $\lambda_1 = \lambda_2 - 2\lambda_к \sin^2\frac{\theta}{2} = 10$ пм.

36.34. Длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния увеличилась на 0,3 пм. Найдите угол рассеяния.

Ответ: $\theta = 28{,}8°$.

Решение. Для комптоновского рассеяния $\Delta\lambda = 2\lambda_к \sin^2\frac{\theta}{2}$, откуда $\theta = 2\arcsin\sqrt{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_к}} = 28{,}8°$.

36.35. Длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния увеличилась с 2 до 2,4 пм. Найдите энергию электрона отдачи.

Ответ: $E_e = 0{,}1$ МэВ.

Решение. Энергия электрона отдачи E_e равна разности энергий фотона до и после рассеивания: $E_e = h\nu_1 - h\nu_2 = h\frac{c}{\lambda_1} - h\frac{c}{\lambda_2} = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = 1{,}66 \cdot 10^{-14}$ Дж $= 10^5$ эВ $= 0{,}1$ МэВ.

36.36. Угол рассеяния рентгеновских лучей с длиной волны 5 пм равен $\theta = 30°$, а электрон отдачи движется под углом $\varphi = 60°$ к направлению падающих лучей. Найдите: а) импульс p_e электрона отдачи; б) импульс p_2 рассеянного фотона.

Рис. 36.1

Ответ: $p_e = 6{,}63 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с, $p_2 = 1{,}15^{-22}$ кг · м/с.

Решение. По закону сохранения импульса $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e$, где $\vec{p}_e$ — импульс электрона, $p_1 = \frac{h}{\lambda_1}$

и $p_2 = \frac{h}{\lambda_2}$ — импульс фотона до и после рассеяния. Угол OAB (рис. 36.1) прямой, т. к. он равен сумме углов θ и φ. В таком случае имеем $p_e = p_1 \cos\varphi = \frac{h}{\lambda_1}\cos\varphi = 6,63\cdot 10^{-23}$ кг · м/с.

$$p_2 = p_1 \cos\theta = \frac{h}{\lambda_1}\cos\theta = 1,15\cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

36.37. Рентгеновские лучи с длиной волны 20 пм рассеиваются под углом 90°. Найдите импульс электрона отдачи.

Ответ: $p_e = 4,44\cdot 10^{-23}$ кг · м/с.

Рис. 36.2

Решение. По закону сохранения импульса $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e$, где $p_1 = \frac{h}{\lambda_1}$, $p_2 = \frac{h}{\lambda_2}$,

$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_1 = \lambda_1 + 2\lambda_к \sin^2\frac{\theta}{2}$. Треугольник AOB (рис. 36.2) прямоугольный, $p_e = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$. $p_2 = \frac{h}{\lambda_1 + 2\lambda_к \sin^2\frac{\theta}{2}}$,

$$p_e = \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_1 + 2\lambda_к \sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2} = \frac{h}{\lambda_1}\sqrt{1 + \frac{1}{\left(1 + 2\frac{\lambda_к}{\lambda_1}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}} = 4,44\cdot 10^{-23} \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

36.38. Фотон с энергией $E_1 = 0,25$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны фотона изменилась на 20%.

Ответ: $T_e = \frac{E_1}{6}$.

Решение. Согласно закону сохранения энергии $T_e = E_1 - E_2$, где E_1 и E_2 — энергии падающего и рассеянного фотонов соответственно. $E_1 = h\nu_1 = h\frac{c}{\lambda_1}$, $\lambda_1 = \frac{hc}{E_1}$, $E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{1,2\lambda_1} = \frac{E_1}{1,2}$. Тогда

$$T_e = E_1 - \frac{E_1}{1,2} = \frac{E_1}{6}.$$

36.39. В результате эффекта Комптона фотон был рассеян на угол $\theta = 90°$. Энергия рассеянного фотона $E_2 = 0,4$ МэВ. Определите энергию фотона E_1 до рассеивания.

Ответ: $E_1 = 1,85$ МэВ.

Решение. Для определения энергии падающего фотона воспользуемся формулой Комптона $\Delta\lambda = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2}$, где $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Выразим длины волн λ_1 и λ_2 через энергии E_1 и E_2. $E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$, $E_2 = \frac{hc}{\lambda_2}$, откуда $\lambda_1 = \frac{hc}{E_1}$, $\lambda_2 = \frac{hc}{E_2}$. Тогда $\frac{hc}{E_2} - \frac{hc}{E_1} = 2\frac{hc}{m_0 c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}$. Учтем, что $E_0 = m_0 c^2$ — энергия покоя электрона, равная $E_0 = 0,51$ МэВ. Разделим обе части равенства на hc, получим $\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} = \frac{2}{E_0}\sin^2\frac{\theta}{2}$. Откуда $E_1 = \frac{E_2\cdot E_0}{E_0 - 2E_2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 1,85$ МэВ.

36.40. Фотон с энергией $E_1 = 0,51$ МэВ при рассеянии на свободном электроне потерял половину своей энергии. Определите угол рассеяния θ.

Ответ: $\theta = 90°$.

Решение. Воспользуемся решением предыдущей задачи.

$\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} = \frac{2}{E_0}\sin^2\frac{\theta}{2}$. $E_2 = \frac{E_1}{2}$, тогда $\frac{2}{E_1} - \frac{1}{E_1} = \frac{2}{E_0}\sin^2\frac{\theta}{2}$. Так как $E_0 = E_1 = 0,51$ МэВ, то не трудно догадаться что угол $\theta = 90°$.

37. ОСНОВЫ АТОМНОЙ И ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

37.1. Чему равен полный заряд электронов в атоме хрома?

Ответ: $q = 3,84\cdot 10^{-18}$ Кл.

Решение. Порядковый номер элемента Z в таблице Менделеева — это зарядовое число (количество электронов содержащихся в атоме этого элемента). Для хрома $Z = 24$. Следовательно, его заряд $q = 24e = 3,84\cdot 10^{-18}$ Кл.

37.2. Полный заряд ядра атома равен $2,08\cdot 10^{-18}$ Кл. Что это за элемент?

Ответ: Алюминий.

Решение. Зарядовое число (порядковый номер) Z равно $Z = \frac{q}{e} = 13$. По таблице Менделеева находим, что этот элемент — алюминий.

37.3. Пользуясь теорией Бора, определите для атома водорода радиус первой орбиты электрона и его скорость на ней.

Ответ: $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ м; $\upsilon_1 = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

Решение. Ядро атома водорода (протон) и вращающийся вокруг него электрон взаимодействуют по закону Кулона с силой $F_{эл} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Эта сила по второму закону Ньютона равна $F_{эл} = ma_ц = m\frac{\upsilon^2}{r}$, т. е. $m\frac{\upsilon^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Согласно теории Бора электрон может двигаться только по таким орбитам, для которых $m\upsilon r = n\hbar$, где n — целое число (номер орбиты), $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка. Согласно условию $n = 1$. Таким образом, $m\upsilon_1 r_1 = \hbar$, $m\frac{\upsilon_1^2}{r_1} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$. Решив совместно эти уравнения, найдем $r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ м, $\upsilon_1 = \frac{\hbar}{mr_1} = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

37.4. Определите напряженность и потенциал поля ядра атома водорода на первой боровской орбите.

Ответ: $E = 5{,}13 \cdot 10^{11}$ В/м; $\varphi = 27{,}2$ В.

Решение. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи и учитывая, что $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$, найдем $E = k\frac{e}{r_1^2} = 5{,}13 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$,

$\varphi = k\frac{e}{r_1} = 27{,}2$ В.

37.5. Вычислите силу притяжения F_1 между электроном и ядром атома водорода в основном состоянии. Во сколько раз эта сила больше силы гравитационного взаимодействия F_2 между электроном и протоном на таком же расстоянии?

Ответ: $F_1 = 82$ нН; $F_1/F_2 \approx 2{,}3 \cdot 10^{39}$.

Решение. Сила притяжения между электроном и ядром в основном состоянии ($n = 1$) $F_1 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = 8{,}2 \cdot 10^{-8}$ Н. Сила гравитационного притяжения протона и электрона $F_2 = G\frac{m_p m_e}{r_1^2} = 3{,}61 \cdot 10^{-47}$ Н.

Тогда $\frac{F_1}{F_2} = 2{,}27 \cdot 10^{39} \approx 2{,}3 \cdot 10^{39}$.

37.6. Определите потенциальную $П$, кинетическую T и полную E энергии электрона, находящегося на первой орбите в атоме водорода. $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ м, $\upsilon_1 = 2{,}2 \cdot 10^8$ см/с.

Ответ: $П = -27{,}2$ эВ; $T = 13{,}6$ эВ; $E = -13{,}6$ эВ.

Решение. Полная энергия электрона $E = П + T$. Потенциальная энергия $П = \varphi e^-$, где e^- — заряд электрона. Потенциал $\varphi = \frac{e^+}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$, где e^+ — заряд протона. Таким образом, $П = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = -27{,}2$ эВ.

Кинетическая энергия $T = \frac{m\upsilon_1^2}{2} = 13{,}6$ эВ.

Полная энергия $E = П + T = -13{,}6$ эВ.

37.7. Определите энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй (серия Бальмера).

Ответ: $E_{3,2} = 1{,}89$ эВ.

Решение. Энергия фотона $E_{3,2} = h\nu_{3,2} = h\frac{c}{\lambda}$. λ определяется сериальной формулой Бальмера $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где $R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга, m — определяет серию, n — отдельные линии серии ($n = m + 1$). В данном случае переход электрона происходит с третьей ($n = 3$) орбиты на вторую ($m = 2$). Энергия фотона $E = hcR\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 3{,}024 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 1{,}89$ эВ.

37.8. Максимальная длина волны спектральной водородной линии серии Лаймана $\lambda_Л = 0{,}12$ мкм. Предполагая, что постоянная Ридберга неизвестна, определите максимальную длину волны серии Бальмера.

Ответ: $\lambda_Б = 0{,}648$ мкм.

Решение. $\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{1}{\lambda_Л}=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)$. $\frac{1}{\lambda_Б}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)$,

$$\lambda_Б=\lambda_Л\frac{\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}}=0,648\text{ мкм.}$$

37.9. Определите длины волн, соответствующие: 1) границе серии Лаймана; 2) границе серии Бальмера; 3) границе серии Пашена. Проанализируйте результат.

Ответ: 1) $\lambda_1=91$ нм, область ультрафиолета.
2) $\lambda_2=364$ нм, вблизи видимого фиолетового излучения.
3) $\lambda_3=820$ нм, область инфракрасного излучения.

Решение. 1) $m=1$, $n=\infty$. $\frac{1}{\lambda_1}=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)$; $\frac{1}{\lambda_1}=R$, $\lambda_1=\frac{1}{R}=91$ нм (ультрафиолет).

2) $m=2$, $n=\infty$, $\frac{1}{\lambda_2}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)$; $\frac{1}{\lambda_2}=R\frac{1}{4}$; $\lambda_2=\frac{4}{R}=364$ нм (вблизи фиолетового излучения).

3) $m=3$, $n=\infty$, $\frac{1}{\lambda_3}=R\left(\frac{1}{3^2}\right)$; $\lambda_3=\frac{9}{R}=820$ нм (инфракрасное излучение).

37.10. Определите длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой боровской орбиты на вторую. К какой серии относится эта линия и какая она по счету?

Ответ: $\lambda=0,41$ мкм, четвертая линия серии Бальмера.

Решение. Длина волны света, излучаемого или поглощаемого атомом водорода при переходе электрона с одной орбиты на другую, определяется сериальной формулой Бальмера $\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$;

$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6^2}\right)$, $\lambda=\frac{1}{R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6^2}\right)}=0,41$ мкм. Это 4-я линия серии Бальмера.

37.11. Определите, на сколько изменилась энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda=4,86\cdot10^{-7}$ м.

Ответ: $\Delta E=2,56$ эВ.

Решение. $\Delta E=E_n-E_m=h\nu$, $\nu=\frac{c}{\lambda}$, $\Delta E=\frac{hc}{\lambda}=4,096\cdot10^{-19}$ Дж $=2,56$ эВ.

37.12. Определите скорость электрона v на третьей орбите атома водорода.

Ответ: $v_3=0,731$ Мм/с.

Решение. $\frac{mv^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $r=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 mv^2}$. По теории Бора $mvr=n\hbar$, $n=3$ (по условию). $\frac{mve^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2}=n\hbar$, $v_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}=0,731\cdot10^6$ м/с, где $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка.

37.13. Определите частоту вращения электрона по третьей орбите атома водорода в теории Бора.

Ответ: $\nu=2,42\cdot10^{14}$ Гц.

Решение. $\frac{mv^2}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2}$, $mvr=n\hbar$, $r_n=n^2\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar}{me^2}$, $v_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}$.

$$\nu=\frac{v_n}{2\pi r_n}=\frac{me^4}{32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3n^3}=\frac{me^4}{4\varepsilon_0^2h^2n^3}=2,42\cdot10^{14}\text{ с}^{-1}.$$

37.14. Определите потенциал ионизации атома водорода.

Ответ: $\varphi=13,6$ В.

Решение. $E_i=e\varphi_i$, $E_i=h\nu_{1,\infty}=\frac{hc}{\lambda}=hcR\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)=hcR$, тогда $\varphi_i=\frac{hcR}{e}=13,6$ В.

37.15. Определите первый потенциал возбуждения атома водорода.

Ответ: $\varphi_1=10,2$ В.

Решение. Энергия ионизации $E_i=e\varphi_i=hcR$. $e\varphi_1=h\nu_{1,2}=h\frac{c}{\lambda}=hcR\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4}E_i$, т. е. $e\varphi_1=\frac{3}{4}e\varphi_i$, а $\varphi_1=\frac{3}{4}\varphi_i=10,2$ В. Значение φ_i взять из предыдущей задачи.

37.16. Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $E_i=13,6$ эВ, определите в электрон-вольтах энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой серии Бальмера.

Ответ: $E=1,89$ эВ.

Решение. Энергия ионизации $E_i = h\nu_{1,\infty} = hcR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = hcR.$

$$E_{Б,\lambda_{max}} = E_{3,2} = h\nu_{3,2} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = E_i\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36}E_i = 1{,}89 \text{ эВ}.$$

37.17. Основываясь на том, что первый потенциал возбуждения водорода $\varphi_1 = 10{,}2$ В, определите в электрон-вольтах энергию фотона, соответствующую второй линии серии Бальмера.

Ответ: $E_{4,2} = 2{,}55$ эВ.

Решение. $e\varphi_1 = h\nu_{1,2}$, $h\nu_{1,2} = hcR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hcR$, $e\varphi_1 = \frac{3}{4}hcR$,

$hcR = \frac{4}{3}e\varphi_1$, $E_{4,2} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{3}{16}hcR = \frac{1}{4}e\varphi_1 = 2{,}55$ эВ.

37.18. Фотон с энергией $E = 15{,}5$ эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость будет иметь электрон вдали от ядра атома?

Ответ: $\upsilon = 8 \cdot 10^5$ м/с.

Решение. $E = E_i + \frac{m\upsilon^2}{2}$, где E_i — энергия ионизации атома водорода. $E_i = 13{,}6$ эВ $= 21{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж; $\upsilon = \sqrt{\frac{2(E - E_i)}{m}} = 8 \cdot 10^5$ м/с.

37.19. Какие спектральные линии появятся при возбуждении атомарного водорода электронами с энергией 14 эВ?

Ответ: Весь спектр.

Решение. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ. Энергия возбуждения $E = 14$ эВ. Так как $E > E_i$, то при возбуждении атомарного водорода появится весь спектр.

37.20. Определите минимальную длину волны в ультрафиолетовой серии водорода.

Ответ: $\lambda = 90$ нм.

Решение. Минимальная длина волны соответствует энергии возбуждения атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ $= 21{,}76 \cdot 10^{-19}$ Дж. $E_i = \frac{hc}{\lambda_{min}}$,

откуда $\lambda_{min} = \frac{hc}{E_i} = 0{,}91 \cdot 10^{-7}$ м $= 90$ нм.

37.21. Найдите границы инфракрасной серии водорода.

Ответ: $\lambda_1 = 818$ нм; $\lambda_2 = 1{,}9$ мкм.

Решение. Инфракрасная серия водорода — серия Пашена. Ей соответствует номер $m = 3$, $n = m + 1$, т. е. $n = 4, 5, ..., \infty$. Границы серии соответствуют наборам пар $m = 3$, $n = \infty$ и $m = 3$, $n = 4$. Длины волн найдем из сериальной формулы Бальмера $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$;

$$\lambda_1 = \frac{1}{R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty^2}\right)} = \frac{9}{R} = 818 \text{ нм}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = 1{,}9 \text{ мкм}.$$

37.22. Каков состав ядер атомов бериллия, углерода, натрия, олова, фермия?

Решение. Символическая запись элемента $^A_Z X$, где Z — число протонов в ядре, A — массовое число. $A = Z + N$, количество нейтронов $N = A - Z$. ^9_4Be $Z = 4$, $N = 5$; $^{12}_6C$ $Z = 6$, $N = 6$; $^{22}_{11}Na$ $Z = 11$, $N = 11$; $^{117}_{50}Sn$ $Z = 50$; $N = 67$; $^{253}_{100}Fm$ $Z = 100$, $N = 153$.

37.23. Каков состав изотопов кислорода $^{16}_8O$, $^{17}_8O$, $^{18}_8O$?

Решение. У изотопа $^{16}_8O$ — 8 протонов, 8 нейтронов; у изотопа $^{17}_8O$ — 8 протонов, 9 нейтронов; у изотопа $^{18}_8O$ — 8 протонов, 10 нейтронов.

37.24. Чем отличается по составу ядро легкого изотопа гелия от ядра сверхтяжелого водорода?

Решение. Ядро ^4_2He в своем составе имеет 2 протона и 2 нейтрона. Ядро трития (сверхтяжелый водород) ^3_1H имеет 1 протон и 2 нейтрона. Следовательно, ядро гелия имеет на 1 протон больше, чем ядро водорода.

37.25. Определите энергию связи ядра гелия ^4_2He.

Ответ: $E_{св} = 29{,}4$ МэВ.

Решение. Энергия связи ядра $E_{св} = \left[Zm_p + (A - Z)m_n - m_я\right]c^2$. У гелия $Z = 2$, $A = 4$, $N = A - Z = 2$, т. е. ядро гелия имеет 2 протона и 2 нейтрона. Значения m_p, m_n, $m_я$ взять из таблицы. $E_{св} = [2 \cdot 1{,}673 + 2 \cdot 1{,}675 - 6{,}644]10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 0{,}468 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 29$ МэВ.

37.26. Вычислите энергию связи ядра алюминия $^{27}_{13}Al$.

Ответ: $E_{св} = 225$ МэВ.

Указание. Ядро алюминия $^{27}_{13}Al$ имеет $Z = 13$ протонов и $N = (27 - 13) = 14$ нейтронов. Решая аналогично предыдущей задаче, получим $E_{св} = 225$ МэВ.

37.27. Вычислите энергию, необходимую для разделения ядра лития $^{7}_{3}Li$ на нейтроны и протоны.

Ответ: $E_{св} = 39{,}2$ МэВ.

Решение. Для разделения ядра лития на протоны и нейтроны необходимо затратить энергию, равную связи ядра лития. Ядро лития $^{4}_{3}Li$ имеет $Z = 3$ протона и $N = 4$ нейтрона.

$$E_{св} = \left[3m_p + 4m_n - m_я\right]c^2 = 6{,}6288 \cdot 10^{-12}\ \text{Дж} = 39{,}2\ \text{МэВ}.$$

37.28. Найдите удельную энергию связи нуклонов в ядре дейтерия $^{2}_{1}H$, ядре кислорода $^{16}_{8}O$ и ядре полония $^{210}_{84}Po$.

Ответ: 1,1 МэВ; 8 МэВ; 7,25 МэВ.

Решение. Удельная энергия $\delta E_{св}$ — энергия связи, отнесенная к одному нуклону. $E_{св} = \Delta mc^2$, $\delta E_{св} = \dfrac{(Zm_p + Nm_n - m_я)c^2}{A}$. Массы протона, нейтрона и нейтральных атомов взять из таблицы в Приложении. Дейтерий $^{2}_{1}H$ $Z = 1$, $N = 1$, $A = 2$; кислород $^{16}_{8}O$ $Z = 8$, $N = 8$, $A = 16$; полоний $^{210}_{84}Po$ $Z = 84$, $N = 116$, $A = 210$.

37.29. Определите массу изотопа $^{15}_{7}N$, если изменение массы при образовании ядра $^{15}_{7}N$ составляет $0{,}2058 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: $m_я = 2{,}4909 \cdot 10^{-26}$ кг.

Решение. Изменение массы (дефект масс) $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я$, $m_я = Zm_p + (A - Z)m_n - \Delta m$; $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_p = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг; $Z = 7$, $A = 15$, $m_я = (7 \cdot 1{,}6736 + 8 \cdot 1{,}675)10^{-27} - 0{,}2058 \cdot 10^{-27} = 24{,}909 \cdot 10^{-27}$ кг = = $2{,}4909 \cdot 10^{-26}$ кг.

37.30. Найдите энергию связи нейтрона в ядре гелия $^{4}_{2}He$.

Ответ: $E_{св} = 20{,}64$ МэВ.

Решение. Энергия связи нейтрона в ядре гелия $^{4}_{2}He$ равна энергии, выделяющейся при его отрыве от ядра гелия $^{4}_{2}He$. Образуется ядро $^{3}_{2}He$. $m(^{3}_{2}He) = 5{,}0084 \cdot 10^{-27}$ кг; $m(^{4}_{2}He) = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг.

$$E_{св} = \Delta mc^2 = \left[m\left(^{3}_{2}He\right) + m_n - m\left(^{4}_{2}He\right)\right]c^2 = 0{,}3303 \cdot 10^{-11}\ \text{Дж} = 20{,}64\ \text{МэВ}.$$

37.31. Определите наименьшую энергию, необходимую для разделения ядра углерода $^{12}_{6}C$ на три одинаковые частицы.

Ответ: $E = 7{,}28$ МэВ.

Решение. Энергия, необходимая для разделения ядра углерода $^{12}_{6}C$ на три одинаковые частицы (очевидно α-частицы $^{4}_{2}He$), равна разности энергии связи ядра углерода и энергии связи трех ядер α-частицы. $E = E_{св_1} - E_{св_2}$. $E_{св_1} = (6m_p + 6m_n - m)c^2 = 147{,}84 \cdot 10^{-13}$ Дж == 92,48 МэВ. $E_{св_2} = \left[2m_p + 2m_n - m\left(^{4}_{2}He\right)\right]c^2 = 136{,}32 \cdot 10^{-13}$ Дж = = 85,2 МэВ. $E = 92{,}48 - 85{,}2 = 7{,}28$ МэВ.

37.32. Какая минимальная энергия необходима для расщепления ядра азота $^{14}_{7}N$ на протоны и нейтроны?

Ответ: $E_{св} = 104{,}7$ МэВ.

Решение. Чтобы ядро атома расщепить на протоны и нейтроны, ему необходимо сообщить энергию, равную энергии связи.

$$E_{св} = \left[Zm_p + Nm_n - m_я\right] \cdot 931{,}5\ \text{МэВ};\ Z = 7,\ A = 14,\ N = 7.$$

$$m_а = 14{,}00307\ \text{а.е.м.},\ m_p = 1{,}00783\ \text{а.е.м.},\ m_n = 1{,}00867\ \text{а.е.м.}$$

$$E_{св} = \left[7 \cdot 1{,}00783 + (7 \cdot 1{,}00867 - 14{,}00307)\right] \cdot 931{,}5 = 104{,}7\ \text{МэВ}.$$

37.33. Определите, какую долю кинетической энергии теряет нейтрон при упругом столкновении с покоящимся ядром углерода $^{12}_{6}C$, если после столкновения частицы движутся вдоль одной прямой. Массу нейтрального атома углерода принять равной $19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: $\dfrac{\Delta T}{T} = 0{,}286$.

Решение. $m_n v_n = m_n v'_n + m_C v'_C$, $\dfrac{m_n v_n^2}{2} = \dfrac{m_n (v'_n)^2}{2} + \dfrac{m_C (v'_C)^2}{2}$. Удар упругий. $v'_n = \dfrac{(m_n - m_C)v_n}{m_n + m_C}$, $v'_C = \dfrac{2m_n v_n}{m_n + m_C}$, $\Delta T = \dfrac{m_C (v'_C)^2}{2}$, $T = \dfrac{m_n v_n^2}{2}$,

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m_C}{m_n}\left(\frac{v'_C}{v_n}\right)^2 = \frac{m_C}{m_n}\left(\frac{2m_n}{m_n + m_C}\right)^2 = \frac{4m_n m_C}{(m_n + m_C)^2} = 0{,}286.$$

37.34. Сколько атомов полония распадается за сутки из 1 млн. атомов?

Ответ: $\Delta N = 5025$.

Решение. Число атомов радиоактивного вещества, распадающегося за время Δt равно $\Delta N = -\lambda N \Delta t$, где $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — постоянная

реактивного распада. Эта формула справедлива, если $\Delta t < T_{1/2}$, где $T_{1/2}$ — период полураспада. $T_{1/2}$ полония равен 138 суток.

$|\Delta N| = \lambda N \Delta t = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N \Delta t = 5025.$

37.35. Сколько атомов радона распадается за сутки из 1 млн. атомов?

Ответ: $\Delta N = 133000$.

Решение. Период полураспада радона $T_{1/2} = 3,82$ суток. В этом случае число распадающихся за сутки атомов радона $\Delta N = N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = 133000.$

37.36. Найдите число распадов за 1 с в 1 г радия.

Ответ: $\Delta N = 3,7 \cdot 10^{10}$ расп/с.

Решение. $T_{1/2} = 1590$ лет $= 1590 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600$ с $\approx 5,02 \cdot 10^{10}$с.

$$\Delta N = \lambda N \Delta t = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N \Delta t = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m N_A}{M} \Delta t = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ расп/с.}$$

37.37. Какая часть радиоактивных ядер некоторого элемента распадается за время, равное половине периода полураспада?

Ответ: $\frac{\Delta N}{N_0} = 0,29.$

Решение. Число распавшихся ядер $\Delta N = N_0 - N$. Часть радиоактивных ядер, распавшихся за время $t = \frac{T_{1/2}}{2}$ равно $\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \frac{N}{N_0} = 1 - \frac{1}{N_0} N_0 e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$; $\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - 2^{-\frac{t}{T}} = 0,29.$

37.38. Во сколько раз начальное количество ядер радиоактивного изотопа уменьшится за $t_2 = 3$ года, если за $t_1 = 1$ год оно уменьшилось в 4 раза.

Ответ: В 64 раза.

Решение. $N = N_0 e^{-\lambda t}$. $N_1 = N_0 e^{-\lambda t_1}$, $N_2 = N_0 e^{-\lambda t_2}$, $\frac{N_0}{N_1} = e^{\lambda t} = 4$ (по условию). $\lambda = \frac{\ln 4}{t_1}$. $\frac{N_0}{N_2} = e^{\lambda t_2} = e^{\frac{\ln 4 \cdot t_2}{t_1}} = e^{3 \ln 4} = 64.$

37.39. Определите какая часть (в %) начального количества ядер радиоактивного изотопа останется нераспавшейся по истечении времени t, равного двум средним временам жизни τ радиоактивного ядра.

Ответ: $\frac{N}{N_0} = 13,5\%.$

Решение. $N = N_0 e^{-\lambda t}$; $\tau = \frac{1}{\lambda}$; $t = 2\tau$ (по условию); $t = 2\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$;

$N = N_0 e^{-\lambda \frac{2}{\lambda}} = N_0 e^{-2}$; $\frac{N}{N_0} = e^{-2} = 0,135 = 13,5\%.$

37.40. Определите период полураспада радиоактивного изотопа, если $\frac{5}{8}$ начального количества ядер этого изотопа распалось за $t = 849$ с.

Ответ: $T_{1/2} = 10$ мин.

Решение. $N = N_0 e^{-\lambda t}$; $\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = \frac{5}{8}$; $e^{-\lambda t} = \frac{3}{8}$;

$-t\lambda = \ln\frac{3}{8}$; $\lambda = \frac{\ln\frac{8}{3}}{t}$; $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{t \ln 2}{\ln\frac{8}{3}} = \frac{0,693 \cdot 849}{0,980} = 600 \text{ с} = 10 \text{ мин.}$

37.41. Выведите формулу для активности (скорости радиоактивного распада) через период полураспада $T_{1/2}$ и начальное число N_0 радиоактивных атомов.

Ответ: $A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}}$.

Решение. $\Delta N = -\lambda N \Delta t$; $A = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N$; $N = N_0 e^{-\lambda t}$; $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$;

$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}}$.

37.42. Начальная масса радиоактивного изотопа йода ${}^{131}_{53}I$ (период полураспада $T_{1/2} = 8$ сут) равна 1 г. Определите: 1) начальную активность изотопа; 2) его активность через 3 суток.

Ответ: 1) $A_0 = 4,61 \cdot 10^{15}$ Бк; 2) $A = 3,55 \cdot 10^{15}$ Бк.

Решение. Активность изотопа в начальный момент времени $A_0 = \lambda N_0$; $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$; $N_0 = \frac{m N_A}{M}$; $A_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m N_A}{M} = 4,61 \cdot 10^{15}$Бк.

$A = A_0 e^{-\lambda t} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m N_A}{M} e^{-\lambda t} = 3,55 \cdot 10^{15}$Бк.

37.43. Определите период полураспада $T_{1/2}$ некоторого радиоактивного изотопа, если его активность за 5 суток уменьшилась в 2,2 раза.

Ответ: $T_{1/2} = 4,4$ сут.

Решение. Постоянная распада $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$; $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$; $A = A_0 e^{-\lambda t}$;

$\lambda = \frac{1}{t}\ln\frac{A_0}{A}$; $T_{1/2} = t\frac{\ln 2}{\ln 2,2} = 4,4$ сут.

37.44. Напишите ядерную реакцию, происходящую при бомбардировке бериллия ^9_4Be α-частицами и сопровождающуюся выбиванием нейтронов.

Решение. Согласно закону сохранения электрического заряда сумма нижних индексов после реакции должна быть равна их сумме до реакции. Аналогично сумма верхних индексов (массовое число) одна и та же до и после реакции. α-частица — ядро атома гелия ^4_2He, нейтрон — ^1_0n. $^9_4Be + ^4_2He \to ^1_0n + ^{12}_6C$.

37.45. Напишите ядерную реакцию, происходящую при бомбардировке лития ^7_3Li протонами и сопровождающуюся выбиванием нейтронов.

Решение. $^7_3Li + ^1_1p \to ^1_0n + ^7_4Be$.

37.46. Напишите недостающее в следующих ядерных реакциях: $^{41}_{19}K + ... \to ^{44}_{20}Ca + ^1_1H$; $^{55}_{25}Mn + ^1_1H \to ^{55}_{26}Fe + ...$; $... + ^4_2He \to ^{10}_5B + ^1_0n$; $^2_1H + \gamma \to ... + ^1_0n$.

Решение. $^{41}_{19}K + ^4_2He \to ^{44}_{20}Ca + ^1_1H$; $^{55}_{25}Mn + ^1_1H \to ^{55}_{26}Fe + ^1_0n$;

$^7_3Li + ^4_2He \to ^{10}_5B + ^1_0n$; $^2_1H + \gamma \to ^1_1p + ^1_0n$.

37.47. Элемент менделеевий был получен при бомбардировке эйнштейния $^{253}_{99}Es$ α-частицами с выделением нейтрона. Напишите реакцию.

Решение. $^{253}_{99}Es + ^4_2He \to ^1_0n + ^{256}_{101}Md$.

37.48. Выделяется или поглощается энергия при следующих ядерных реакциях:

1) $^7_3Li + ^2_1H \to ^8_4Be + ^1_0n$; 2) $^6_3Li + ^1_1H \to ^4_2He + ^3_2He$;
3) $^7_3Li + ^4_2He \to ^{10}_5B + ^1_0n$; 4) $^{14}_7N + ^4_2He \to ^{17}_8O + ^1_1H$?

Ответ: 1), 2) выделяется; 3), 4) поглощается.

Решение. Энергетический выход ядерной реакции

$$Q = (\sum M_1 - \sum M_2)c^2\,(\text{Дж}) = (\sum M_1 - \sum M_2)\cdot 931,5\,(\text{МэВ}),$$ где $\sum M_1$, $\sum M_2$ — сумма масс покоя ядер и частиц до и после реакции

соответственно. Если $\sum M_1 > \sum M_2$, то энергия $Q > 0$ — выделяется; при $\sum M_1 < \sum M_2$ энергия $Q < 0$ — поглощается.

1) $^7_3Li + ^2_1H \to ^8_4Be + ^1_0n$.

$Q_1 = (7,01601 + 2,01410 - 8,00785 - 1,00866)\cdot 931,5$ МэВ $= 12,7$ МэВ.

$Q_1 > 0$ — энергия выделяется.

2) $^6_3Li + ^1_1H \to ^4_2He + ^3_2He$.

$Q_2 = (6,01513 + 1,00783 - 4,00260 - 3,01602)\cdot 931,5$ МэВ $= 4$ МэВ.

$Q_2 > 0$ — энергия выделяется.

3) $^7_3Li + ^4_2He \to ^{10}_5B + ^1_0n$.

$Q_3 = (7,01601 + 4,00260 - 10,01294 - 1,00866)\cdot 931,5$ МэВ $= -2,8$ МэВ.

$Q_3 < 0$ — энергия поглощается.

4) $^{14}_7N + ^4_2He \to ^{17}_8O + ^1_1H$.

$Q_4 = (14,00307 + 4,00260 - 16,99913 - 1,00783)\cdot 931,5$ МэВ $= -1,2$ МэВ.

$Q_4 < 0$ — энергия поглощается.

37.49. Какая энергия выделяется при ядерной реакции $^7_3Li + ^1_1H \to 2^4_2He$?

Ответ: $Q = 17,35$ МэВ.

Решение. Энергия ядерной реакции $^7_3Li + ^1_1H \to 2^4_2He$ равна $Q = (7,016101 + 1,007801 - 2\cdot 4,0026)\cdot 931,5$ МэВ $= 17,35$ МэВ. $Q > 0$ — энергия выделяется.

37.50. Какая энергия выделяется при термоядерной реакции $^2_1H + ^3_1H \to ^4_2H + ^1_0n$?

Ответ: $Q = 17,6$ МэВ.

Решение. При данной термоядерной реакции выделяется энергия $Q = (2,01410 + 3,01605 - 4,00260 - 1,00783)\cdot 931,5$ МэВ $= 17,6$ МэВ.

37.51. При делении одного ядра $^{235}_{92}U$ на два осколка выделяется энергия $E_1 = 200$ МэВ. Какая энергия освобождается при сжигании в ядерном реакторе 1 г этого изотопа? Сколько каменного угля необходимо сжечь для получения такого количества энергии?

Ответ: $E = 5,1\cdot 10^{23}$ МэВ; $m_1 = 2,8$ т.

Решение. Количество атомов в уране $^{235}_{92}U$ массой $m = 1$ г равно $N = \frac{m}{M}N_A$. Энергия, выделяющаяся при делении, $E = E_1 N = E_1\frac{m}{M}N_A = 8,2\cdot 10^{10}$ Дж $= 5,1\cdot 10^{23}$ МэВ. Если такая энергия выделится при

сгорании каменного угля $E = qm_1$, где q — удельная теплота сгорания угля то $m_1 = \frac{E}{q} = \frac{8,2 \cdot 10^{10}}{29 \cdot 10^6} = 2,8 \cdot 10^3$ кг = = 2,8 т.

37.52. Чему равна мощность атомной электростанции, если за сутки расход урана $^{235}_{92}U$ составляет 220 г? КПД — 25%.

Ответ: $P = 52$ МВт.

Решение. Мощность атомной электростанции $P = \frac{E}{t}\eta$. Энергия, которую вырабатывает атомная электростанция $E = E_1 N$, где $E_1 = 200$ МэВ — энергия, выделяющаяся при делении одного ядра, N — количество ядер. $N = \frac{m}{M}N_A$, $E = E_1\frac{m}{M}N_A$; $P = \frac{E_1}{t}\cdot\frac{m}{M}N_A\eta =$ $= 52$ МВт.

37.53. Реактор АЭС имеет КПД 32%. Сколько граммов урана-235 потребляет ядерный реактор за 1*ч*, если его электрическая мощность 440 МВт?

Ответ: $m = 64$ г.

Решение. См. решение предыдущей задачи, $m = \frac{PtM}{E_1 N_A \eta} = 64$ г.

37.54. На тепловых электростанциях для обеспечения 1 ГВт электрической мощности необходимо сжигать ежегодно $2 \cdot 10^6$ т угля, «поставляя» в атмосферу $8 \cdot 10^3$ т золы и десятки тысяч тонн сернистых газов. Сколько требуется израсходовать урана-235 для получения такой же мощности и при том же КПД?

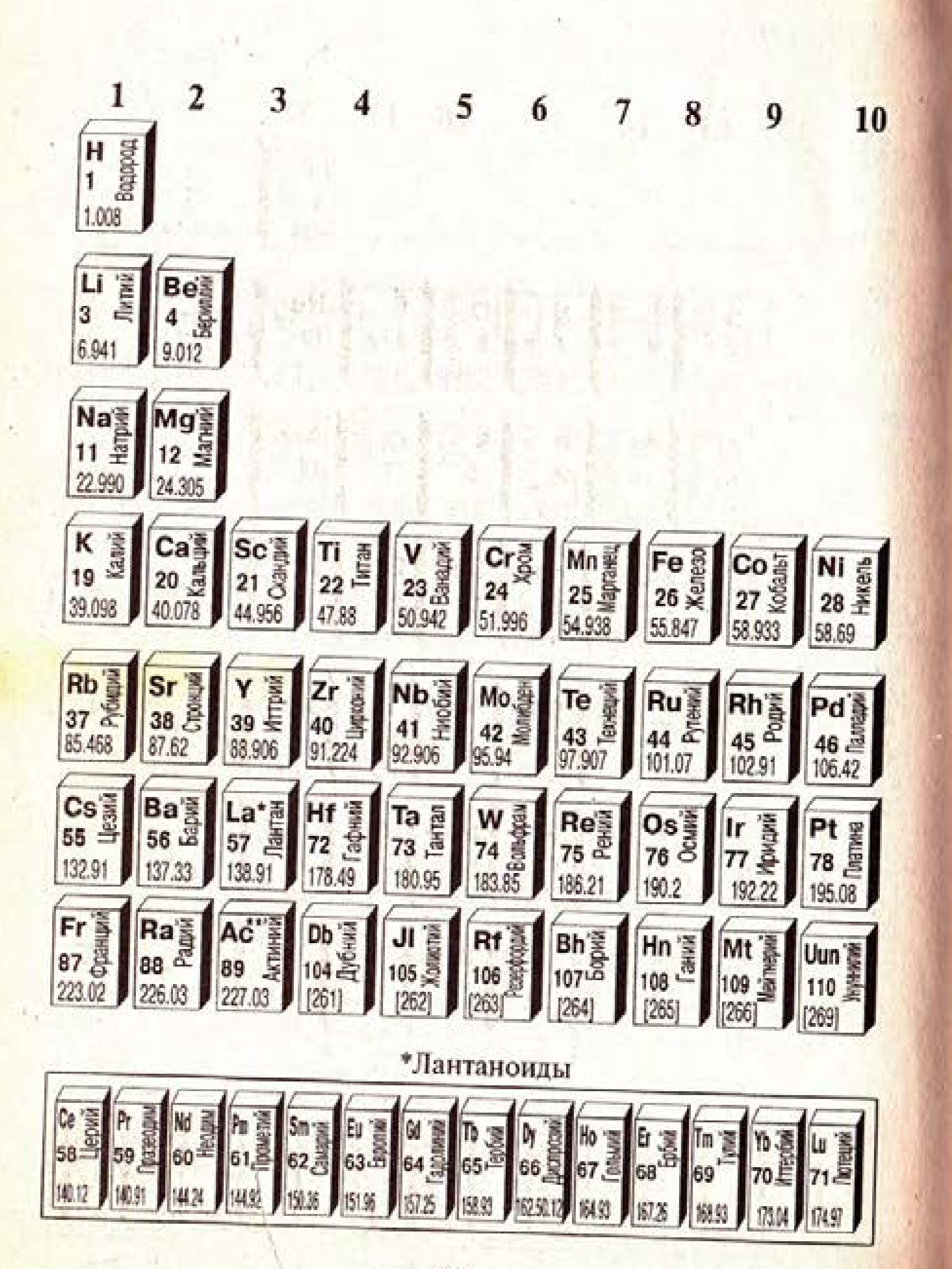
Ответ: $m = 707$ кг.

Указание. См. решение задачи 37.51.

Масса урана $m = \frac{m_1 q M}{E_1 N_A} = \frac{2 \cdot 10^9 \cdot 29 \cdot 10^6 \cdot 235 \cdot 10^{-3}}{200 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} = 707$ кг.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕВА



11	12	13	14	15	16	17	18	
							He 2 Гелий 4.003	1
		B 5 Бор 10.811	C 6 Углерод 12.011	N 7 Азот 14.007	O 8 Кислород 15.999	F 9 Фтор 18.998	Ne 10 Неон 20.179	2
		Al 13 Алюминий 26.982	Si 14 Кремний 28.086	P 15 Фосфор 30.974	S 16 Сера 32.066	Cl 17 Хлор 35.453	Ar 18 Аргон 39.948	3
Cu 29 Медь 63.546	Zn 30 Цинк 65.39	Ga 31 Галлий 69.723	Ge 32 Германий 72.59	As 33 Мышьяк 74.922	Se 34 Селен 78.96	Br 35 Бром 79.904	Kr 36 Криптон 83.80	4
Ag 47 Серебро 107.87	Cd 48 Кадмий 112.41	In 49 Индий 114.82	Sn 50 Олово 118.71	Sb 51 Сурьма 121.75	Te 52 Теллур 127.60	I 53 Йод 126.90	Xe 54 Ксенон 131.29	5
Au 79 Золото 196.97	Hg 80 Ртуть 200.59	Tl 81 Таллий 204.38	Pb 82 Свинец 207.2	Bi 83 Висмут 208.98	Po 84 Полоний 208.982	At 85 Астат 209.99	Rn 86 Радон 222.02	6
Uuu 111 Унунуний [272]	Uub 112 Унунбий [277]	Uut 113 Унунтрий	Uuq 114 Унунквадий	Uup 115 Унунпентий	Uuh 116 Унунгексий	Uus 117 Унунсептий	Uuo 118 Унуноктий	7

П Е Р И О Д Ы

**Актиноиды

Th 90 Торий 232.04	Pa 91 Протактиний 231.04	U 92 Уран 238.03	Np 93 Нептуний 237.05	Pu 94 Плутоний 244.06	Am 95 Америций 243.06	Cm 96 Кюрий 247.07	Bk 97 Берклий 247.07	Cf 98 Калифорний 251.08	Es 99 Эйнштейний 252.08	Fm 100 Фермий 257.10	Md 101 Менделевий 258.10	Nb 102 Нобелий 259.10	Lr 103 Лоуренсий 260.11

1. Единицы СИ физических величин

Наименование	Единица		
	наименование	обозначение	Выражение через основные и дополнительные единицы СИ
1	2	3	4
Основные			
Длина	метр	м	м
Масса	килограмм	кг	кг
Время	секунда	с	с
Сила тока	ампер	А	А
Температура	кельвин	К	К
Сила света	канделла	кд	кд
Количество вещества	моль	моль	моль
Дополнительные			
Угол плоский	радиан	рад	—
Угол телесный	стерадиан	ср	—
Производные			
Площадь	квадратный метр	$м^2$	$м^2$
Объём	кубический метр	$м^3$	$м^3$
Период	секунда	с	с
Частота периодического процесса	герц	Гц	$с^{-1}$
Частота вращения	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$	$с^{-1}$
Плотность	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$	$м^{-3} \cdot кг$
Скорость	метр в секунду	м/с	$м \cdot с^{-1}$
Ускорение	метр на секунду в квадрате	$м/с^2$	$м \cdot с^{-2}$

1	2	3	4
Сила	ньютон	Н	$м \cdot кг \cdot с^{-2}$
Давление	паскаль	Па	$м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2}$
Работа, энергия, количество теплоты	джоуль	Дж	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2}$
Мощность	ватт	Вт	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3}$
Электрический заряд (количество электричества)	кулон	Кл	$с \cdot А$
Электрическое напряжение, разность потенциалов, ЭДС	вольт	В	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-1}$
Напряженность электрического поля	вольт на метр	В/м	$м \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-1}$
Электрическая емкость	фарад	Ф	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^4 \cdot А^2$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-2}$
Магнитный поток	вебер	Вб	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Магнитная индукция	тесла	Тл	$кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	А/м	$м^{-1} \cdot А$
Индуктивность	генри	Гн	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-2}$
Световой поток	люмен	лм	кд
Освещенность	люкс	лк	$м^{-2} \cdot кд$
Оптическая сила	диоптрия	дптр	$м^{-1}$

2. Физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 2,9979 \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	$G = 6,672 \cdot 10^{-11}\ м^3/(кг \cdot с^2)$
Ускорение свободного падения	$g = 9,8\ м/с^2$
Атомная единица массы	$а.е.м. = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\ моль^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R = 8,31\ Дж/(моль \cdot К)$
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях ($T_0 = 273,15\ К;\ p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па)	$V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3}\ м^3/моль$
Нормальное атмосферное давление	$p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па

Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный электрический заряд	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Фарадея	$F = 9,65 \cdot 10^{4}$ Кл/моль
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Отношение заряда электрона к его массе	$e/m_e = 1,759 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Постоянная Планка	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
	$\hbar = h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Средний радиус Земли	$R_З = 6,37 \cdot 10^{6}$ м
Средний радиус Солнца	$R_С = 6,96 \cdot 10^{8}$ м
Средний радиус Луны	$R_Л = 1,74 \cdot 10^{6}$ м
Масса Земли	$M_З = 5,97 \cdot 10^{24}$ кг
Масса Солнца	$M_С = 1,98 \cdot 10^{30}$ кг
Масса Луны	$M_Л = 7,35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние от Земли до Солнца	$1,496 \cdot 10^{8}$ км
Среднее расстояние от Земли до Луны	$3844 \cdot 10^{5}$ км

3. Плотность веществ

Твердые тела		Жидкости		Газы (при нормальных условиях)	
Вещество	ρ (10^3кг/м^3)	Вещество	ρ (10^3кг/м^3)	Вещество	ρ (кг/м^3)
1	2	3	4	5	6
Алюминий	2,7	Бензин	0,7	Гелий	0,18
Железо	7,8	Вода	1,0	Водород	0,09
Латунь	8,5	Керосин	0,8	Воздух	1,29
Лёд	0,9	Нефть	0,8	Кислород	1,43
Медь	8,9	Ртуть	13,6	Азот	1,25
Никель	8,9	Спирт	0,8	Углекислый газ	1,98
Свинец	11,3	Масло	0,9		
Сталь	7,8	Ацетон	0,79		
Стекло	2,5	Глицерин	1,26		
Серебро	10,5				
Цинк	7,0				
Чугун	7,8				
Кирпич	1,8				

4. Тепловые свойства веществ

Твердые тела

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг · К)	Температура плавления, К	Удельная теплота плавления, кДж/кг
Алюминий	0,88	933	380
Вольфрам	0,13	3600	185
Железо	0,46	1808	270
Лёд	2,1	273	330
Медь	0,38	1356	180
Свинец	0,13	600	25
Сталь	0,46	1673	82
Латунь	0,38	1173	—
Олово	0,25	505	58
Серебро	0,25	1233	101

Жидкости

Вещество	Удельная теплоёмкость, кДж/(кг · К)	Температура кипения[1], К	Удельная теплота парообразования[2], МДж/кг
1	2	3	4
Вода	4,2	373	2,3
Спирт	2,4	351	0,9

[1] При нормальном давлении.

[2] При нормальном давлении и температуре кипения.

1	2	3	4
Ртуть	0,125	630	0,28
Масло	2,1	293	—

Газы (при постоянном давлении)

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг · К)
Водород	14,3
Воздух	1,01
Кислород	0,91
Углекислый газ	0,83

5. Удельная теплота сгорания, 10^7 Дж/кг

Бензин	4,61	Керосин	4,61
Дерево	1,26	Нефть	4,61
Каменный уголь	2,93	Спирт	2,93
Диз. топливо	4,61	Природный газ	3,60
Порох	0,38	Торф	1,5
Условное топл.	3,00		

6. Молярная масса некоторых газов, 10^{-3} кг/моль

Азот N_2	28	Воздух	29
Водород H_2	2	Гелий He_2	4
Водяной пар H_2O	18	Кислород O_2	32
		Углекислый газ CO_2	44

7. Поверхностное натяжение жидкостей при комнатной температуре, 10^{-2} Н/м

Анилин	4,3	Мыльный раствор	4,0
Вода	7,4	Спирт	2,2
Керосин	3,6	Ртуть	47,1

8. Зависимость давления пара $p_н$ и плотности $\rho_н$ насыщенного водяного пара от температуры t

t, °C	$p_н$, кПа	$\rho_н$, г/м³	t, °C	$p_н$, кПа	$\rho_н$, г/м³
0	0,61	4,8	20	2,33	17,3
2	0,71	5,6	30	4,24	30,4
4	0,81	6,4	40	7,37	51,2
6	0,93	7,3	50	12,34	82,9
8	1,06	8,3	90	70,11	423,3
10	1,23	9,4	200	1560	7870
18	2,07	15,4	300	8600	46250

9. Коэффициент линейного расширения твердых тел, 10^{-5} К$^{-1}$

Алюминий	2,40
Железо	1,20
Инвар	0,15
Латунь	1,90
Медь	1,70
Свинец	2,90
Сталь	1,10
Стекло	0,90

10. Коэффициент объемного расширения жидкостей, 10^{-4} К$^{-1}$

Вода	1,8
Керосин	10,0
Нефть	10,0
Ртуть	1,8
Серная кислота	5,6
Спирт	11,0

11. Скорость звука при 20°С, м/с

Воздух	340
Вода	1500

12. Предел прочности на растяжение $\sigma_{пч}$ и модуль упругости E

Вещество	$\sigma_{пч}$, МПа	E, ГПа
Алюминий	100	70
Медь	50	120
Сталь	500	200

13. Диэлектрическая проницаемость

Вода	81,0	Парафин	2,0
Глицерин	39,1	Слюда	7,0
Керосин	2,0	Стекло	7,0
Масло	2,0	Эбонит	3,0
Фарфор	6,0	Кварц	4,5

14. Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления проводников

Вещество	ρ, 10^{-7} Ом · м	α, 10^{-3} К$^{-1}$	Вещество	ρ, 10^{-7} Ом · м	α, 10^{-3} К$^{-1}$
Алюминий	0,26	3,6	Нихром	11,0	0,4
Вольфрам	0,55	5,2	Свинец	2,10	4,3
Железо	1,20	6,0	Серебро	0,16	3,6
Медь	0,17	4,2	Латунь	0,71	1,0
Уголь	400	−0,8			

15. Коэффициент преломления (абсолютный)

Алмаз	2,42	Лед	1,31
Вода	1,33	Скипидар	1,47
Воздух	1,00029	Спирт	1,36
Кварц	1,54	Стекло	1,50

16. Энергия ионизации

Вещество	E_i, Дж	E_i, эВ
Водород	$2{,}18 \cdot 10^{-18}$	13,6
Гелий	$3{,}94 \cdot 10^{-18}$	24,6
Литий	$1{,}21 \cdot 10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1{,}66 \cdot 10^{-18}$	10,4

17. Работа выхода электронов

Металл	A, Дж	A, эВ
Калий	$3{,}5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Литий	$3{,}7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Платина	$10 \cdot 10^{-19}$	6,3
Рубидий	$3{,}4 \cdot 10^{-19}$	2,1
Серебро	$7{,}5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цезий	$3{,}2 \cdot 10^{-19}$	2,0
Цинк	$6{,}4 \cdot 10^{-19}$	4,0

18. Относительные атомные массы (округленные значения) A_r и порядковые номера Z некоторых элементов

Элемент	Символ	A_r	Z	Элемент	Символ	A_r	Z
Азот	N	14	7	Марганец	Mn	55	25
Алюминий	Al	27	13	Медь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молибден	Mo	96	42
Барий	Ba	137	56	Натрий	Na	23	11
Ванадий	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водород	H	1	1	Никель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелий	He	4	2	Платина	Pt	195	78
Железо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79	Сера	S	32	16
Калий	K	39	19	Серебро	Ag	108	47
Кальций	Ca	40	20	Углерод	C	12	6
Кислород	O	16	8	Уран	U	238	92
Магний	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

19. Массы атомов легких изотопов

Изотоп	Символ	Масса а.е.м.	Изотоп	Символ	Масса а.е.м.
Нейтрон	${}^{1}_{0}n$	1,00867	Берилий	${}^{7}_{4}Be$	7,01693
				${}^{9}_{4}Be$	9,01219
Водород	${}^{1}_{1}H$	1,00783	Бор	${}^{10}_{5}B$	10,01294
	${}^{2}_{1}H$	2,01410		${}^{11}_{5}B$	11,00930
	${}^{3}_{1}H$	3,01605			
Гелий	${}^{3}_{2}He$	3,01603	Углерод	${}^{12}_{6}C$	12,00000
	${}^{4}_{2}He$	4,00260		${}^{13}_{6}C$	13,00335
				${}^{14}_{6}C$	14,00324
Литий	${}^{6}_{3}Li$	6,01513	Азот	${}^{14}_{7}N$	14,00307
	${}^{7}_{3}Li$	7,01601	Кислород	${}^{16}_{8}O$	15,99491
				${}^{17}_{8}O$	16,99913

20. Основные характеристики некоторых элементарных частиц

Частица	Символ	Заряд, 10^{-19} Кл	Масса, 10^{-27} кг
α -частица	$^4_2\alpha$	3,2	6,6446
Нейтрон	^1_0n	0	1,6748
Позитрон	^0_1e	1,6	0,000911
Протон	^1_0p	1,6	1,6724
Электрон	$^0_{-1}e$	–1,6	0,000911

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Евграфова И. Н., Каган В. Л.* Курс физики. — М.: Высш. шк., 1984.
2. *Мустафаев Р. А., Кривцов В. Г.* Физика. — М.: Высш. шк., 1989.
3. *Корсак К. В.* Фізика. Письмовий екзамен. — К.: Либідь, 1983.
4. *Кабардин О. Ф.* Физика. Справочные материалы. — М.: Просвещение, 1988.
5. Решение задач по физике. Справочник школьника / Составитель Власова И. Г. — М., 1997.
6. *Яворский Б. М., Селезнев Ю. А.* Справочное руководство по физике. — М.: Наука, 1989.
7. Физика: Большой справочник для школьников и поступающих в вузы / Дик Ю. И., Ильин В. А. и др. — М.: Изд. дом «Дрофа», 1999.
8. Физика. Решение задач: В 2 кн. — Мн.: Литература, 1997.
9. *Павленко Ю. Г.* Начала физики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
10. *Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б., Керженцев В. В., Мякишев Г. Я.* Задачи по физике для поступающих в вузы. — М.: Наука, 1987.
11. *Кашина С. И., Сезонов Ю. И.* Сборник задач по физике. — М.: Высш. шк., 1983.
12. *Гончаренко С. У.* Конкурсные задачи по физике. — К.: Изд-во «Техника», 1966.
13. *Гурский И. П.* Элементарная физика с примерами решения задач. — М.: Наука, 1989.
14. *Гольдфарб Н. И.* Сборник вопросов и задач по физике. — М.: Высш. шк., 1975.
15. *Гофман Ю. В.* Законы, формулы, задачи физики. Справочник. — К.: Наук. думка, 1977
16. *Гельфгат И. М., Генденштейн Л. Э., Кирик Л. А.* 1001 задача по физике с решениями. — Х.: ИМП «Рубикон», 1997.
17. Физика: Задачник—практикум / Под ред. Гончаренко С. У. — К.: Выща шк., 1988.
18. *Савченко Н. Е.* Решение задач по физике: Справ. пособие. — Мн.: Выш. шк., 1988.
19. *Гуща А. И., Путан Л. А.* Пособие по физике для подготовительных отделений. — Мн.: Выш. шк.,1984.
20. *Трофимова Т. И.* Курс физики: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. шк., 1990.

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов 3

МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА. *Уровень I* 7

1. Равномерное прямолинейное движение 7
2. Равнопеременное прямолинейное движение 23
3. Криволинейное движение 48
4. Вращательное движение 71

Кинематика. *Уровень II* 81

ДИНАМИКА. *Уровень I* 89

5. Динамика прямолинейного движения 89
6. Динамика криволинейного движения 122
7. Закон всемирного тяготения 140
8. Импульс. Закон сохранения импульса 153
9. Работа, мощность, энергия. Законы сохранения в механике 177

Динамика. *Уровень II* 215

СТАТИКА. *Уровень I* 229

10. Равновесие материальной точки 229
11. Равновесие твердого тела 239

Статика. *Уровень II* 267

12. Жидкости и газы. *Уровень I* 276

Гидромеханика. *Уровень II* 299

Механика. *Уровень III* 308

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА. *Уровень I* *335*

13. Молекулярно-кинетическая теория строения вещества. Упругие и тепловые свойства твердых тел и жидкости 335
14. Молекулярно-кинетическая теория газов. Газовые законы 344
15. Теплота и работа. Процесс теплообмена. 375
16. Применение первого начала термодинамики к газам 392
17. Влажность. Свойства паров и жидкости 409

Молекулярная физика и термодинамика. *Уровень II* 418

Молекулярная физика и термодинамика. *Уровень III* 425

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. *Уровень I* 433

18. Закон Кулона 433
19. Напряженность и потенциал электрического поля. Работа сил электрического поля 448
20. Проводники и диэлектрики в электрическом поле 476
21. Электрическая емкость. Конденсаторы. Энергия электрического поля 48

Электростатика. *Уровень II* 50

ПОСТОЯННЫЙ ТОК. *Уровень I* 51

22. Сила тока. Закон Ома для участка цепи. Соединение проводников 51
23. Закон Ома для замкнутой цепи 52
24. Работа и мощность тока 54
25. Электрический ток в различных средах 56

Постоянный электрический ток. *Уровень II* 56

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. *Уровень I* 57

26. Магнитное поле проводника с током. Взаимодействие магнитного поля с током 57
27. Электромагнитная индукция. Самоиндукция 58

Магнитное поле. *Уровень II* 6

Электромагнетизм. *Уровень III* 6

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. *Уровень I* 6

28. Кинематика гармонического колебательного движения 6
29. Динамика гармонического колебательного движения 6
30. Волны. Звук 6
31. Электромагнитные колебания и волны ....
32. Переменный ток. Передача энергии на расстояние ....

Колебания и волны. *Уровень II* ....

Колебания и волны. *Уровень III* ....

ОПТИКА

ОПТИКА. *Уровень I* ....

33. Геометрическая оптика ....
34. Волновая оптика ....

Оптика. *Уровень II* ....

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ МИКРОЧАСТИЦ

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ МИКРОЧАСТИ *Уровень I* ....

35. Элементы теории относительности ....
36. Квантовые свойства света ....
37. Основы атомной и ядерной физики ....

ПРИЛОЖЕНИЕ ....

Рекомендуемая литература ....